Прикладная математика и механика. Том 36, 1972

УДК 532.51

ЗАМЕЧАНИЯ О ПОВЕДЕНИИ ТЕЧЕНИЙ ТРЕХМЕРНОЙ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ МАЛОМ ВОЗМУЩЕНИИ НАЧАЛЬНОГО ПОЛЯ СКОРОСТЕЙ

В. И. Арнольд

(Москва)

Рассматриваются уравнения Эйлера трехмерного движения идеальной несжимаемой жидкости, линеаризованные вблизи стационарного течения. Указан класс стационарных течений, для которых эти линеаризованные уравнения допускают точные решения в явном виде. Анализ полученных решений показывает, что нарастание возмущений для некоторых стационарных течений резко отличается от того, какое имеет место для большинства рассматриваемых в теории гидродинамической устойчивости случаев: появляется сразу бесконечное количество неустойчивых форм, течение плохо прогнозируемо (в том смысле, что для приближенного определения развития возмущения со временем требуется быстро растущее количество информации о начальном условии) и т. п. Причина этих отличий состоит в различии геометрии стационарных течений. Во вновь построенных стационарных течениях частица жидкости при движении вытягивается в нить или ленту, длина которой растет со временем экспоненциально, тогда как для обычно рассматриваемых течений эта длина растет как линейная функция времени. В двумерных стационарных течениях явление экспоненциального растяжения частиц невозможно; показано, что оно невозможно также и в трехмерных стационарных течениях, у которых векторы скорости и вихря неколлинеарны.

1. Линеаризованное уравнение Эйлера. Укороченное уравнение Уравнение Эйлера запишем в форме уравнения для вихря

$$\partial \mathbf{r} / \partial t = \{\mathbf{v}, \mathbf{r}\} \qquad (\mathbf{r} = \operatorname{rot} \mathbf{v}) \tag{1.1}$$

где скобка Пуассона двух векторных полей определяется условием

$$D_{\{\mathbf{a},\mathbf{b}\}} = D_{\mathbf{b}} D_{\mathbf{a}} - D_{\mathbf{a}} D_{\mathbf{b}}$$

в котором $D_{\mathbf{q}}$ — дифференцирование по направлению поля $\mathbf{q}$. Рассмотрим малое возмущение $\mathbf{u}$ стационарного течения $\mathbf{v}$. Пусть $\mathbf{s}$ — поле возмущения вихря: $\operatorname{rot}(\mathbf{v} + \mathbf{u}) = \mathbf{r} + \mathbf{s}$. Линеаризованное в окрестности течения $\mathbf{v}$ уравнение (1.1) имеет вид

$$\partial \mathbf{s} / \partial t = \{\mathbf{v}, \mathbf{s}\} + \{\operatorname{rot}^{-1} \mathbf{s}, \mathbf{r}\} \tag{1.2}$$

Под операцией rot^{-1} понимается восстановление бездивергентного векторного поля по его полю вихря. В неодносвязном случае вместо поля вихря нужно рассматривать совокупность циркуляций поля скоростей по всевозможным замкнутым контурам (не обязательно гомологичным нулю), т. е. поле вихря с циркуляциями поля скоростей по базисным одномерным циклам. В случае, когда область течения имеет край, поле скоростей предполагается касающимся края.

Изучим поведение решений этого линейного относительно s уравнения.

Заметим, что первое слагаемое в правой части (1.2) — более сильный линейный оператор относительно s, чем второе. Поэтому второе слагаемое можно рассматривать как возмущение первого. Таким образом приходим к укороченному уравнению

$$\partial \mathrm{s} / \partial t = \{\mathrm{v}, \mathrm{s}\} \tag{1.3}$$

Если стационарное течение потенциально ($\mathbf{r} = 0$), то второе слагаемое в уравнении (1.2) исчезает, так что в этом случае укороченное уравнение (1.3) совпадает с линеаризованным уравнением Эйлера (1.2). По соображениям теории возмущений [1] естественно ожидать, что в общем случае укороченное уравнение отвечает за непрерывную часть спектра уравнения (1.2).

Укороченное уравнение (1.3) означает, что вектор s переносится стационарным течением. Поэтому оно решается в явном виде, если известна геометрия стационарного течения v. Пусть $\{g^t\}$ — однопараметрическая группа диффеоморфизмов, осуществляемых стационарным течением, т. е. $g^t(x)$ — решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dt} g^t(x) = \mathrm{v}(g^t(x)), \qquad g^0(x) = x \tag{1.4}$$

Тогда решение s укороченного уравнения (1.3) выражается через свои начальные условия по формуле

$$\mathrm{s}(t, x) = g_*{}^t \mathrm{s}(0, g^{-t}(x)) \tag{1.5}$$

где $g_*{}^t$ — производная отображения g^t.

2. Переменные действие — угол. Геометрия стационарных течений идеальной жидкости рассмотрена в [2]. Там доказано, что если поля v и r не коллинеарны тождественно ни в какой области, то пространство, заполненное жидкостью, разбивается на ячейки, в каждой из которых линии тока и линии ротора лежат на торических поверхностях [1]. В каждой из таких ячеек можно ввести криволинейные координаты, аналогичные переменным действие — угол классической механики.

Будем обозначать эти координаты через φ и z. Координаты $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \bmod 2\pi$ — угловые координаты вдоль торов, а z — «переменная действия», нумерующая торы. Координаты φ_1, φ_2, z можно выбрать так, чтобы элемент объема имел вид $d\varphi_1 d\varphi_2 dz$, а поля v и r — вид

$$\mathrm{v} = v_1(z) \frac{\partial}{\partial \varphi_1} + v_2(z) \frac{\partial}{\partial \varphi_2}, \qquad \mathbf{r} = r_1(z) \frac{\partial}{\partial \varphi_1} + r_2(z) \frac{\partial}{\partial \varphi_2}$$

В координатах φ, z уравнения (1.4) интегрируются. Получаем из (1.5) для компонент поля s в координатах φ, z

$$\mathrm{s}(t; \varphi, z) = s_1 \frac{\partial}{\partial \varphi_1} + s_2 \frac{\partial}{\partial \varphi_2} + s_3 \frac{\partial}{\partial z}$$

---

[1] В случае течения на многообразии с краем возможны еще ячейки другого рода, в которых все линии тока замкнуты; здесь этот случай не рассматривается.

выражения

$$s_{1,2}(t;\varphi,z)=s_{1,2}(0;\varphi_0,z)+tv'_{1,2}s_3(0;\varphi_0,z),\quad s_3(t;\varphi,z)=s_3(0;\varphi_0,z)$$
$$(\varphi_0=\varphi-\mathrm{v}t) \tag{2.1}$$

где штрих — производная по z.

Формулы (2.1) показывают, что обычно (при $\mathrm{v}'\neq 0$) решения укороченного уравнения (1.3) растут со временем линейно. Таким образом, обычная (экспоненциальная) неустойчивость линеаризованного уравнения Эйлера может возникнуть лишь под влиянием второго слагаемого в формуле (1.2). При этом, по соображениям теории возмущений, естественно ожидать появления конечного числа дискретных неустойчивых собственных значений (строго это не доказано).

Интересным исключением является течение Куэтта между двумя цилиндрами в неустойчивом случае (на это исключение указал автору В. И. Юдович).

В течении Куэтта составляющая скорости основного течения вдоль оси цилиндра равна нулю и поэтому не меняется при изменении постоянной Бернулли. Это приводит к вырождению целого отрезка непрерывного спектра в одну точку: в формуле (3.1) продольная составляющая скорости $v_{\mathbf{m}}$ при некоторых значениях волнового вектора $\mathbf{m}$ не зависит от z.

Гипотеза о конечности числа неустойчивых форм относится к случаю невырожденного непрерывного спектра, когда продольная составляющая скорости меняется с постоянной Бернулли, т. е. в (3.1) $v_{\mathbf{m}}'\neq 0$. Для такой невырожденности достаточно, например, чтобы кривизна плоской кривой $v_1=v_1(z)$, $v_2=v_2(z)$ не обращалась в нуль и чтобы эта кривая была регулярной.

Вопрос о сохранении обнаруженной выше медленной неустойчивости при переходе от укороченного уравнения (1.3) к полному уравнению (1.2) обсуждается ниже в п. 4. Другая возможность экспоненциальной неустойчивости связана с коллинеарностью $\mathbf{v}$ и $\mathbf{r}$, когда нельзя ввести переменные действие — угол, и геометрия стационарного течения отлична от описанной выше (ср. [3]). Этот вид неустойчивости рассмотрен в п. 5.

3. Спектр укороченного уравнения. Для более подробного исследования решений уравнения (1.3) естественно разложить $\mathbf{s}$ в ряд Фурье по φ. С этой целью введем следующие обозначения. Пусть $\mathbf{m}$ — пара целых чисел m_1, m_2. Будем называть $\mathbf{m}$ волновым вектором. Через $(\mathbf{m},\varphi)$ обозначим $m_1\varphi_1+m_2\varphi_2$, через m — число $\sqrt{m_1^2+m_2^2}$, через $\mathbf{n}$ — пару $n_1=-m_2$, $n_2=m_1$.

Для каждого волнового вектора $\mathbf{m}$ определим «продольное», «поперечное» и «нормальное» векторные поля

$$\mathbf{e_m}=\frac{m_1}{m}\frac{\partial}{\partial\varphi_1}+\frac{m_2}{m}\frac{\partial}{\partial\varphi_2},\qquad \mathbf{e_n}=-\frac{m_2}{m}\frac{\partial}{\partial\varphi_1}+\frac{m_1}{m}\frac{\partial}{\partial\varphi_2},\qquad \mathbf{e}_z=\frac{\partial}{\partial z}$$

(При $m=0$ положим, например, $\mathbf{e_m}=\partial/\partial\varphi_1$, $\mathbf{e_n}=\partial/\partial\varphi_2$).
Поле $\mathbf{s}$ можно тогда записать в виде ряда Фурье

$$\mathbf{s}=\sum_{\mathbf{m}}(A_{\mathbf{m}}\mathbf{e_m}+B_{\mathbf{m}}\mathbf{e_n}+C_{\mathbf{m}}\mathbf{e}_z)\,e^{i(\mathbf{m},\varphi)}$$

где $A_{\mathbf{m}}$, $B_{\mathbf{m}}$, $C_{\mathbf{m}}$ — функции от z.

Легко проверить, что поля $\mathbf{e}_\mathbf{m}$, $\mathbf{e}_\mathbf{n}$, $\mathbf{e}_z$ имеют дивергенцию нуль (это следует из того, что элемент объема имеет вид $d\varphi_1\, d\varphi_2 dz$). Поэтому

$$\operatorname{div} \mathbf{s} = \sum_{\mathbf{m}} (imA_\mathbf{m} + DC_\mathbf{m})\, e^{i(\mathbf{m}, \varphi)} \qquad \left(D = \frac{d}{dz}\right)$$

Следовательно, бездивергентные поля определяются условием «$imA_\mathbf{m} + DC_\mathbf{m} = 0$ при всех $\mathbf{m}$».

В соответствии с этим условием можно принять за «координаты» в пространстве бездивергентных полей набор функций $B_\mathbf{m}$, $C_\mathbf{m}$ (при $\mathbf{m} = 0$ будет $C_0 = \text{const}$, но нужно добавить A_0). В этих координатах уравнение (1.3) распадается на ряд треугольных систем

$$\begin{cases} B_\mathbf{m}^{\cdot} = -imv_\mathbf{m} B_\mathbf{m} + v_\mathbf{n}' C_\mathbf{m} \\ C_\mathbf{m}^{\cdot} = -imv_\mathbf{m} C_\mathbf{m} \end{cases} \tag{3.1}$$

где $\mathbf{v} = \mathbf{v}_\mathbf{m}\mathbf{e}_\mathbf{m} + \mathbf{v}_\mathbf{n}\mathbf{e}_\mathbf{n}$ — поле скоростей стационарного течения (при $\mathbf{m} = 0$ добавляется уравнение $A_0^{\cdot} = v_0' C_0$); штрих означает производную по z, точка — по t.

Формула (3.1) снова указывает на неэкспоненциальную неустойчивость уравнения (1.3). Кроме того, она содержит описание спектра уравнения (1.3): каждому волновому вектору $\mathbf{m}$ отвечает отрезок непрерывного спектра на мнимой оси. Соответствующие «частоты» $mv_\mathbf{m}$ равны всевозможным значениям частот $(\mathbf{m}, \mathbf{v})$ стационарного течения на разных торах, отвечающих разным значениям координаты z. Кратность каждого отрезка по меньшей мере равна двум (B-компонента и C-компонента имеют одинаковые частоты).

4. Теорема Сквайра для течений с широм. Введенные выше координаты удобны для исследования укороченного уравнения (1.3), однако оператор rot^{-1} в криволинейных координатах имеет сложный вид, поэтому исследовать полное уравнение (1.2) в общем случае трудно.

Существует частный случай, когда это исследование можно свести к одномерной задаче — случай течений с прямолинейными линиями тока. К этому классу течений относятся все плоские прямолинейные течения, а также более общие течения, в которых жидкость течет по параллельным плоскостям со скоростью, постоянной на каждой плоскости, но меняющейся не только по величине, но и по направлению при переходе от одной плоскости к другой. Изучение этого класса течений можно рассматривать как приближенное исследование общего течения торической геометрии, при котором пренебрегается кривизной тора, но учитывается шир (изменение направления линий тока от тора к тору).

Итак, пусть φ_1, φ_2 и z — декартовы координаты: $dl^2 = d\varphi_1^2 + d\varphi_2^2 + dz^2$. В этом случае естественно рассматривать периодические течения с периодами, не обязательно равными 2π (например можно считать период по φ_1 равным $2\pi X_1$, а по φ_2 равным $2\pi X_2$). В формулы п. 3 при этом придется внести лишь то изменение, что волновой вектор $\mathbf{m}$ будет пробегать не решетку целых точек, а решетку $\{(m_1 / X_1,\ m_2 / X_2)\}$.

В сделанных предположениях разложение поля вихря $\mathbf{r}$ по ортам $\mathbf{e}_\mathrm{m}$, $\mathbf{e}_\mathrm{n}$, $\mathbf{e}_z$ имеет вид $\mathbf{r} = -\mathbf{v}_\mathrm{n}'\mathbf{e}_\mathrm{m} + \mathbf{v}_\mathrm{m}'\mathbf{e}_\mathrm{n}$.

Далее, оператор rot в координатах B_m, C_m и оператор скобки Пуассона с $\mathbf{r}$ имеют соответственно матрицы

$$im\begin{pmatrix} 0 & -E+m^{-2}D^2 \\ E & 0 \end{pmatrix}, \quad -\begin{pmatrix} imv_\mathrm{n}' & v_\mathrm{m}'' \\ 0 & imv_\mathrm{n}' \end{pmatrix}$$

где E — тождественное преобразование. Поэтому в наших координатах линеаризованное уравнение Эйлера (1.2) распадается на набор систем уравнений, соответствующих разным $\mathbf{m}$. После вычислений получаем для $\mathbf{m} \neq 0$ треугольную систему

$$\begin{aligned} B_\mathrm{m}^{\cdot} &= \left[imv_\mathrm{m} + \frac{v_\mathrm{m}''}{im}(E-m^{-2}D^2)^{-1}\right]B_\mathrm{m} \\ C_\mathrm{m}^{\cdot} &= imv_\mathrm{m}C_\mathrm{m} + v_\mathrm{n}'(E-m^{-2}D^2)^{-1}B_\mathrm{m} \end{aligned} \tag{4.1}$$

При $\mathbf{m} = 0$ получаем систему $A_0^{\cdot} = B_0^{\cdot} = C_0^{\cdot} = 0$.

Первое уравнение отщепляется, и если в B-компоненте нет экспоненциальной неустойчивости, то ее нет и в C-компоненте (это видно из получающегося для C_m линейного неоднородного уравнения).

Заметим теперь, что в уравнение для B_m входит только продольная составляющая скорости — v_m. Поэтому уравнение для B_m совпадает с уравнением, получающимся при исследовании двумерного параллельного течения идеальной жидкости, профиль скоростей которого — составляющая $v_\mathrm{m}(z)$ вектора скорости трехмерного течения в направлении волнового вектора $\mathbf{m}$.

Итак, прямолинейное трехмерное течение экспоненциально неустойчиво тогда и только тогда, когда экспоненциально неустойчиво хотя бы одно из течений двумерной идеальной жидкости, получающихся при замене вектора скорости $\mathbf{v}$ его продольной составляющей v_m.

Тем самым задача об экспоненциальной неустойчивости рассматриваемого класса трехмерных течений идеальной жидкости сведена к такой же задаче для серии двумерных течений, соответствующих разным значениям волнового вектора.

В частном случае течений без шира (направление $\mathbf{v}$ постоянно) все получающиеся профили скоростей пропорциональны друг другу и полученный вывод совпадает с теоремой Сквайра [4] для идеальной жидкости.

Жорданова структура системы (4.1) указывает, видимо, на то, что в трехмерных течениях, в отличие от двумерных, даже в отсутствие экспоненциальной неустойчивости правилом является линейный рост возмущений вихря со временем.

5. Стационарное течение с экспоненциальным растяжением частиц. Областью течения будет трехмерное компактное многообразие M, которое строится следующим образом [1].

[1] Рассматриваемое многообразие стало играть существенную роль в современной качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений после работ Смейла, которому указал на этот пример Том.

Рассмотрим вначале обычное трехмерное пространство с координатами x, y, z. Определим следующие три диффеоморфизма этого пространства:

$$T_1(x, y, z) = (x + 1, y, z), \quad T_2(x, y, z) = (x, y + 1, z),$$
$$T_3(x, y, z) = (2x + y, x + y, z + 1)$$

Каждый из них переводит в себя решетку точек с целыми координатами x, y, z. Отождествим между собой все точки (x, y, z)-пространства, которые можно получить друг из друга последовательным применением T_i и T_i^{-1} (в любом порядке). В результате возникает компактное аналитическое многообразие M, которое можно себе представлять также как произведение двумерного тора $\{(x, y) \bmod 1\}$ на отрезок $0 \leqslant z \leqslant 1$, торцевые торы которого отождествлены по формуле $(x, y, 0) \equiv (2x + y, x + y, 1)$.

Введем теперь на полученном многообразии риманову метрику. С этой целью построим на (x, y, z)-пространстве риманову метрику, инвариантную относительно всех T_i.

Рассмотрим линейное преобразование плоскости (x, y)

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y \\ x + y \end{pmatrix}, \qquad (A) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Преобразование A имеет собственные числа $\lambda_{1,2} = (3 \pm \sqrt{5}) / 2$. Заметим, что $\lambda_1 > 1 > \lambda_2 > 0$, $\lambda_1\lambda_2 = 1$ и что собственные направления взаимно ортогональны. Пусть (p, q) — декартова система координат на плоскости (x, y), причем ось p направлена по собственному вектору с собственным числом $\lambda_1 > 1$, а ось q — по собственному вектору с собственным числом $\lambda_2 < 1$.

Положим.

$$ds^2 = e^{-2\mu z} dp^2 + e^{2\mu z} dq^2 + dz^2 \quad (\mu = \ln \lambda_1) \tag{5.1}$$

Метрика ds^2 инвариантна относительно преобразований T_i и поэтому определяет на введенном трехмерном компактном многообразии M аналитическую риманову структуру.

Рассмотрим теперь векторное поле $\partial / \partial z$ в (x, y, z)-пространстве. Это поле инвариантно относительно преобразований T_i и, следовательно, определяет векторное поле v на многообразии M. Поле v на римановом многообразии M — гармоническое: $\operatorname{div} \mathrm{v} = 0$, $\operatorname{rot} \mathrm{v} = 0$. Следовательно, v может служить полем скоростей стационарного потенциального течения идеальной жидкости. При движении в этом поле каждая частица жидкости экспоненциально растягивается в q-направлении и экспоненциально сжимается в p-направлении, как следует из формулы (5.1).

6. Исследование линеаризованного уравнения Эйлера. Рассматриваемое течение потенциально, поэтому линеаризованное уравнение Эйлера (1.2) совпадает с укороченным уравнением (1.3). Ввиду простой геометрии течения последнее уравнение решается по формуле (1.5). Чтобы записать ответ, удобно ввести следующие обозначения. Рассмотрим векторные поля в (p, q, z)-пространстве

$$\mathbf{e}_p = e^{\mu z}\frac{\partial}{\partial p}, \qquad \mathbf{e}_q = e^{-\mu z}\frac{\partial}{\partial q}, \qquad \mathbf{e}_z = \frac{\partial}{\partial z}$$

Эти поля инвариантны относительно всех преобразований T_i и поэтому могут рассматриваться как векторные поля на многообразии M. Направления полей $\mathbf{e}_p$, $\mathbf{e}_q$, $\mathbf{e}_z$ инвариантны относительно фазового потока g^t поля $\mathbf{e}_z$ (в координатной записи $g^t(p, q, z) = (p, q, z + t)$). Сами поля под действием потока преобразуются по формулам

$$g_*{}^t\mathbf{e}_p = e^{-\mu t}\mathbf{e}_p, \qquad g_*{}^t\mathbf{e}_q = e^{\mu t}\mathbf{e}_q, \qquad g_*{}^t\mathbf{e}_z = \mathbf{e}_z$$

В соответствии с этим направление поля $\mathbf{e}_q$ называют растягивающимся, поля $\mathbf{e}_p$ — сжимающимся, а поля $\mathbf{e}_z$ — нейтральным.

Всякое векторное поле $\mathbf{w}$ на M можно разложить по этим направлениям

$$\mathbf{w} = w_p\mathbf{e}_p + w_q\mathbf{e}_q + w_z\mathbf{e}_z$$

где w_p, w_q и w_z — функции на многообразии M.

Во введенных обозначениях формула (1.5) в применении к стационарному течению $\mathbf{v} = \mathbf{e}_z$ записывается в виде

$$s_p(t) = e^{-\mu t}U^t s_p(0), \qquad s_q(t) = e^{\mu t}U^t s_q(0); \qquad s_z(t) = U^t s_z(0) \tag{6.1}$$

где U^t — линейный оператор, действующий на функции на многообразии M по формуле «$(U^t f)(\xi) = f(g^{-t}\xi)$ для любой точки ξ из M». Заметим, что поток g^t сохраняет объем, поэтому оператор U^t унитарен.

Формула (6.1) позволяет получить весьма полные ответы на всевозможные вопросы о нарастании возмущений стационарного течения $\mathbf{v}$. Прежде всего, из нее видно, что q-компонента возмущения вихря со временем экспоненциально растет, а p-компонента экспоненциально затухает.

Далее спектр оператора U^t легко изучить разложением в ряд Фурье по (x, y) при фиксированном z, а для не зависящих от x, y функций — в ряд Фурье по z. Этот спектр имеет счетнократную непрерывную (лебеговскую) компоненту на единичной окружности и еще дискретную серию собственных значений, соответствующую собственным функциям $\varphi_m = e^{2\pi i m z}$ (m — целые). Отсюда вытекает, что линеаризованное вблизи стационарного течения $\mathbf{v} = \mathbf{e}_z$ уравнение Эйлера (1.2) имеет счетную серию неустойчивых собственных чисел $\mu - 2\pi i m$, соответственно счетному набору растущих возмущений вихря $\mathbf{s} = \varphi_m(z)\,\mathbf{e}_q$ ($m = \pm 1, \pm 2, \ldots$).

Из формулы (6.1) следует также плохая предсказуемость решений линеаризованного уравнения Эйлера (1.2) для течений с экспоненциальным растяжением частиц: для приближенного нахождения решения через время t требуется очень точно знать быстро растущее с t число гармоник высокого порядка в начальном возмущении $s(0)$. Сравнение формул (6.1) и (2.1) показывает, что экспоненциальное растяжение частиц резко ухудшает предсказуемость нарастания возмущений по сравнению с обычными течениями с линейным растяжением частиц, рассматривавшимися в п. 2—4.

Явления, подобные обнаруженным в рассмотренном примере, должны наблюдаться и для других течений с экспоненциально растягивающимися частицами, а такие течения возможны и в областях обычного трехмерного пространства. Экспериментальные подтверждения тому можно найти в работах [5,6]. Например, машинные эксперименты [5] указывают, по-видимому, на то, что стационарное течение идеальной жидкости, заданное формулами [2]

$$v_x = A\sin z + C\cos y, \qquad v_y = B\sin x + A\cos z, \qquad v_z = C\sin y + B\cos z$$

обладает свойством экспоненциального растяжения частиц.

Автор благодарен Л. Д. Фаддееву и В. И. Юдовичу за полезные обсуждения.

Поступила 31 III 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Фаддеев Л. Д. К теории устойчивости стационарных плоскопараллельных течений идеальной жидкости. Краевые задачи математической физики, т. 5. Зап. научн. семинаров ЛОМИ, т. 21. Л., «Наука», 1971, стр. 164—172.
2. Arnold V. Sur la geometrie differentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications al'hydrodynamique des fluides parfaits. Annales de l'Institut Fourier, 1966, vol. 16, No. 1, p. 347.
3. Grad H. Mathematical problems arising in plasma physics. Actes du congres international des mathematicien 1970. Paris, Guatier — Villars, 1971, t. 3, p. 105—113.
4. Squire H. B. On the stability of the tree-dimensional disturbances of viscous flow between parallel walls. Proc. Roy. Soc. A, 1933, vol. 142, p. 621—628.
5. Henon M. Sur la topologie des lignes de courant dans un cas particulier. Paris, Comptes Rendues Acad. des. Sc., 1966, vol. 262, p. 312—314.
6. Froeschlé C. A numerical study of the stochasticity of dynamical systems with two degrees of freedom. Astronom. and Astrophys., 1970, vol. 9, 3p. 15—2.