

**ОБТЕКАНИЕ ПРОФИЛЯ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ,  
ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОМ ПЛОСКОСТИ ПОТОКА**

**В. И. Легейда, И. Е. Тарапов**

(Харьков)

Задача об обтекании произвольного профиля потоком невязкой проводящей жидкости в магнитном поле, перпендикулярном плоскости потока, сведена к системе интегральных уравнений.

В случае бесциркуляционного обтекания получено точное решение, которое проиллюстрировано примером обтекания кругового цилиндра. Рассмотрено асимптотическое решение задачи при больших магнитных числах Рейнольдса.

В условиях безотрывности и потенциальности потока уравнения магнитной гидродинамики для рассматриваемой задачи могут быть записаны в виде

$$\Delta H - \nu_m^{-1} (\mathbf{v} \nabla H) = 0 \quad (\nu_m = 1 / \mu \mu_0 \sigma) \quad (1)$$

$$\frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} + \frac{\mu \mu_0 H^2}{2\rho} = \text{const}, \quad \text{rot } \mathbf{v} = 0, \quad \text{div } \mathbf{v} = 0$$

где  $\nu_m$  — магнитная вязкость,  $\mu$ ,  $\mu_0$  — магнитные проницаемости жидкости и вакуума соответственно,  $\sigma$  — проводимость жидкости.

Граничные условия для скорости  $\mathbf{v}$  те же, что и при отсутствии магнитного поля. Тогда из (1) следует, что если магнитное поле остается перпендикулярным плоскости потока, то оно не влияет на движение жидкости, и речь идет, таким образом, об определении деформации этого поля заданным потоком. Следовательно, задача сводится к определению  $H$  из первого уравнения (1) при известной функции  $\mathbf{v}(x, y)$ .

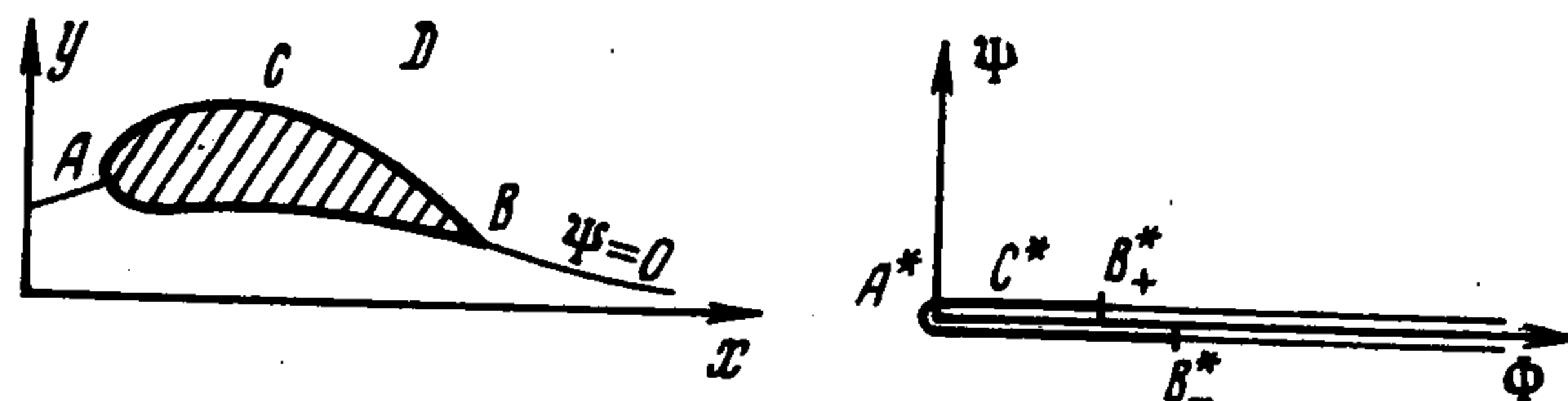
Для того чтобы исследовать решение задачи независимо от вида обтекаемого профиля, перейдем от  $x, y$  к переменным  $\Phi(x, y), \Psi(x, y)$  ( $W = \Phi + i\Psi$  — известный комплексный потенциал потока). В переменных  $\Phi, \Psi$  первое уравнение (1) имеет вид

$$\frac{\partial^2 H}{\partial \Phi^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial \Psi^2} - \frac{1}{\nu_m} \frac{\partial H}{\partial \Phi} = 0 \quad (2)$$

Область течения (область  $D$ ) вне контура  $C$  (см. фиг. 1) переходит в разрезанную по действительной полуоси  $\Phi > 0$  плоскость  $\Phi, \Psi$  (область  $D^*$ ) с указанным на фиг. 1 соответствием точек, причем циркуляция  $\Gamma = \Phi_{B-*} - \Phi_{B+*}$  вокруг профиля  $C$  считается заданной. Функция  $W(z) = \Phi + i\Psi$  осуществляет конформное отображение  $D$  на  $D^*$ .

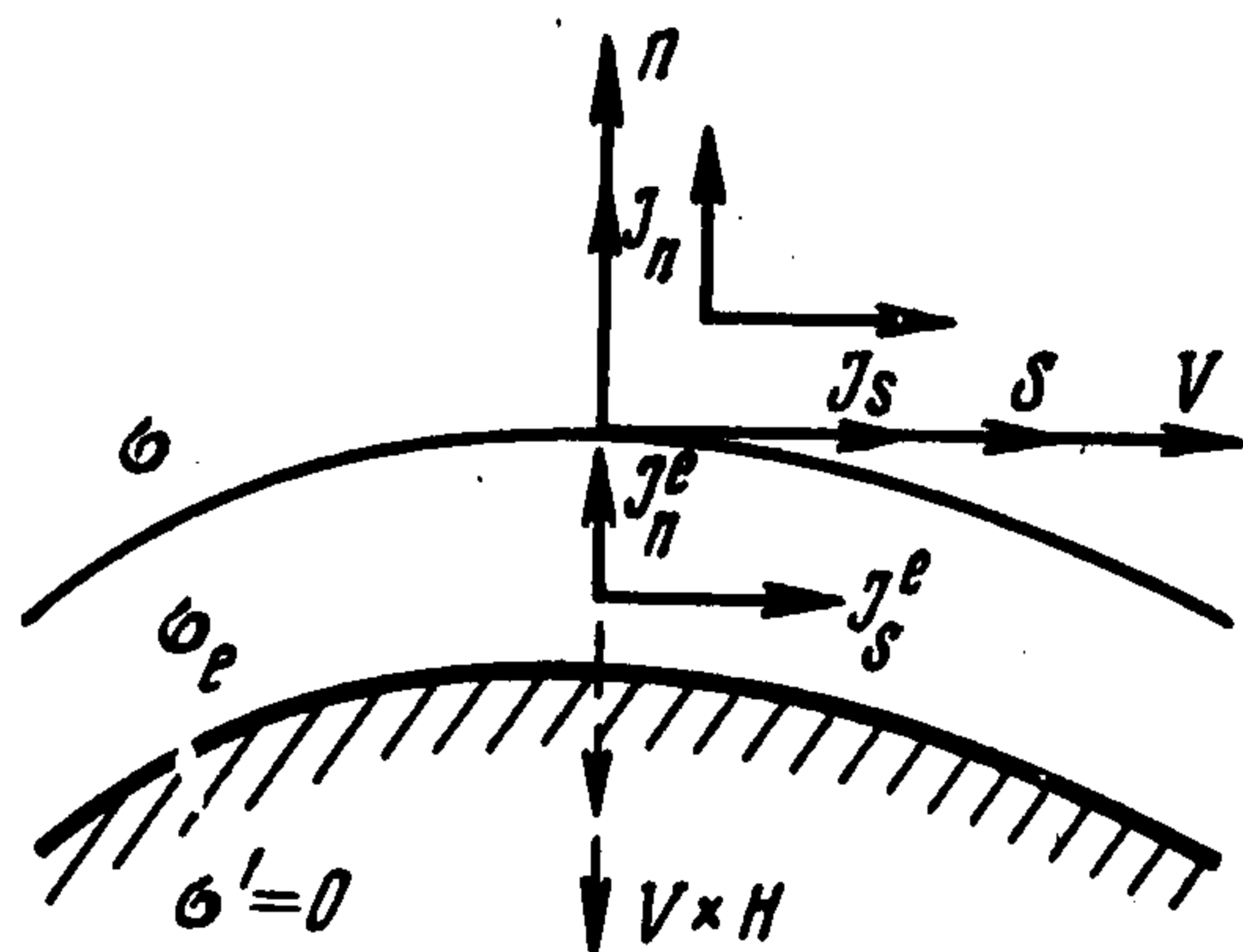
Метод введения переменных  $\Phi, \Psi$  был применен еще Буссинеском [1] в задаче о конвекции тепла у цилиндра, а затем использован в работах [2, 3] при изучении магнитогидродинамических потоков у полубесконеч-

ных тел. К уравнению типа (2) приводится задача о конвекции тепла в потенциальном потоке [4], задача течения вязкой проводящей жидкости вдоль образующей цилиндра в поперечном магнитном поле [5] и др. Однако специфичность области  $D^*$  в плоскости  $\Phi, \Psi$  при  $\Gamma \neq 0$  в данной задаче не позволяет применить для случая произвольных чисел  $R_m$  решения, которые получены в работах [1-5].



Фиг. 1

Сформулируем граничные условия для магнитного поля. Прежде всего заметим, что первое уравнение (1) определяет магнитное поле  $H$  с точностью до некоторой постоянной  $H_0$ , которую можно рассматривать как внешнее поле, заданное на бесконечности. Поэтому в качестве условия на бесконечности достаточно потребовать ограниченности  $H$  вдали от контура.



Фиг. 2

Будем считать, что на поверхности профиля расположен тонкий проводящий слой толщиной  $\delta$  (переменной) с проводимостью  $\sigma^e$ , в который включен внешний источник тока с заданным напряжением  $U$  на клеммах. Под этим слоем находится изолятор («тело» профиля), уравнение поверхности которого  $n = -\delta(s)$ , где  $n$  — координата по внешней нормали к контуру  $C$ , а  $s$  — дуговая координата (фиг. 2).

Предположение о том, что проводящий слой весьма тонок, означает, что всюду  $\delta(s) \ll L$ , где  $L$  — характерный размер по  $s$  (например радиус кривизны контура  $C$ ).

Тогда, поскольку всюду в жидкости компоненты плотности тока  $j$  имеют вид  $j_s = \partial H / \partial n$ ,  $j_n = -\partial H / \partial s$ , то из непрерывности при переходе через контур  $C$  касательных компонент электрического поля  $E = j / \sigma - \mu_0 [v \times H]$  получаем

$$\left( \frac{\partial H}{\partial n} \right)_c = \frac{\sigma}{\sigma^e} [j_s^e]_{n=0} \quad (3)$$

Здесь  $j_s^e$  — касательная компонента плотности тока в области проводящего слоя ( $-\delta(s) \leq n \leq 0$ ).

В области проводящего слоя в силу  $\delta(s) \ll L$  уравнения  $\text{div } j^e = 0$ ,  $\text{rot } E^e = 0$ , справедливые всюду в области проводящего слоя, кроме того места, где расположен источник тока, могут быть записаны в виде

$$\frac{\partial}{\partial n} (\sigma^e E_n^e) + \frac{\partial}{\partial s} (\sigma^e E_s^e) = 0, \quad \frac{\partial E_n^e}{\partial s} - \frac{\partial E_s^e}{\partial n} = 0 \quad (4)$$

Поскольку слой тонкий, то из второго уравнения (4) следует  $\partial E_s^e / \partial n = 0$ , т. е.

$$E_s^e = E_s^e(s) \quad (5)$$

Интегрируя первое из соотношений (4) поперек слоя ( $-\delta(s) \leq n \leq \leq 0$ ), учитывая (5) и граничное условие для  $j_n^e$

$$(j_n^e)_{n=0} = (j_n)_c = - \left( \frac{\partial H}{\partial s} \right)_c, \quad (j_n^e)_{n=-\delta(s)} = 0$$

получим

$$\left( \frac{\partial H}{\partial s} \right)_c = \delta(s) \frac{d}{ds} (\sigma^e E_s^e)$$

Так как  $E_s^e$  (следовательно,  $j_s^e$ ) не меняются поперек проводящего слоя, то, учитывая (3), имеем

$$\left( \frac{\partial H}{\partial s} \right)_c = \delta(s) \frac{d}{ds} \left[ \frac{\sigma^e}{\sigma} \left( \frac{\partial H}{\partial n} \right)_c \right] \quad (6)$$

Отсюда, предполагая непрерывность  $H(x, y)$  вплоть до контура  $C$  и считая в дальнейшем  $\delta = \text{const}$ , получаем

$$\left( H - \frac{\delta \sigma^e}{\sigma} \frac{\partial H}{\partial n} \right)_c = C_0 \quad (7)$$

Это соотношение представляет собой граничное условие рассматриваемой задачи. Постоянную  $C_0$  можно выразить через заданное напряжение  $U$  на клеммах источника, а именно

$$U = \oint_c E_s^e ds = \oint_c \frac{1}{\sigma} \left( \frac{\partial H}{\partial n} \right)_c ds \quad (8)$$

Соотношения, подобные (6), рассматривались в работах [6, 7].

Рассмотрим два предельных случая общего граничного условия (7). Пусть  $l$  — характерная толщина слоя жидкости, окружающего профиль, где  $H$  и  $\partial H / \partial n$  имеют один и тот же порядок. Из уравнения индукции следует, что

$$l = L / \sqrt{R_m}, \quad R_m = v_\infty L / \nu_m = v_\infty L \mu_0 \mu \sigma$$

где  $R_m$  — магнитное число Рейнольдса.

Тогда в случае

$$\frac{\delta \sigma^e}{l \sigma} = \frac{\sigma^e \delta \sqrt{R_m}}{L \sigma} \ll 1$$

из (7) следует, что граничным условием должно быть  $(H)_c = C_0$ . Но тогда из принципа максимума [8] следует, что  $H = C_0$  всюду вне контура  $C$ , и это тривиальное решение существует, если внешнее магнитное поле равно  $C_0$ .

Заметим, что в этом предельном случае  $(j_n)_c = 0$ , так что нет «протекания» индуцируемого в жидкости тока в проводящий слой и, таким образом, профиль как бы изолирован от токов в жидкости. Более того, эти токи не могут и возникать, ибо циркулирующий в замкнутом проводящем слое заданный ток не может создать внешнего по отношению к контуру  $C$  поля.

Иное дело в противоположном предельном случае, когда

$$\delta\sigma^e \sqrt{R_m} / L\sigma \gg 1$$

и когда в качестве граничного условия, как это следует из (7), (8), берется условие

$$(\partial H / \partial n)_C = U\sigma / L_c$$

где  $L_c$  — длина проводящего слоя (контур  $C$ ). В этом случае существует наиболее интенсивный обмен токами между проводящим слоем и потоком жидкости.

В дальнейшем остановимся именно на этом случае граничного условия. Тогда на части  $C^*$  границы области  $D^*$ , соответствующей обтекаемому профилю, имеем

$$\left. \frac{\partial H}{\partial \Psi} \right|_{C^*} = \frac{U\sigma}{L_c} \sqrt{\left( \frac{\partial x}{\partial \Phi} \right)^2 + \left( \frac{\partial x}{\partial \Psi} \right)^2} \Big|_{\Psi=0} = G(\Phi, 0) \quad (9)$$

Решая задачу в плоскости  $\Phi, \Psi$ , необходимо кроме граничного условия (9) задать условия на остальной части границы области  $D^*$ , т. е. на оставшихся берегах разреза, которым в плоскости  $x, y$  соответствует линия тока  $\Psi(x, y) = 0$ , уходящая от задней критической точки профиля на бесконечность. Естественно считать, что на этой линии тока магнитное поле  $H$  и его первые производные непрерывны. Это требование дает следующие условия:

$$H \Big|_{\substack{\Psi=+0 \\ \Phi=\Phi}} = H \Big|_{\substack{\Psi=-0 \\ \Phi=\Phi+\Gamma}}; \quad \left. \frac{\partial H}{\partial \Psi} \right|_{\substack{\Psi=+0 \\ \Phi=\Phi}} = \left. \frac{\partial H}{\partial \Psi} \right|_{\substack{\Psi=-0 \\ \Phi=\Phi+\Gamma}} \quad \text{при } \Phi > \Phi_{B+*}$$

Кроме того, будем считать, что поле  $H$  ограничено на бесконечности.

Вводя безразмерные переменные  $\varphi = \Phi / (v_\infty L)$ ,  $\psi = \Psi / (v_\infty L)$ ,  $h = H / H_0$  и переходя от  $h(\varphi, \psi)$  к новой функции

$$g(\varphi, \psi) = h(\varphi, \psi) e^{-R\varphi}$$

получим в полярных координатах  $\rho = \sqrt{\varphi^2 + \psi^2}$ ,  $\theta = \arctg \psi/\varphi$

$$\Delta g - R^2 g = 0 \quad (10)$$

$$\left. \frac{\partial g}{\partial \theta} \right|_{\theta=0} = \rho G(\rho, 0) e^{-R\rho} \quad (0 \leq \rho \leq a)$$

$$\left. \frac{\partial g}{\partial \theta} \right|_{\theta=2\pi} = -\rho G(\rho, 0) e^{-R\rho} \quad (0 \leq \rho \leq a + \gamma)$$

$$g(\rho, 0) = e^{R\gamma} g(\rho + \gamma, 2\pi) \quad (\rho > a) \quad (11)$$

$$\frac{1}{\rho} \left. \frac{\partial g}{\partial \theta} \right|_{\theta=0} = \frac{e^{R\gamma}}{\rho + \gamma} \left. \frac{\partial g}{\partial \theta} \right|_{\theta=2\pi} \quad (\rho > a)$$

Здесь  $R = R_m / 2 = v_\infty L / (2\nu_m)$ ,  $\gamma = \Gamma / (v_\infty L)$ ,  $a = \varphi(x_{B+}, y_{B+})$ .

Решение уравнения (10), ограниченное на бесконечности, можно представить в виде

$$g(\rho, \theta) = \int_0^\infty \left[ A(\lambda) \frac{\text{sh}(2\pi - \theta)\lambda}{\text{sh} 2\pi\lambda} + B(\lambda) \frac{\text{sh} \lambda\theta}{\text{sh} 2\pi\lambda} \right] K_{i\lambda}(R\rho) d\lambda \quad (12)$$

где  $K_{i\lambda}(x)$  — функция Макдональда мнимого индекса.

Требую, чтобы решение  $g(\rho, \theta)$  удовлетворяло четырем условиям (11), получим

$$\int_0^{\infty} \frac{\lambda}{\operatorname{sh} 2\pi\lambda} (B - A \operatorname{ch} 2\pi\lambda) K_{i\lambda}(R\rho) d\lambda = \rho G(\rho, 0) e^{-R\rho} \quad (0 \leq \rho \leq a)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\lambda}{\operatorname{sh} 2\pi\lambda} (B \operatorname{ch} 2\pi\lambda - A) K_{i\lambda}(R\rho) d\lambda = -\rho G(\rho, 0) e^{-R\rho} \quad (0 \leq \rho \leq a + \gamma) \quad (13)$$

$$\int_0^{\infty} A K_{i\lambda}(R\rho) d\lambda = e^{R\gamma} \int_0^{\infty} B K_{i\lambda}[R(\rho + \gamma)] d\lambda \quad (\rho > a)$$

$$\frac{1}{\rho} \int_0^{\infty} \frac{\lambda}{\operatorname{sh} 2\pi\lambda} (B - A \operatorname{ch} 2\pi\lambda) K_{i\lambda}(R\rho) d\lambda =$$

$$= \frac{e^{R\gamma}}{\rho + \gamma} \int_0^{\infty} \frac{\lambda}{\operatorname{sh} 2\pi\lambda} (B \operatorname{ch} 2\pi\lambda - A) K_{i\lambda}[R(\rho + \gamma)] d\lambda \quad (\rho > a)$$

Эти соотношения представляют собой систему интегральных уравнений относительно функций  $A(\lambda)$  и  $B(\lambda)$ . Решение этой системы в общем случае может быть получено, по-видимому, только численным методом для конкретного потока.

Определение функций  $A(\lambda)$  и  $B(\lambda)$  наиболее просто в случае бесциркуляционного обтекания профиля.

Действительно, полагая в (13)  $\gamma = 0$ , получим после преобразований

$$\int_0^{\infty} (A - B) K_{i\lambda}(R\rho) d\lambda = 0 \quad (\rho > a_0, \quad a_0 = a |_{\gamma=0})$$

$$\int_0^{\infty} (A + B) \lambda \operatorname{th} \pi\lambda K_{i\lambda}(R\rho) d\lambda = -2\rho G(\rho, 0) e^{-R\rho} \quad (0 \leq \rho \leq a_0) \quad (14)$$

$$\int_0^{\infty} (A + B) \lambda \operatorname{th} \pi\lambda K_{i\lambda}(R\rho) d\lambda = 0 \quad (\rho > a_0)$$

Из симметрии формулировки задачи в плоскости  $\varphi, \psi$  следует, что магнитное поле одинаково в точках контура  $C^*$ , симметрично расположенных на обоих берегах разреза, т. е.

$$g(\rho, 0) = g(\rho, 2\pi) \quad (\rho \in C^*)$$

Это дает

$$\int_0^{\infty} (A - B) K_{i\lambda}(R\rho) d\lambda = 0 \quad (0 \leq \rho \leq a_0) \quad (15)$$

Тогда из первого уравнения (14) и (15), следует, что  $A(\lambda) = B(\lambda)$ . Последние два уравнения (14) служат теперь для определения функции  $A(\lambda)$ . Используя преобразование Конторовича — Лебедева [9], получим

$$A(\lambda) = -\frac{2}{\pi^2} \operatorname{ch} \pi\lambda \int_0^{a_0} G(t) e^{-Rt} K_{i\lambda}(Rt) dt \quad (16)$$

Подставляя в (12) это выражение и используя известную формулу свертки

$$\int_0^{\infty} \operatorname{ch}[(\pi - \theta)\lambda] K_{i\lambda}(x) K_{i\lambda}(y) d\lambda = \frac{\pi}{2} K_0(\sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos \theta})$$

получаем

$$g(\rho, \theta) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{a_0} G(t) e^{-Rt} K_0(R \sqrt{t^2 + \rho^2 - 2t\rho \cos \theta}) dt$$

Для безразмерного магнитного поля получим

$$h(\varphi, \psi) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{a_0} G(t) e^{R(\varphi-t)} K_0(R \sqrt{\psi^2 + (\varphi-t)^2}) dt \quad (17)$$

Это решение с точностью до обозначений совпадает с решением задачи о конвекции тепла у цилиндра в потенциальном потоке, полученным Кингом [4] методом источников и исследованным в случае малых чисел  $R_m (=2R)$ .

Рассмотрим в качестве примера использования решения (17) бесциркуляционное обтекание цилиндра при произвольных  $R_m$ .

В этом случае

$$G(\varphi, 0) = \frac{U\epsilon}{2L_c V_\infty \sqrt{2\varphi - \varphi^2}}, \quad a_0 = 2$$

а из (17) имеем

$$h(\varphi, \psi) = -\frac{U\epsilon e^{R\varphi}}{L_c \pi V_\infty} \int_0^{\pi/2} e^{-2R \cos^2 u} K_0(R \sqrt{\psi^2 + (\varphi - 2 \cos^2 u)^2}) du$$

При помощи квадратурной формулы Симпсона было вычислено  $h(\varphi, \psi)$ , а затем с использованием формул

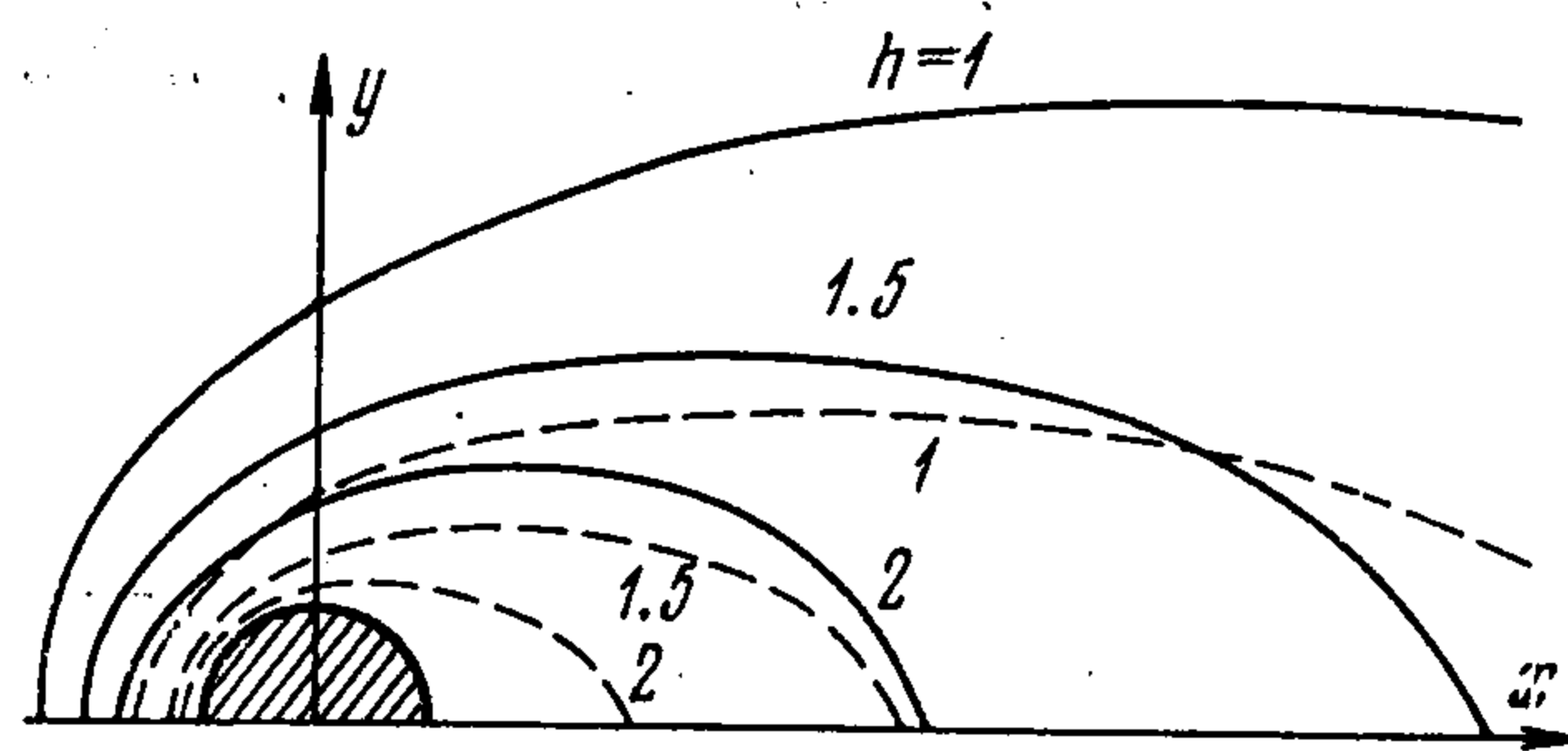
$$\begin{aligned} \varphi &= (r + 1/r) \cos \chi + 2, & \psi &= (r - 1/r) \sin \chi \\ r^2 &= x^2 + y^2, & \chi &= \operatorname{arctg} y/x \end{aligned}$$

были построены линии уровня  $h(x, y)$  для цилиндра при  $R_m = 1$  (сплошные линии) и  $R_m = 2$  (пунктир). Результаты представлены на фиг. 3, откуда видно, что при увеличении  $R_m$  градиент магнитного поля растет в слое, прилегающем к поверхности цилиндра. Это [указывает на образование магнитного пограничного слоя при  $R_m \gg 1$ .

Поэтому представляет интерес рассмотрение асимптотики решения уравнения (10) при  $R_m \gg 1$ . Вводя малый параметр  $\epsilon = 1/R \ll 1$  и переходя в уравнении (10) к переменным  $\xi, \eta$ , связанным с  $\varphi$  и  $\psi$  формулами  $\varphi = \xi^2 - \eta^2$ ,  $\psi = 2\xi\eta$ , получим

$$\epsilon^2 \left( \frac{\partial^2 g}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial \eta^2} \right) - 4(\xi^2 + \eta^2) g = 0 \quad (18)$$

Область  $D^*$  переходит в верхнюю полуплоскость  $\eta > 0$ , а контур  $C^*$  — в отрезок  $(-\sqrt{a+\gamma}, \sqrt{a})$  оси  $\xi$ . При этом на указанном отрезке должно быть выполнено



Фиг. 3

условие, следующее из (11)

$$\frac{\partial g}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} = 2\xi G(\varphi(\xi), 0) e^{-\xi^2/\varepsilon} \quad (19)$$

Отыскивая решение типа погранслоя уравнения (18) с условием (19), согласно общему методу [10], положим  $\xi = \xi$ ,  $\eta = \varepsilon t$ . Тогда, отбрасывая члены порядка  $\varepsilon^2$ , из (18) и (19) получим

$$g^\circ(\xi, t) = -\frac{\varepsilon \xi}{|\xi|} G(\varphi(\xi), 0) \exp\left(-\frac{\xi^2 + 2|\xi|t\varepsilon}{\varepsilon}\right)$$

Возвращаясь к  $h(\varphi, \psi)$ , получим асимптотическое значение  $h^\circ(\varphi, \psi)$  поля  $h$  при  $R_m \gg 1$

$$h(\varphi, \psi) \sim h^\circ(\varphi, \psi) = \pm \varepsilon(\varphi, 0) e^{-|\psi|/\varepsilon} \quad (20)$$

Из (20) видно, что толщина магнитного пограничного слоя имеет порядок  $1/\sqrt{R_m}$ .

Авторы выражают искреннюю благодарность Н. И. Ахиезеру за внимание к работе, а Г. А. Любимову и С. А. Региреру — за ценные замечания.

Поступила 4 VIII 1971

#### ЛИТЕРАТУРА

1. B o u s s i n e s q M. I. Calcul du pouvoir refroidissant des courants fluides. I. Math pures et appl., Ser. 6, 1905, vol. 1.
2. Л у р ь е К. А. Об одном классе плоских задач магнитной гидродинамики. Ж. техн. физ., 1960, т. 30, вып. 6.
3. Л у р ь е К. А. Плоская задача обтекания твердых тел несжимаемой жидкостью конечной проводимости в случае перпендикулярного к потоку магнитного поля. Ж. техн. физ., 1960, т. 30, вып. 9.
4. K i n g L. V. On the convection of heat from small cylinders in a stream of fluids. Philos. Trans. Roy. Soc. London, S. A, 1914, vol. 214.
5. Б р а н о в е р Г. Г., Ц и н о б е р А. Б. Магнитная гидродинамика несжимаемых сред. М., «Наука», 1970.
6. Ш е р к л и ф Дж. Теория электромагнитного измерения расхода. М., «Мир», 1965.
7. В а т а ж и н А. Б., Л ю б и м о в Г. А., Р е г и р е р С. А. Магнитогидродинамические течения в каналах. М., «Наука», 1970.
8. Б е р с Л., Д ж о н Ф., Ш е х т е р М. Уравнения с частными производными. М., «Мир», 1966.
9. Л е б е д е в Н. И. Об одной формуле обращения. Докл. АН СССР, 1946, т. 52, № 8.
10. В и ш и к М. Д., Л ю с т е р н и к Л. А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. Успехи матем. наук, 1957, т. 12.