

**ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ДО- И СВЕРХЗВУКОВЫЕ ТЕЧЕНИЯ
В СОПЛАХ И КАНАЛАХ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ**

У. Г. П и р у м о в

(Москва)

Исследованы пространственные до- и сверхзвуковые течения газа в соплах и каналах переменного сечения. Дана постановка обратной задачи теории сопла Лавалю, обобщенная на случай пространственных течений, и для решения ее предложена неявная трехточечная разностная схема с переменным шагом на слое. В окрестности поверхности, на которой задаются данные Коши, построено асимптотическое разложение в ряд по функции тока и указан метод решения соответствующих уравнений. Приведены примеры расчетов пространственных течений в соплах.

Из выполненных к настоящему времени работ отметим работы [1-3], в которых трехмерным методом характеристик рассчитаны пространственные сверхзвуковые течения в соплах, и [4], в которой построены аналитические решения в окрестности центра сопла.

1. Основные уравнения и постановка задачи. Введем криволинейную систему координат, связанную с кривой $y = f_0(s)$, расположенной в плоскости xy . Координаты точки в этой системе определяются длиной дуги s , расстоянием r по нормали к этой кривой и углом φ в нормальной плоскости (фиг. 1).

Уравнения газовой динамики в криволинейной системе координат s, r, φ [5] преобразуем к новым независимым переменным ψ и θ таким, что поверхности $\psi = \text{const}$ и $\theta = \text{const}$ — поверхности тока, которые могут быть введены для стационарных пространственных течений [6].

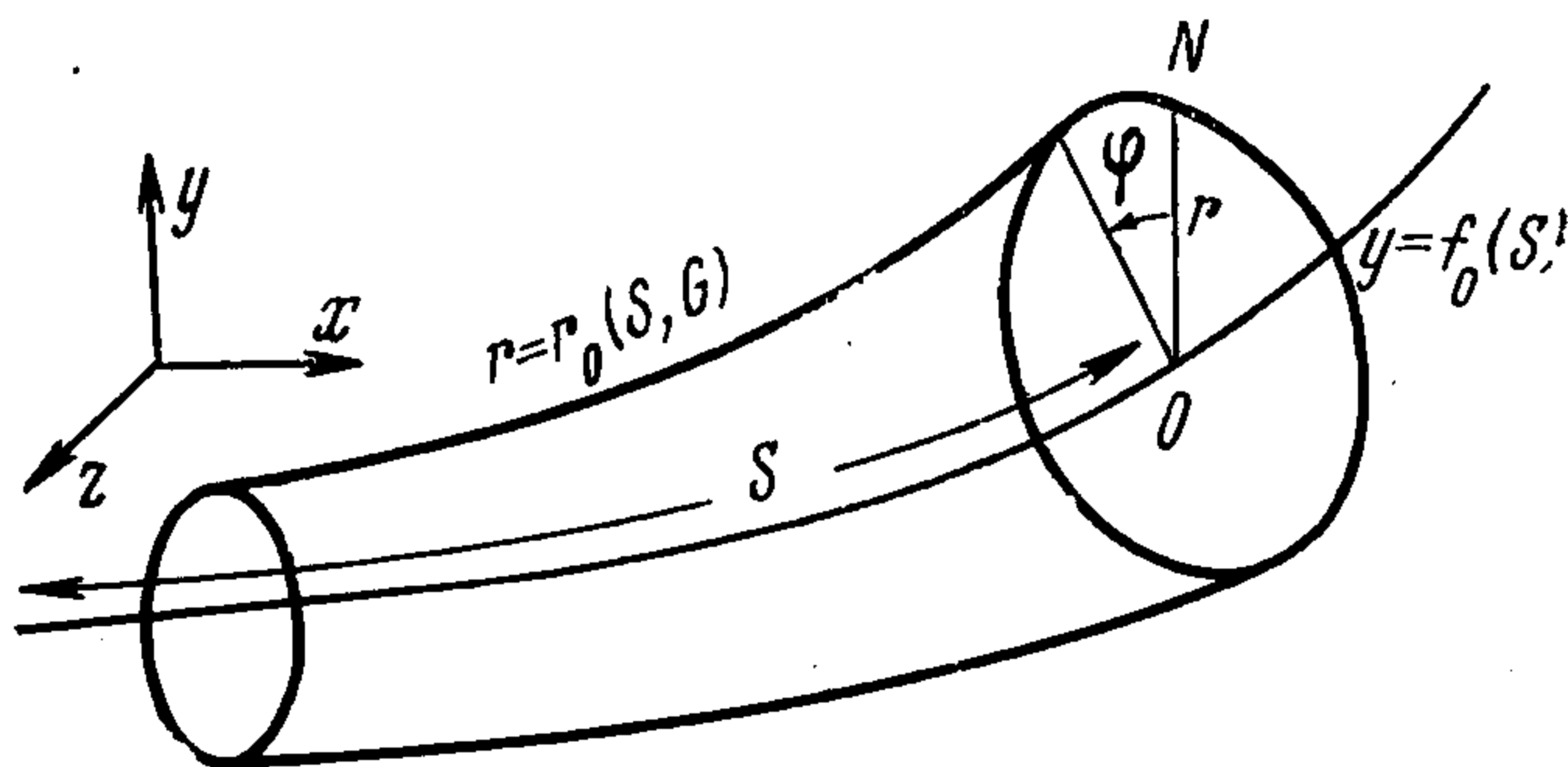
Проведя выкладки по аналогии с работами [7-9], получим следующую систему пяти дифференциальных уравнений в частных производных и двух конечных соотношений для определения семи зависимых переменных u, v, w, p, ρ, r и φ как функций независимых переменных s, ψ и θ :

$$\frac{\partial p}{\partial \psi} = \frac{1}{\partial \varphi / \partial \theta} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial \psi} \frac{\partial p}{\partial \theta} - \gamma \frac{G(s, \theta, \psi)}{ur} \right] = \Pi_1(s, \theta, \psi) \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial r^2}{\partial \psi} = \frac{1}{\partial \varphi / \partial \theta} \left[\frac{2}{\rho u} - \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} \frac{\partial r^2}{\partial \theta} \right] = \Pi_2(s, \theta, \psi) \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial s} = & \pm \frac{u \sin \varphi}{R} - \frac{wv}{ru} \left(1 \mp \frac{r}{R} \cos \varphi \right) + \\ & + \frac{1 \mp r/R \cos \varphi}{ru \partial \varphi / \partial \theta} \left[\frac{1}{\gamma p} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{\partial r}{\partial \theta} G(s, \theta, \psi) \right] = \Pi_3(s, \theta, \psi) \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial r}{\partial s} = \frac{v}{u} \left(1 \mp \frac{r}{R} \cos \varphi \right) \quad (1.4)$$



Фиг. 1

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = \frac{w}{ru} \left(1 \mp \frac{r}{R} \cos \varphi \right) = \Pi_4(s, \theta, \psi) \quad (1.5)$$

$$p = \rho^\gamma \quad (1.6)$$

$$u = \left(\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} - 2 \frac{p^{\gamma-1/\gamma}}{\gamma - 1} - v^2 - w^2 \right)^{1/2} \quad (1.7)$$

$$G(s, \theta, \psi) = \frac{u}{1 \mp r/R \cos \varphi} \frac{\partial v}{\partial s} \mp \frac{u^2 \cos \varphi}{R(1 \mp r/R \cos \varphi)} - \frac{w^2}{r}$$

Здесь γ — показатель адиабаты, u, v, w — проекции вектора скорости на оси криволинейной системы координат s, r и φ , отнесенные к a_* — критической скорости звука; p, ρ — давление и плотность, отнесенные к давлению p_* и плотности ρ_* в критическом сечении; параметры с размерностью длины отнесены к некоторой характерной длине r_* , а функция тока — к $\rho_* a_* r_*^2$; $R(s)$ — радиус кривизны кривой $f_0(s)$.

При $w \equiv 0$ и $R = \infty$ система (1.1) — (1.7) переходит в систему уравнений, использованную в [8] при численном решении обратной задачи теории сопла Лавалья для плоского и осесимметричного случаев.

Существенным для дальнейшего является тот факт, что уравнение (1.3) не содержит производных по ψ .

Обратную задачу теории сопла для системы (1.1) — (1.7) для общего случая пространственного течения можно сформулировать следующим образом. Пусть на поверхности $r = r_0(s, \theta)$ (фиг. 1) задано распределение компоненты скорости $u = u_0(s, \theta)$, а на плоскости $s = s_0$ — распределение компоненты скорости $w = w_0(\theta, \psi)$ и координаты $\varphi = \varphi_0(\theta, \psi)$. Требуется определить семейство поверхностей тока и параметры течения в окрестности начальной поверхности тока.

Принципиальное отличие от соответствующей задачи в осесимметричном и плоском случаях состоит в том, что задание начальных данных только на поверхности тока не позволяет уже разрешить задачу Коши, поскольку поверхность тока является характеристической поверхностью, а двух дополнительных уравнений и трех уравнений совместности [10] недостаточно для определения параметров течения на следующем слое (следующей поверхности тока), так как в этом слое приходится решать систему уравнений в частных производных (1.3), (1.5), начальные условия для которой не заданы.

Поэтому начальные условия формулируются не только на поверхности тока, но и на некоторой поверхности, не совпадающей с поверхностью тока. Такая постановка обратной задачи позволяет получить единственное решение и в некотором смысле эквивалентна постановке обратной задачи для вихревого плоского или осесимметричного течений. И в этих случаях некоторые данные (распределение энтропии) нужно задавать на начальной плоскости. Важно отметить, что задание на поверхности тока всех компонент скорости лишь переопределяет задачу.

Обратная задача расщепляется на две задачи Коши. Для уравнений (1.1), (1.2) задача Коши решается в направлении ψ , а для уравнений (1.3), (1.5) — в направлении s .

2. Разложение в ряд по функции тока. Построим решение системы (1.1) — (1.7) в окрестности начальной поверхности $\psi = 0$ в виде рядов по функции тока. Представим параметры $u, v, w, p, \rho, \varphi$ и r в виде [8]

$$f(s, \psi, \theta) = \sum_{n=0}^N f_n(s, \theta) \psi^n + \sqrt{\psi} \sum_{n=0}^N f_n^0(s, \theta) \psi^n \quad (2.1)$$

где $f(s, \psi, \theta)$ — любая из перечисленных выше функций. Если соотношения (2.1) подставить в систему (1.1) — (1.7) и приравнять коэффициенты при одинаковых степенях ψ , то получим также систему уравнений в частных производных, но уже с двумя независимыми переменными s, θ для определения функций $f_n(s, \theta)$ и $f_n^\circ(s, \theta)$.

1°. *Построение решения для случая $r_0(s, \theta) \neq 0$.* Для определения функций $f_0(s, \theta)$ имеем систему (1.1) — (1.7), в которой всем зависимым переменным должен быть приписан нижний индекс нуль. На плоскости $s = s_0$ заданы все искомые функции, в том числе w_0 и φ_0 , поэтому систему (1.3), (1.5) можно проинтегрировать численно по s вдоль нескольких плоскостей $\theta = \text{const}$ и определить на всей начальной поверхности $\psi = \text{const}$ функции $w_0(s, \theta)$ и $\varphi_0(s, \theta)$, а затем из соотношений (1.4), (1.6) и (1.7) функции p_0, ρ_0 и ν_0 .

Отметим, что в осесимметричном течении без закрутки ($w = 0, R = \infty$) задача существенно упрощается, поскольку отпадает необходимость в численном интегрировании системы (1.3), (1.5), и функции ν_0, p_0, ρ_0 сразу определяются из (1.4), (1.6), (1.7). Существенно также и то, что при $u = u_0(s), r = r_0(s)$ и $R(s) \neq \infty$, даже если в начальном сечении $s = s_0$ функции w_0 и φ_0 равны нулю, при остальных значениях s они уже отличны от нуля, поскольку при $R \neq \infty$ система (1.3), (1.5) неоднородна. Это означает, что искривление оси сопла всегда приводит к возникновению окружной составляющей скорости.

Путем простых, но громоздких выкладок можно показать, что система уравнений для определения функций $f_0^\circ(s, \theta)$ однородна относительно этих функций, а задание в начальной плоскости $w_0^\circ(s_0, \theta)$ и $\varphi_0^\circ(s_0, \theta)$ определяет в этой плоскости все остальные функции $f_0^\circ(s_0, \theta)$. Очевидно, что при $w_0^\circ(s_0, \theta) = \varphi_0^\circ(s_0, \theta) \equiv 0$ в силу однородности соответствующей системы, все функции $f_0^\circ(s_0, \theta) \equiv 0$. Задание при $s = s_0$ условия $w_0^\circ(s_0, \theta) = \varphi_0^\circ(s_0, \theta) \equiv 0$ физически оправдано, поскольку трудно представить течения, имеющие бесконечные производные $\partial w / \partial \psi$ и $\partial \varphi / \partial \psi$ в начальной плоскости в областях, удаленных от оси симметрии.

Рассмотрим далее метод определения функций $f_1(s, \theta)$

В осесимметричном течении без закрутки соответствующие линейные уравнения переходят в уравнения, аналогичные приведенным в работе [8]. При этом для определения функций f_1 необходимо лишь дифференцировать известные функции $u_0(s)$ и $r_0(s)$. В пространственном же течении по-прежнему необходимо решить задачу Коши по s и численно интегрировать систему уравнений для определения функций w_1 и φ_1 . Действительно, нетрудно показать, что любая из искомым функций может быть представлена в виде

$$f_1(s, \theta) = \alpha_0(s, \theta) + \alpha_1(s, \theta) w_1 + \alpha_2(s, \theta) \varphi_1$$

где $\alpha_i(s, \theta)$ — функции известных параметров $f_0(s, \theta)$ и их производных по s и θ . Тогда соответствующая система линейных уравнений образует систему Коши при условии, что на начальной плоскости $s = s_0$ задано $w_1(s_0, \theta)$ и $\varphi_1(s_0, \theta)$. Таким образом, при $r_0(s, \theta) \neq 0$ показана коррект-

ность предложенной постановки обратной задачи для пространственного случая.

2°. Построение решения для случая $r_0(s, \theta) \equiv 0$. Для определения функций $f_0(s, \theta)$, $f_1(s, \theta)$ и $f_0^\circ(s, \theta)$ имеем следующую систему уравнений:

$$v_0^\circ = u_0 \frac{\partial r_0^\circ}{\partial s}, \quad \frac{\partial \varphi_0}{\partial s} = \frac{w_0^\circ}{r_0^\circ u_0}, \quad r_0^\circ = \frac{2}{\rho_0 u_0 \partial \varphi_0 / \partial \theta} \quad (2.2)$$

$$p_0^\circ = \mp \gamma \frac{\rho_0 u_0^2 r_0^2 \cos \varphi_0}{R}, \quad p_1 = - \frac{2}{r_0^\circ u_0 \partial \varphi_0 / \partial \theta} \times \\ \times \left\{ \frac{\gamma}{2} \left[u_0 \frac{\partial v_0^\circ}{\partial s} \mp u_0^2 L_0^\circ R^{-1} + 2u_0 u_0^\circ \cos \varphi_0 R^{-1} - (w_0^\circ)^{-2} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times (r_0^\circ)^{-1} \right] + r_0^\circ u_0 \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial \theta} \right)^{-1} \left(p_0^\circ \frac{\partial \varphi_1^\circ}{\partial \theta} - \varphi_0^\circ \frac{\partial p_0^\circ}{\partial \theta} \right) + \right. \\ \left. + p_0^\circ (r_0^\circ u_0^\circ + u_0 r_1) \pm L_0^\circ r_0^\circ u_0 p_0^\circ R^{-1} \right\} \quad (2.3)$$

$$r_1 = - \frac{1}{3 \partial \varphi_0 / \partial \theta r_0^\circ} \left[\left(\frac{\rho_0^\circ}{\rho_0} + \frac{u_0^\circ}{u_0} \right) + (r_0^\circ)^2 \frac{\partial \varphi_0^\circ}{\partial \theta} - \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi_0^\circ}{\partial \theta} \frac{\partial (r_0^\circ)^2}{\partial \theta} \right] \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial w_0^\circ}{\partial s} = \pm \left(\frac{u_0 L_{01}^\circ}{R} + \frac{2u_0^\circ \sin \varphi_0}{R} \right) - \frac{w_0^\circ v_0^\circ}{u_0 r_0^\circ} - \\ - \frac{1}{\gamma} \left\{ \left[\frac{1}{2} p_0^\circ \frac{\partial r_1}{\partial \theta} - \frac{1}{2} r_0^\circ \frac{\partial p_1}{\partial \theta} + p_1 \frac{\partial r_0^\circ}{\partial \theta} - r_1 \frac{\partial p_0^\circ}{\partial \theta} \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left(p_0^\circ \frac{\partial r_0^\circ}{\partial \theta} - r_0^\circ \frac{\partial p_0^\circ}{\partial \theta} \right) \left(\frac{u_0^\circ}{u_0} \mp \frac{L_0^\circ}{R} \right) \right\} \quad (2.5)$$

$$\frac{\rho_0^\circ}{\rho_0} = \frac{1}{\gamma} \frac{p_0^\circ}{p_0}, \quad u_0^\circ = - \frac{p_0^\circ}{\gamma \rho_0 u_0}, \quad L_0^\circ = r_0^\circ \cos \varphi_0$$

$$L_{01}^\circ = - \cos \varphi_0 \varphi_0^\circ$$

Отметим, что из (2.2) следует $w_0^\circ = v_0 \equiv 0$ при $r_0^\circ \equiv 0$.

В осесимметричном случае конечные формулы для f_0° , f_0 и f_1 , f_1° выписаны в [8].

Рассмотрим первоначально случай $R = \infty$. Тогда из (2.2) и (2.5) имеем $p_0^\circ = \rho_0^\circ = u_0^\circ \equiv 0$. Можно показать путем простых, но громоздких выкладок, что при $R = \infty$ система уравнений для определения функций φ_0° , r_1 , v_1 , w_1 однородна, и при $\varphi_0^\circ(s_0, \theta) = w_1(s_0, \theta) \equiv 0$ дает по аналогии с осесимметричным течением без закрутки единственное решение

$$\varphi_0^\circ(s, \theta) = w_1(s, \theta) = v_1(s, \theta) = r_1(s, \theta) \equiv 0$$

Весьма нетривиальным оказывается построение решения для функций v_0° , r_0° , p_1 , φ_0 и w_0° . Для определения их имеем уравнения (2.2) — (2.5). Оказывается, что уравнение (2.5) можно привести к виду

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left(\frac{\partial w_0^\circ}{\partial s} \right) + \Phi_0(s, \theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial w_0^\circ}{\partial s} \right) + \Phi_1(s, \theta) \frac{\partial w_0^\circ}{\partial s} + \Phi_2(s, \theta) = 0 \quad (2.6)$$

где $\Phi_i(s, \theta)$ — известные функции, которые могут быть вычислены на плоскости $s = \text{const}$, если известны w_0° , φ_0 и задана функция $u_0(s)$. Для нахождения производной $\partial w_0^\circ / \partial s$ на любой плоскости $s = \text{const}$ нужно численно решать краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения (2.6). При этом в силу периодичности функции $w_0^\circ(\theta)$ равенство нулю на плоскостях симметрии есть краевые условия для $\partial w_0^\circ / \partial s$. Для дальнейшего существенно, что при решении асимптотических уравнений

окрестности начальной поверхности определяются не только искомые функции, но и производная $\partial\varphi / \partial\psi$.

В общем случае решение выведенных в 1° и 2° нелинейных уравнений в частных производных можно получить лишь путем численного интегрирования. Однако иногда удается получить решение в замкнутом виде.

Построим методом малых возмущений приближенное решение системы (2.2) — (2.5) при $R = \infty$. Представим функции φ_0 , r_0° , v_0° , w_0° , p_1 в виде

$$\begin{aligned}\varphi_0 &= \theta + \varepsilon\varphi_{01}(s, \theta) + \varepsilon^2\varphi_{02}(s, \theta) + \dots \\ r_0^\circ &= r_{00}^\circ(s) + \varepsilon r_{01}^\circ(s, \theta) + \varepsilon^2 r_{02}^\circ(s, \theta) + \dots \\ w_0^\circ &= \varepsilon w_{01}^\circ(s, \theta) + \varepsilon^2 w_{02}^\circ(s, \theta) + \dots \\ v_0^\circ &= v_{00}^\circ(s) + \varepsilon v_{01}^\circ(s, \theta) + \varepsilon^2 v_{02}^\circ(s, \theta) + \dots \\ p_1 &= p_{10}(s) + \varepsilon p_{11}(s, \theta) + \varepsilon^2 p_{12}(s, \theta) + \dots\end{aligned}\quad (2.7)$$

где ε — некоторый малый параметр. Такая запись искомых функций основана на физически оправданном предположении о малом отличии параметров течения в начальной плоскости от параметров осесимметричного течения, имеющего на оси то же распределение скорости $u_0(s)$, что и в пространственном течении. Подставив соотношения (2.7) в систему (2.2) — (2.5) и линеаризовав ее, можно получить следующие уравнения:

$$\begin{aligned}r_{00}^\circ(s) &= (2/\rho_0 u_0)^{1/2}, & v_{00}^\circ(s) &= u_0 dr_{00}^\circ(s)/ds \\ p_{10}(s) &= -\frac{\gamma}{r_{00}^\circ(s)} \frac{dv_{00}^\circ}{ds}\end{aligned}\quad (2.8)$$

$$\begin{aligned}r_{00}^\circ \frac{\partial\varphi_{01}}{\partial\theta} &= -2r_{01}^\circ, & v_{01} &= u_0 \frac{\partial r_{01}^\circ}{\partial s}, & u_0 r_{00}^\circ \frac{\partial\varphi_{01}}{\partial s} &= w_{01}^\circ \\ \frac{\partial}{\partial s} (r_{00}^\circ w_{01}^\circ) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial r_{01}^\circ}{\partial\theta} \frac{dv_{00}^\circ}{ds} - r_{00}^\circ \frac{\partial^2 v_{01}}{\partial s \partial\theta} \right)\end{aligned}\quad (2.9)$$

Аналогичным образом можно получить систему уравнений для определения коэффициентов при ε^2 . Очевидно, что формулы (2.8) совпадают с соответствующими формулами для осесимметричного случая без закрутки (см. (2.2) работы [8]) и позволяют определить функции $r_{00}^\circ(s)$, $v_{00}^\circ(s)$ и $p_{10}(s)$ по конечным соотношениям или путем дифференцирования по s известных функций.

Важным свойством системы уравнений в частных производных (2.9) является линейность, что позволяет применить для решения метод разделения переменных Фурье. В результате получим с точностью до членов порядка ε^2 следующее приближенное решение системы (2.2) — (2.5):

$$\begin{aligned}r_0^\circ(s, \theta) &= r_{00}^\circ(s) \left\{ 1 - \varepsilon r_{00}^\circ(s_0) \sum_{k=0}^K \frac{k}{2} \left[\frac{w_{01k}^\circ(s_0)}{2} \int_{s_0}^s \rho_0 ds + \frac{\varphi_{01k}^\circ(s_0)}{r_{00}^\circ(s_0)} \right] \cos k\theta \right\} \\ \varphi_0(s, \theta) &= \theta + \varepsilon \sum_{k=0}^K \left[\frac{r_{00}^\circ(s_0) w_{01k}^\circ(s_0)}{2} \int_{s_0}^s \rho_0 ds + \varphi_{01k}^\circ(s_0) \right] \sin k\theta \\ p_1(s, \theta) &= p_{10} \left\{ 1 - \varepsilon r_{00}^\circ(s_0) \sum_{k=0}^K k \left[\frac{w_{01k}^\circ(s_0)}{2} \int_{s_0}^s \rho_0 ds + \frac{\varphi_{01k}^\circ(s_0)}{r_{00}^\circ(s_0)} \right] \cos k\theta \right\}\end{aligned}$$

$$v_0^\circ(s, \theta) = v_{00}^\circ(s) - \varepsilon \frac{r_{00}^\circ(s_0)}{2} \sum_{k=0}^K k \left\{ v_{00}^\circ(s) \left[\frac{w_{10k}^\circ(s_0)}{2} \int_{s_0}^s \rho_0 ds + \frac{\Phi_{01k}(s_0)}{r_{00}^\circ(s_0)} \right] + \frac{w_{01k}^\circ(s_0)}{r_{00}^\circ(s_0)} \right\} \cos k\theta \quad (2.10)$$

$$w_0^\circ(s, \theta) = \varepsilon r_{00}^\circ(s_0) [r_{00}^\circ(s)]^{-1} \sum_{k=0}^K w_{01k}^\circ(s_0) \sin k\theta$$

где $w_{01k}^\circ(s_0)$ и $\Phi_{01k}(s_0)$ — коэффициенты Фурье в разложениях начальных функций $w_0^\circ(s_0, \theta)$ и $\varphi_0(s_0, \theta)$ по $\sin k\theta$.

Из соотношений (2.10) следует, что изменение формы поперечного сечения можно достичь, варьируя начальные данные при $s = s_0$, т. е. величины $w_{01k}^\circ(s_0)$ и $\Phi_{01k}(s_0)$. Из формул (2.10) следует, что если при $s = s_0$ положить $\Phi_{01k}(s_0) = 0$, то в этой плоскости поперечное сечение сопла имеет форму окружности, однако при увеличении s уже не будет обладать осевой симметрией, а приобретет форму, определяемую начальным значением $w_{01k}^\circ(s_0)$. В то же время $\partial r_0^\circ / \partial s|_{s=s_0}$ является функцией θ в отличие от осесимметричного случая. Очевидно, что если при этом все $w_{01k}^\circ(s_0) \equiv 0$, кроме $w_{012}^\circ(s_0)$, то пространственное течение будет обладать двумя плоскостями симметрии, а при $w_{011}^\circ(s_0) \neq 0$ — одной плоскостью симметрии. Очевидно, что формулы (2.10) пригодны для расчета как дозвуковых, так и трансзвуковых смешанных течений. Для случая $r_0 \equiv 0$ при $R \neq \infty$ можно построить аналогичное решение, при этом в качестве ε можно выбрать $1/R$. Можно показать, что в этом случае с точностью до величин $\sim \varepsilon^2$ в поперечных сечениях сопло сохраняет форму окружности, если в начальном сечении оно имело форму окружности, однако ось сопла при этом криволинейна в соответствии с законом изменения $R = R(s)$.

3. Разностная схема решения обратной задачи теории сопла Лавала и примеры расчета сопел с некруглой формой поперечного сечения. Разностная схема для численного решения обратной задачи при пространственном течении строится по аналогии с осесимметричным случаем [8]. Предложенная в [8] второго порядка точности неявная трехточечная схема с переменным шагом на слоях $\psi = \text{const}$ обеспечивает устойчивое решение как в дозвуковой области, в которой для эллиптических уравнений задача Коши в общем случае некорректна, так и в транс- и сверхзвуковой областях. Ниже дано лишь обобщение схемы на случай пространственных течений без специальных обоснований, которые можно найти в работе [8].

Будем приписывать слоям $\psi = \text{const}$, $\theta = \text{const}$, $s = \text{const}$ индексы n, j, l соответственно. Пусть на слое $\psi_n = \text{const}$ на L -плоскостях $s = \text{const}$ и J -плоскостях $\theta = \text{const}$ известны все параметры, а именно: значения $u, v, w, p, \rho, r, \varphi$ и $\partial\varphi/\partial\psi$. В общем случае плоскости $s = \text{const}$ так же, как и плоскости $\theta = \text{const}$, неравно отстоят друг от друга. Расчет параметров на слое $\psi_{n+1} = \text{const}$ производится итерационным методом в направлениях ψ и s следующим образом. В каждой итерации первоначально во всех LJ -точках последовательно определяются величины $r_{jl}^{(v)}$, $p_{jl}^{(v)}$ и $v_{jl}^{(v)}$ по формулам

$$p_{jl}^{(v)} = p_{jln} + \frac{\Delta\psi}{2} [\Pi_{1jln} + \Pi_{1jl}^{(v-1)}] \quad (3.1)$$

$$r_{jl}^{(v)} = \left\{ r_{jln}^2 + \frac{\Delta\psi}{2} [\Pi_{2jln} + \Pi_{2jl}^{(v-1)}] \right\}^{1/2} \quad (3.2)$$

$$v_{jl}^{(\nu)}(n+1) = \left(\frac{\partial r}{\partial s} \right)_{jl}^{(\nu)}(n+1) \left\{ \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} - \frac{2 [p_{jl}(n+1)]^{\gamma-1/\gamma}}{\gamma - 1} - \right. \\ \left. - [w_{jl}^{(\nu-1)}(n+1)]^2 \right\}^{1/2} \left\{ \left[\left(\frac{\partial r}{\partial s} \right)_{jl}^{(\nu)}(n+1) \right]^2 + \left[\left(1 \mp \frac{r}{R} \cos \varphi \right)_{jl}^{(\nu-1)}(n+1) \right]^2 \right\}^{-1/2} \quad (3.3)$$

Здесь ν — номер итерации, а $\Delta\psi$ — шаг разностной схемы в направлении ψ . В первой итерации ($\nu = 1$) функции с верхним индексом ($\nu - 1$) полагаются равными соответствующим функциям на n -м слое, а во всех последующих итерациях используются параметры, вычисленные в предыдущей итерации.

Далее, используя известные на $(n+1)$ -м слое значения $p_{jl}^{(\nu)}(n+1)$, $r_{jl}^{(\nu)}(n+1)$, $v_{jl}^{(\nu)}(n+1)$, от плоскости $s = s_0$ вдоль всех J -плоскостей $\theta = \text{const}$ (кроме плоскостей симметрии) производится в направлении s интегрирование системы уравнений (1.3) и (1.5), правые части которых зависят теперь лишь от неизвестных функций w , φ . В каждой из плоскостей $\theta = \text{const}$ на $(n+1)$ -м слое ψ_{n+1} значения $w_{j(l+1)}^{(\nu i)}(n+1)$ и $\varphi_{j(l+1)}^{(\nu i)}(n+1)$ на плоскости $s_{(l+1)}$ определяются по формулам

$$w_{j(l+1)}^{(\nu i)}(n+1) = w_{jl}^{(\nu)}(n+1) + \frac{\Delta s}{2} \{ \Pi_{3jl}^{(\nu)}(n+1) + \Pi_{3j}^{[\nu(i-1)]}(n+1) \} \quad (3.4)$$

$$\varphi_{j(l+1)}^{(\nu i)}(n+1) = \varphi_{jl}^{(\nu)}(n+1) + \frac{\Delta s}{2} \{ \Pi_{4jl}^{(\nu)}(n+1) + \Pi_{4j}^{[\nu(i-1)]}(n+1) \} \quad (3.5)$$

Здесь i — номер итерации, Δs — шаг разностной схемы в направлении s . В первой итерации ($i = 1$) функции с верхним индексом $[\nu(i-1)]$ полагаются равными соответствующим функциям на предыдущей плоскости s_l , а во всех последующих итерациях используются параметры, вычисленные в предыдущей итерации.

Интегрирование системы (1.3), (1.5) в направлении s производится от начальной плоскости $s = s_0$, на которой заданы функции w (ψ , θ) и φ (ψ , θ), до некоторой конечной плоскости $s = s_k$. После определения в ν -й итерации функций p , r , w , v и φ по формулам (1.6) и (1.7) находятся u и ρ и если отличие значений всех искомым функций в ν -й итерации от соответствующих функций в $(\nu - 1)$ -й итерации выходит за требуемую точность, то проводится $(\nu + 1)$ -я итерация. В $(\nu + 1)$ -й итерации вновь по формулам (3.1), (3.3) на $(n+1)$ -м слое рассчитываются функции p , r и v , а затем производится численное интегрирование системы (1.3), (1.5) (формулы (3.4), (3.5)) по s и определяются функции w и φ . Итерационные процессы по ν и i заканчиваются при достижении требуемой точности, после чего начинается расчет нового слоя $\psi = \text{const}$.

Расчет производных $\partial r/\partial s$, $\partial v/\partial s$, $\partial p/\partial \theta$, $\partial r/\partial \theta$ и $\partial \varphi/\partial \theta$ в соответствии с [8] целесообразно проводить по трехточечной схеме с переменным шагом на слоях $\psi = \text{const}$ и $\theta = \text{const}$, что обеспечивает устойчивое решение задачи Коши в эллиптической области. Предлагаемая схема имеет второй порядок точности по всем направлениям.

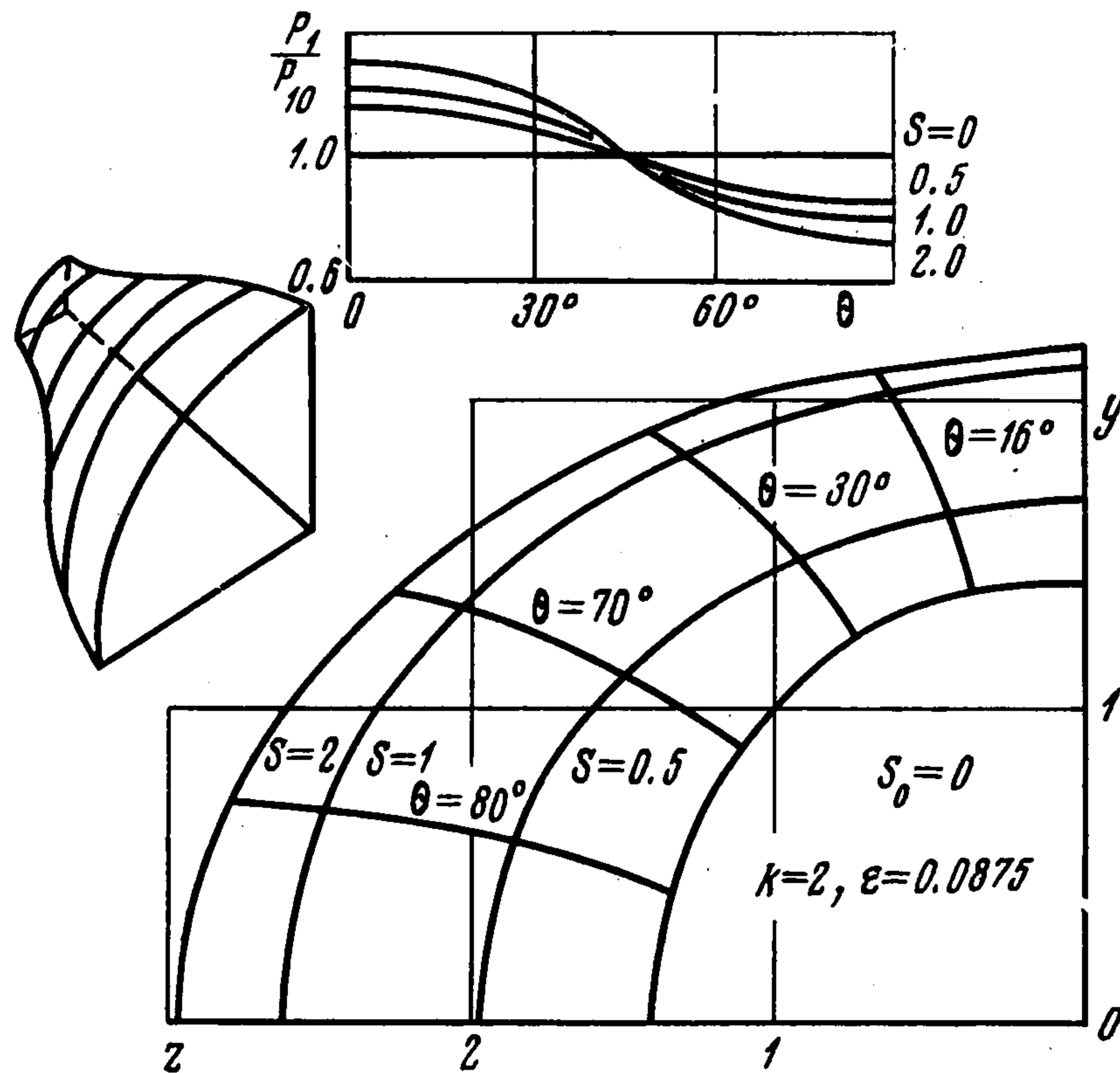
Из рассмотрения системы (1.1)–(1.7) следует возможность расчета важного для практики течения с закруткой, оставаясь при этом в рамках разностной схемы, предложенной в работе [8]. Действительно, примем, что все параметры течения (кроме φ) — функции лишь двух независимых переменных s и ψ ; будем считать также, что $R = \infty$. Тогда на (1.3) нетрудно получить, что

$$w(s, \psi) = \frac{w_0(s, \psi) r_0(s_0, \psi)}{r(s, \psi)} \quad (3.6)$$

где $w_0(s_0, \psi)$ и $r_0(s_0, \psi)$ — значения функций w и r на начальной плоскости. Из уравнения (1.5) следует тогда, что

$$\varphi = \theta + \int_{s_0}^s \frac{w(s, \psi)}{ru} ds \quad (3.7)$$

и, следовательно, $\partial\varphi/\partial\theta = 1$. Тогда уравнения (1.1), (1.2) и (1.4) приобретают точно такую же форму, как и в осесимметричном случае, лишь в выражении для $G(s, \psi)$ добавляется член $-\omega^2/r$, который, согласно (3.6), является известной функцией от ψ , а в выражении для составляющей скорости u также нужно учитывать ω^2 . Расчет такого течения производится по разностной схеме работы [8].



Фиг. 2

В заключение рассмотрим некоторые примеры расчетов пространственных до- и сверхзвуковых течений в соплах и каналах переменного сечения. Рассмотрим первоначально осесимметричный случай без закрутки. Применительно к течениям в кольцевых осесимметричных соплах разной формы изложенная выше разностная схема была использована в работе [11].

Пространственные течения рассчитаны лишь при помощи асимптотических формул (2.10), которые дают качественное представление о геометрии сопла и распределении параметров. Результаты расчетов представлены на фиг. 2, 3.

На фиг. 2 изображено сопло, осесимметричное до минимального сечения и имеющее при двух плоскостях симметрии некруглую, близкую к эллиптической форму поперечного сечения вниз по потоку. Показана форма поперечного сечения сопла в сечениях $s = \text{const}$. В выходном сечении при $s = 2$ отношение полуосей равно 1.5. При расчете было принято $s_0 = 0$, $k = 2$

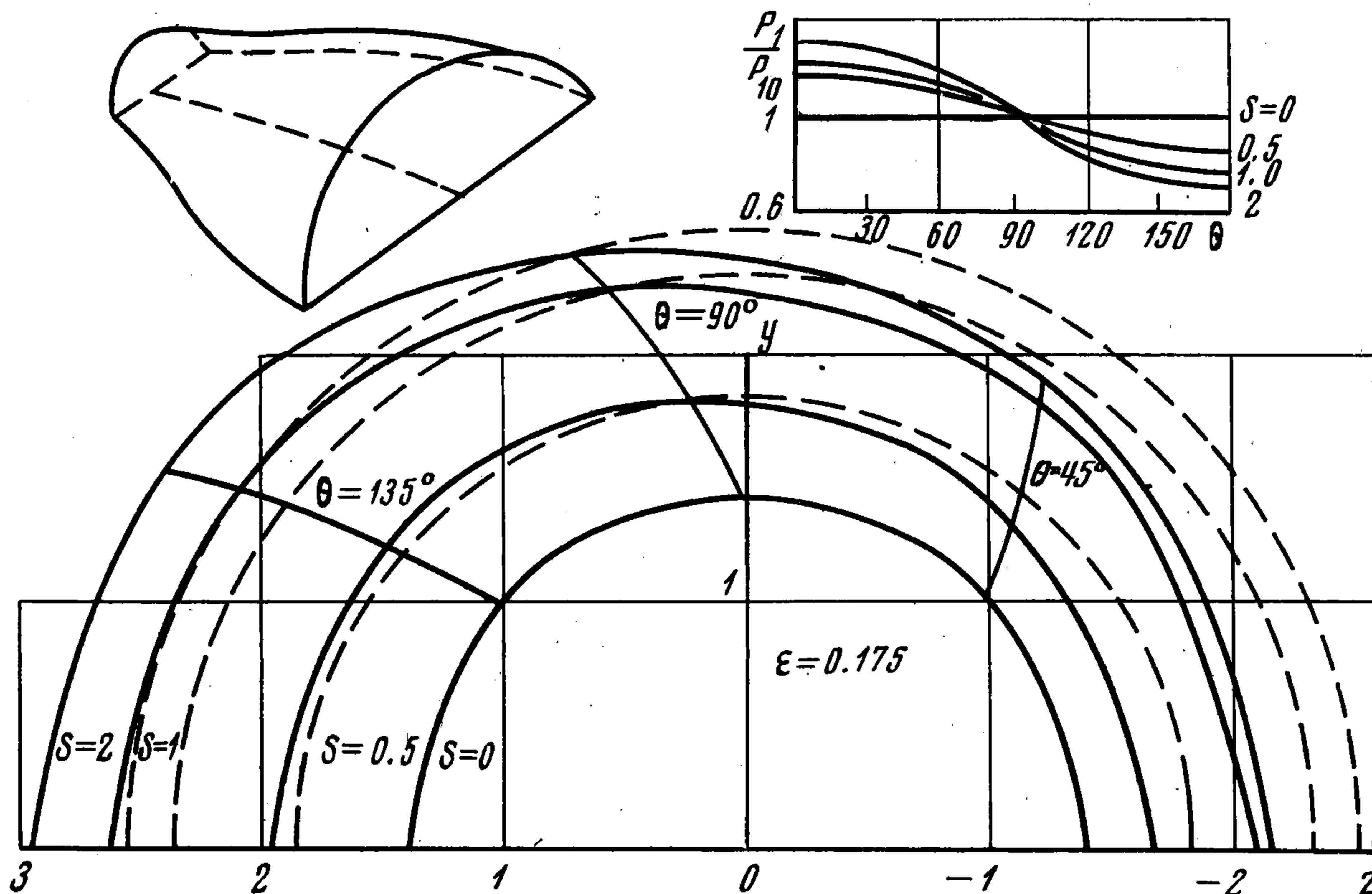
$$\varepsilon = 0.0875, \quad \gamma = 1.4, \quad r_0 = 0, \quad R = \infty$$

$$u_0(s) = 1 + \frac{(1 - u_\infty)(\bar{u}_\infty - 1)(e^{-s/b} - 1)}{(1 - u_\infty)e^{-s/b} + (\bar{u}_\infty - 1)} \quad (3.8)$$

где $u_\infty = 0.1$, $\bar{u}_\infty = 1.9$, $1/b = 3.5$. Здесь же представлено геометрическое место точек $\theta = \text{const}$, т. е. проекции на плоскость yz вторых поверхностей тока и величина p_1/p_1 в разных сечениях в зависимости от θ . Видно наличие перетекания газа из плоскости $z = 0$ в плоскость $y = 0$.

На фиг. 3 аналогичным образом представлены результаты расчетов сопла, осесимметричного до минимального сечения и имеющего при одной плоскости симметрии некруглую форму выходного сечения вниз по потоку. По-прежнему представлена форма поперечного сечения в разных сечениях $\theta = \text{const}$. Пунктиром изображена геометрия

сопла в осесимметричном случае при том же начальном распределении скорости. При расчете этого варианта было принято $s_0 = 0$, $k = 1$, $\varepsilon = 0.175$, $\gamma = 1.4$, $r_0 = 0$, $R(s) = \infty$, а $u_0(s)$ определялось по формуле (3.8). В этом случае перетекание газа про-



Фиг. 3

исходит из плоскости $\varphi = 0$ в плоскость $\varphi = 180^\circ$. Существенно, что центр тяжести поперечного сечения при увеличении s смещается влево относительно центра тяжести в критическом сечении, что приводит к искривлению геометрической оси сопла и появлению боковой силы.

Поступила 22 VII 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Кацкова О. Н., Чушкин П. И. Пространственные сверхзвуковые течения газа с неравновесными процессами. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1968, т. 8, № 5.
2. Ransom V., Thompson H., Hoffman J. D. Analysis of three-dimensional scramjet exhaust nozzle flow fields by a new second-order method of characteristics. AIAA Paper, 1969, № 5, p. 10.
3. Ransom V., Thompson H., Hoffman J. D. Three-dimensional supersonic nozzle flowfield calculations. J. Spacecraft and Rockets, 1970, vol. 7, No. 4.
4. Рыжов О. С. О течениях в окрестности поверхности перехода в соплах Лавала. ПММ, 1958, т. 22, вып. 4.
5. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, ч. 1. М., Гостехиздат, 1955.
6. Giese J., Stream functions for three-dimensional flow. J. Math. and Phys., 1951, vol. 30, № 1. (Русск. перев.: механика. Сб. перев., 1953, № 1).
7. Пирумов У. Г. Расчет течения в сопле Лавала. Докл. АН СССР, 1967, т. 176, № 2.
8. Пирумов У. Г. Расчет течения в сопле Лавала. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 5.
9. Миносцев В. Б. Обтекание гиперзвуковым потоком осесимметричных тел, летящих под углом атаки. Тр. Моск. физ.-техн. ин-та, М., 1961, № 7.
10. Мизес Р. Математическая теория течений сжимаемой жидкости. М., Изд-во иностр. лит., 1961.
11. Овсянников А. М. Расчет течения в дозвуковой и трансзвуковой частях кольцевых сопел. Изв. АН СССР. МЖГ, 1971, № 6.