Прикладная математика и механика. Том 36, 1972

УДК 531.36

КРАТНАЯ СИНХРОНИЗАЦИЯ В СИСТЕМЕ СЛАБОСВЯЗАННЫХ ОБЪЕКТОВ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

О. П. Барзуков

(Ленинград)

Исследуются периодические режимы движения в системе объектов с одной степенью свободы, взаимодействующих посредством слабых связей, когда при отсутствии связей объекты совершают периодические движения с частотами, кратными некоторой величине (случай кратной синхронизации [1]).

Рассматривается система с многомерной быстро вращающейся фазой, описывающая взаимодействие нелинейных почти консервативных объектов. Изучается случай, названный в [1] «непростым», когда из условий периодичности первого приближения определяется связь только между порождающими фазами объектов, движущимися с одинаковыми частотами, а связь между фазами групп объектов, имеющих неравные частоты, определяется из условий периодичности второго приближения. Приводятся необходимые и достаточные условия устойчивости найденных режимов. Кратная синхронизация механических вибраторов в «простом» случае изучена методом малого параметра в работе [2]; обзор других работ, в которых изучались конкретные технические объекты преимущественно асимптотическими методами, приведен в [1].

1. Рассмотрим задачу о взаимодействии нелинейных объектов посредством слабых связей при отсутствии внешнего воздействия, описываемую следующей системой с многомерной быстро вращающейся фазой:

$$
\begin{gathered}
\varphi_s^{\cdot} = \omega_s + \mu X_s^{(1)}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \omega_1, \ldots, \omega_n, \mathbf{v}) + \\
+ \mu^2 X_s^{(2)}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \omega_1, \ldots, \omega_n, \mathbf{v}) + O(\mu^3) \\
\omega_s^{\cdot} = \mu Y_s^{(1)}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \omega_1, \ldots, \omega_n, \mathbf{v}) + \\
+ \mu^2 Y_s^{(2)}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \omega_1, \ldots, \omega_n, \mathbf{v}) + O(\mu^3) \\
\mathbf{v}^{\cdot} = A\mathbf{v} + \mathbf{F}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \omega_1, \ldots, \omega_n) + \mu \mathbf{F}^{(1)}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \omega_1, \ldots, \omega_n, \mathbf{v}) + O(\mu^2)
\end{gathered}
\tag{1.1}
$$

Здесь $\mu > 0$ — малый параметр, $\mathbf{v}$, $\mathbf{F}$, $\mathbf{F}^{(1)}$ — N-мерные векторы, A — квадратная матрица $N \times N$ с постоянными компонентами; $X_s^{(1)}$, $X_s^{(2)}$, $Y_s^{(1)}$, $Y_s^{(2)}$, $\mathbf{F}$, $\mathbf{F}^{(1)}$ — предполагаются аналитическими в некоторой области пространства своих аргументов и 2π-периодическими по каждой из переменных $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$.

К уравнениям вида (1.1) приводится задача о синхронизации квазиконсервативных объектов, взаимодействующих посредством слабых связей, после перехода к переменным «фаза — частота» [3, 4].

При $\mu = 0$ система (1.1) допускает решение вида

$$
\begin{gathered}
\varphi_s = \nu_s t + \alpha_s, \qquad \omega_s = \nu_s \\
\mathbf{v} = \mathbf{v}(\nu_1 t + \alpha_1, \ldots, \nu_n t + \alpha_n, \nu_1, \ldots, \nu_n)
\end{gathered}
\tag{1.2}
$$

где ν_s и α_s — постоянные частоты и начальные фазы.

Для полной системы (1.1) ограничимся разысканием периодического решения, обращающегося при $\mu = 0$ в решение (1.2), когда все ν_s кратны некоторой частоте ν, т. е. $\nu_s = n_s\nu$. Пусть имеется r групп объектов, в каждой из которых n_s одинаковы; число объектов в k-й группе обозначим через l_k. Числа n_k, не нарушая общности, можно считать не имеющими общих делителей.

Периодическое периода $T = 2\pi / \nu$ решение системы (1.1) разыскиваем в виде ряда по μ, приняв за порождающее решение (1.2) с учетом сделанных предположений. Частота ν будет зависеть от μ и может быть представлена в виде ряда

$$\nu = \nu^{(0)} + \mu\nu^{(1)} + \mu^2\nu^{(2)} + \ldots \tag{1.3}$$

коэффициенты которого подлежат определению в процессе решения.

Введем вместо переменной t переменную t_1 по формуле

$$t_1 = (1 + \mu h^{(1)} + \mu^2 h^{(2)} + \ldots) t \qquad (h^{(i)} = \nu^{(i)} / \nu^{(0)}) \tag{1.4}$$

Тогда задача приведется к отысканию $2\pi/\nu^{(0)}$-периодического решения новой системы

$$\begin{gathered}\varphi_{ki}' = \omega_{ki} + \mu\,[X_{ki}^{(1)} - h^{(1)}\omega_{ki}] + \mu^2\,[X_{ki}^{(2)} - h^{(1)}X_{ki}^{(1)} - (h^{(2)} - h^{(1)^2})\,\omega_{ki}] + O(\mu^3)\\ \omega_{ki}' = \mu Y_{ki}^{(1)} + \mu^2\,[Y_{ki}^{(2)} - h^{(1)}Y_{ki}^{(1)}] + O(\mu^3)\\ \mathbf{v}' = A\mathbf{v} + \mathbf{F} + \mu\,[\mathbf{F}^{(1)} - h^{(1)}A\mathbf{v} - h^{(1)}\mathbf{F}] + O(\mu^2)\end{gathered} \tag{1.5}$$

Система (1.5) записана таким образом, что объекты, имеющие в порождающем приближении одинаковые частоты, объединены в одну группу с номером k ($k = 1,\ldots, r$), а через i ($i = 1,\ldots, l_k$) обозначен номер объекта в группе.

При решении системы (1.5) методом малого параметра все приближения для функций φ_{ki} и ω_{ki} будут, очевидно, определяться с точностью до аддитивных постоянных, которые можно рассматривать как соответствующие добавки высших порядков к порождающим фазам и частотам. Поэтому сразу же можно искать фазы и частоты в виде рядов по μ с постоянными коэффициентами (см. [5], гл. III). Таким образом, окончательно решение системы (1.5) ищется в виде

$$\begin{gathered}\varphi_{ki} = n_k\tau + \alpha_{ki}^{(0)} + \mu\,(\varphi_{ki}^{(1)} + \alpha_{ki}^{(1)}) + \ldots\\ \omega_{ki} = \nu_{ki}^{(0)} + \mu\,(\omega_{ki}^{(1)} + \nu_{ki}^{(1)}) + \ldots, \qquad \mathbf{v} = \mathbf{v}^{(0)} + \mu\mathbf{v}^{(1)} + \ldots\end{gathered}$$

где $\mathbf{v}^{(0)}$ — 2π-периодическое по безразмерному времени $\tau = \nu^{(0)}t_1$ решение уравнения

$$\mathbf{v}^{(0)\prime} = A\mathbf{v}^{(0)} + \mathbf{F}\,(n_1\tau + \alpha_{11}^{(0)}, \ldots, n_r\tau + \alpha_{rl_r}^{(0)}) \tag{1.6}$$

Условия периодичности первого приближения

$$P_{ki}^{(1)}\,(\alpha_{11}^{(0)}, \ldots, \alpha_{rl_r}^{(0)}, \nu^{(0)}, \nu_{11}^{(0)}, \ldots, \nu_{rl_r}^{(0)}) \equiv \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(Y_{ki}^{(1)})\,d\tau = 0 \tag{1.7}$$

вместе с условиями

$$\nu_{ki}^{(0)} = n_k \nu^{(0)} \qquad (i = 1, \ldots, l_k;\ k = 1, \ldots, r) \tag{1.8}$$

дают систему уравнений для определения порождающих фаз $\alpha_{ki}^{(0)}$ и исходного приближения к частоте $\nu^{(0)}$. Здесь и далее круглые скобки у функций и производных означают, что они вычисляются на порождающем решении.

Если система (1.7) вместе с условиями (1.8) допускает простое решение относительно $l_1 + \ldots + l_r - 1$ фаз (одна фаза в силу автономности исходной системы произвольна и может быть принята равной нулю) и частоты $\nu^{(0)}$, то задача о кратной синхронизации практически не будет отличаться от задачи о простой синхронизации [1]. Поэтому далее рассматривается особый случай, важный для решения прикладных задач (в частности, задачи о кратной синхронизации механических вибраторов), когда функции $P_{ki}^{(1)}$ не зависят от тех $\alpha_{pj}^{(0)}$ и $\nu_{pj}^{(0)}$, для которых $p \neq k$

$$P_{ki}^{(1)} = P_{ki}^{(1)} (\alpha_{k1}^{(0)}, \ldots, \alpha_{kl_k}^{(0)}, \nu^{(0)}, \nu_{k1}^{(0)}, \ldots, \nu_{kl_k}^{(0)}) \tag{1.9}$$

Иными словами, рассматривается случай, когда из условий периодичности первого приближения устанавливаются лишь условия синхронизации объектов, движущихся с одинаковыми частотами (условия простой синхронизации). Система (1.7) распадается, таким образом, на r независимых систем, каждая из которых позволяет определить $l_k - 1$ порождающих фаз с точностью до аддитивных постоянных $\alpha_k^{(0)}$, произвольных в этом приближении. Значения частоты $\nu^{(0)}$, определяемые при этом из каждой системы, в соответствии со сделанными предположениями считаются равными.

Для определения постоянных $\alpha_k^{(0)}$ рассмотрим следующее приближение к искомым функциям.

Из условия периодичности второго приближения получаем

$$P_{ki}^{(2)} \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \sum_{p=1}^{r} \sum_{j=1}^{l_p} \left[\left(\frac{\partial Y_{ki}^{(1)}}{\partial \varphi_{pj}} \right) (\varphi_{pj}^{(1)} + \alpha_{pj}^{(1)}) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \left(\frac{\partial Y_{ki}^{(1)}}{\partial \omega_{ki}} \right) (\omega_{pj}^{(1)} + \nu_{pj}^{(1)}) \right] + \left(\frac{\partial Y_{ki}^{(1)}}{\partial \nu} \right) \nu^{(1)} - h^{(1)} (Y_{ki}^{(1)}) + (Y_{ki}^{(2)}) \right\} d\tau = 0 \tag{1.10}$$

причем $P_{ki}^{(2)}$ — функции всех $\alpha_{pj}^{(1)}$ и $\nu_{pj}^{(1)}$, а также не определенных в первом приближении $\alpha_p^{(0)}$.

Функции $P_{ki}^{(2)}$ можно представить в виде суммы двух слагаемых, одно из которых не зависит от $\alpha_{pj}^{(1)}$, а второе является линейной функцией $\alpha_{kj}^{(1)}$

$$P_{ki}^{(2)} = P_{*ki}^{(2)} + P_{**ki}^{(2)}$$

$$P_{*ki}^{(2)} = P_{*ki}^{(2)} (\alpha_1^{(0)}, \ldots, \alpha_r^{(0)}, \nu^{(1)}, \nu_{11}^{(1)}, \ldots, \nu_{rl_r}^{(1)})$$

$$P_{**ki}^{(2)} = \sum_{j=1}^{l_k} (\partial P_{ki}^{(1)} / \partial \alpha_{kj}^{(0)})\, \alpha_{kj}^{(1)}$$

Следовательно, для нахождения постоянных $\alpha_{kj}^{(1)}$ имеем r линейных систем

$$\sum_{j=1}^{l_k} (\partial P_{ki}^{(1)} / \partial \alpha_{kj}^{(0)})\, \alpha_{kj}^{(1)} = -P_{*ki}^{(2)} \tag{1.11}$$

определители которых равны нулю. Поэтому для разрешимости систем относительно $\alpha_{kj}^{(1)}$ необходимо, чтобы выполнялись равенства

$$Q_k^{(2)}(\alpha_1^{(0)}, \ldots, \alpha_r^{(0)}, \nu^{(1)}, \nu_{11}^{(1)}, \ldots, \nu_{rl_r}^{(1)}) \equiv \sum_{i=1}^{l_k} P_{*ki}^{(2)} a_{ki}^{*} = 0 \tag{1.12}$$

В (1.12) через a_{ki}^{*} обозначены решения систем

$$\sum_{i=1}^{l_k} (\partial P_{ki}^{(1)} / \partial \alpha_{kj}^{(0)})\, a_{ki}^{*} = 0 \qquad \begin{pmatrix} j = 1, \ldots, l_k \\ k = 1, \ldots, r \end{pmatrix} \tag{1.13}$$

Система (1.12), дополненная условиями $\nu_{ki}^{(1)} = n_k \nu^{(1)}$, служит для определения первого приближения к частоте и постоянных $\alpha_k^{(0)}$, одна из которых в силу автономности системы произвольна.

2. Переходя к исследованию устойчивости найденных решений, составим уравнения в вариациях системы (1.5). Эти уравнения представляют линейную систему с $2\pi / \nu^{(0)}$-периодическими коэффициентами, $2(l_1 + \ldots + l_r)$ характеристических показателей которой при $\mu = 0$ обращаются в нуль. Устойчивость найденных решений определяется знаками вещественных частей этих, называемых «критическими», показателей [4]. Поэтому только разысканием их здесь и ограничимся. Возмущения $\delta\varphi_{ki}$, $\delta\omega_{ki}$, $\delta\nu$ представимы в виде

$$\delta\varphi_{ki} = e^{\lambda t_1} \vartheta_{ki}, \quad \delta\omega_{ki} = e^{\lambda t_1} \psi_{ki}, \quad \delta\nu = e^{\lambda t_1} \mathrm{w} \tag{2.1}$$

где $\vartheta_k (t_1)$, $\psi_{ki}(t_1)$, $\mathrm{w}(t_1)$ — $2\pi / \nu^{(0)}$-периодические функции, а критические показатели $\lambda = \lambda(\mu)$ разлагаются в ряд по степеням $\mu^{1/2}$

$$\lambda = \lambda_1 \mu^{1/2} + \lambda_2 \mu + \ldots \tag{2.2}$$

Последовательные приближения к характеристическим показателям разыскиваются в процессе построения $2\pi / \nu^{(0)}$-периодических решений системы в вариациях в виде рядов по степеням $\mu^{1/2}$ с $2\pi / \nu^{(0)}$-периодическими коэффициентами. В результате соответствующих выкладок, на которых здесь не будем останавливаться, приходим к следующим результатам.

Первые приближения к характеристическим показателям являются корнями уравнений

$$|\Lambda_{kij}| = 0, \quad (\Lambda_{kij} = \partial P_{ki}^{(1)} / \partial \alpha_{kj}^{(0)} - \lambda_1^2 \delta_{ij}) \tag{2.3}$$

Каждое из этих уравнений имеет двойной нулевой корень; остальные корни каждого уравнения предполагаются простыми и отличными от нуля.

Для отличных от нуля λ_1 соответствующие вторые приближения к характеристическим показателям равны [4]

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} \sum_{i,\,j=1}^{l_k} \left[\frac{\partial P_{ki}^{(1)}}{\partial \nu_{kj}^{(0)}} + \frac{\partial R_{ki}^{(1)}}{\partial \alpha_{ki}^{(0)}} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial Y_{ki}^{(1)}}{\partial \nu} \right) \zeta_{kj}\, d\tau \right] a_{ki}^* a_{kj}$$

$$\left(R_{kj}^{(1)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (X_{ki}^{(1)})\, d\tau \right) \tag{2.4}$$

где a_{ki} и $a_{ki}{}^*$ — решения сопряженных систем

$$\sum_{j=1}^{l_k} \Lambda_{kij} a_{kj} = 0, \qquad \sum_{i=1}^{l_k} \Lambda_{kij} a_{ki}^* = 0 \tag{2.5}$$

причем предполагается, что векторы a_k и $a_k{}^*$ выбраны так, что

$$\sum_{i=1}^{l_k} a_{ki} a_{ki}^* = 1 \tag{2.6}$$

Для тех же характеристических показателей, для которых первые приближения $\lambda_1 = 0$, величины λ_2 определяются из уравнения

$$\left| \frac{\partial Q_k^{(2)}}{\partial \alpha_p^{(0)}} + \lambda_2 \sum_{i=1}^{l_k} \sum_{j=1}^{l_p} \left[\frac{\partial R_{ki}^{(1)}}{\partial \alpha_{pj}^{(0)}} + \frac{\partial P_{ki}^{(1)}}{\partial \nu_{pj}^{(0)}} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial Y_{ki}^{(1)}}{\partial \nu} \right) \zeta_{pj} d\tau \right] a_{ki}^* - \right.$$

$$\left. - \lambda_2{}^2 \delta_{pk} \right| = 0 \qquad (k,\ p = 1, \ldots, r) \tag{2.7}$$

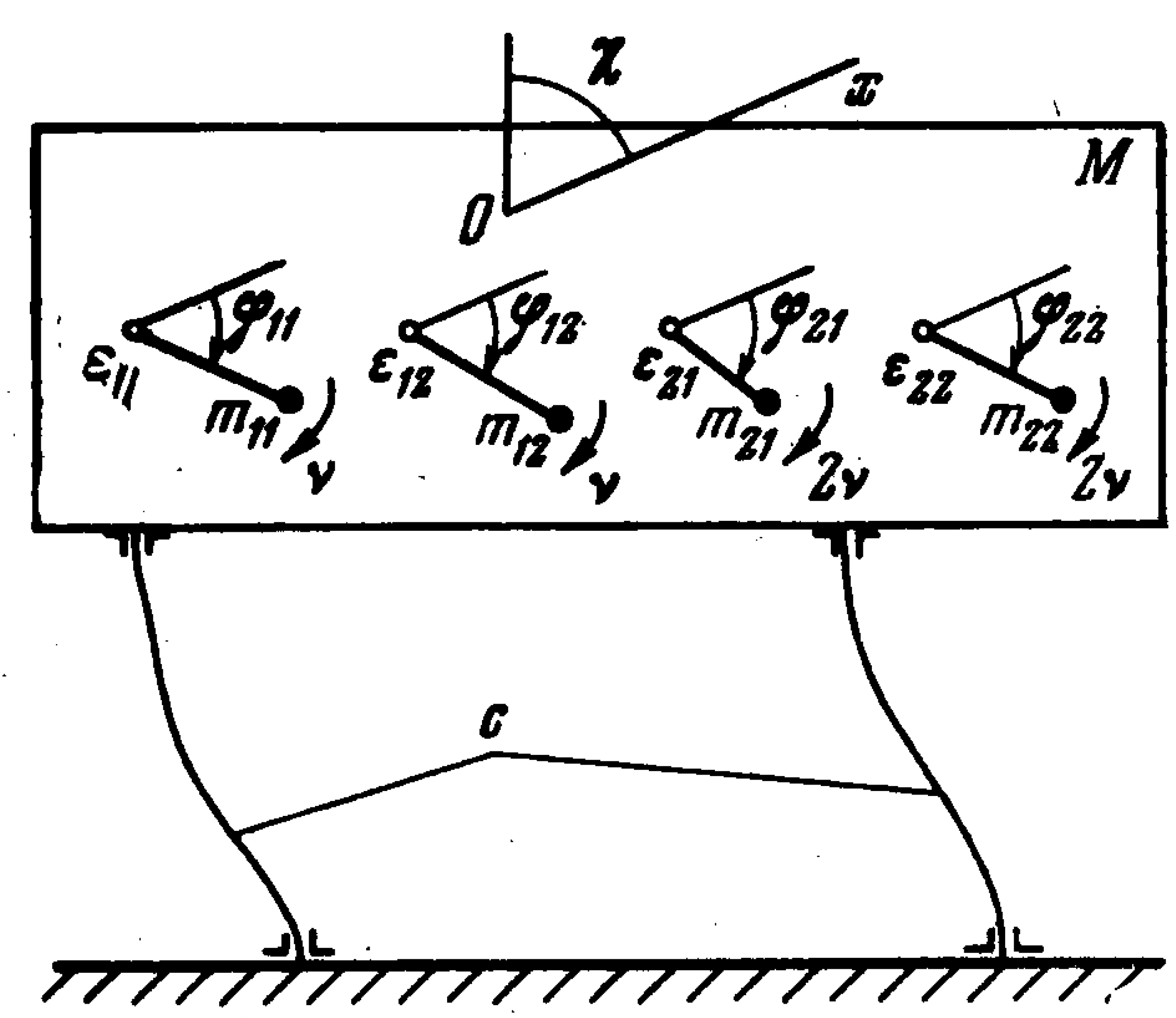
Функции ζ_{ki} в (2.4) и (2.7) выражаются через $\nu^{(0)}$, согласно соотношению [4]

$$\zeta_{ki}' = \nu^{(0)} \frac{\partial^2 \nu^{(0)}}{\partial \nu^{(0)}\, \partial \alpha_{ki}^{(0)}} \tag{2.8}$$

Исследуемый режим кратной синхронизации будет асимптотически устойчив, если для всех корней уравнений (2.3) и (2.7)

$$\lambda_1{}^2 < 0, \qquad \operatorname{Re} \lambda_2 < 0$$

При этом один корень уравнения (2.7), как и должно быть для автономной системы, равен нулю.



3. Рассмотрим задачу о двукратной синхронизации двух пар дебалансных вибраторов, установленных на твердом теле, которое может совершать поступательные колебания (фигура). Уравнения движения такой системы имеют вид (о введении малого параметра см. [1, 6])

$$\varphi_{ki}{}^{\cdot} = \omega_{ki}$$

$$\omega_{ki}{}^{\cdot} = \mu \frac{1}{I_{ki}} \left[L_{ki}(\omega_{ki}) + m_{ki} \varepsilon_{ki} x^{\cdot\cdot} \sin \varphi_{ki} + m_{ki} \varepsilon_{ki} g \sin(\varphi_{ki} - \chi) \right] \qquad (k,\ i = 1, 2)$$

$$M x^{\cdot\cdot} + cx = \sum_{k,\,i=1}^{2} m_{ki} \varepsilon_{ki} (\omega_{ki}{}^{\cdot} \sin \varphi_{ki} + \omega_{ki}{}^2 \cos \varphi_{ki}) \tag{3.1}$$

где m_{ki}, ε_{ki}, I_{ki}, L_{ki} — масса, эксцентриситет, момент инерции и момент на валу i-го дебаланса в k-й группе; M, c — масса системы и жесткость упругой связи, χ — угол между направлением движения твердого тела и вертикалью. Вибраторы в каждой паре будем считать одинаковыми, т. е.

$$m_{11} = m_{12} = m_1, \quad \varepsilon_{11} = \varepsilon_{12} = \varepsilon_1, \quad L_{11} = L_{12} = L_1, \quad I_{11} = I_{12} = I_1$$
$$m_{21} = m_{22} = m_2, \quad \varepsilon_{21} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_2, \quad L_{21} = L_{22} = L_2, \quad I_{21} = I_{22} = I_2$$

Разыскиваем условия существования и устойчивости режима, когда вибраторы первой пары вращаются с угловой скоростью, в два раза меньшей, чем вибраторы второй пары.

Условия периодичности первого приближения при $2\nu_{11}^{(0)} = 2\nu_{12}^{(0)} = \nu_{21}^{(0)} = \nu_{22}^{(0)} = 2\nu^{(0)}$ приводят к уравнениям

$$L_1(\nu^{(0)}) = 0, \qquad L_2(2\nu^{(0)}) = 0$$
$$\sin(\alpha_{12}^{(0)} - \alpha_{11}^{(0)}) = 0, \qquad \sin(\alpha_{22}^{(0)} - \alpha_{21}^{(0)}) = 0 \tag{3.2}$$

Для существования разыскиваемого режима необходимо, чтобы уравнения для определения частоты допускали одинаковые решения. Ограничимся далее изучением случая, когда вибраторы в каждой паре движутся синфазно

$$\alpha_{11}^{(0)} = \alpha_{12}^{(0)} = \alpha_1^{(0)}, \qquad \alpha_{21}^{(0)} = \alpha_{22}^{(0)} = \alpha_2^{(0)} \tag{3.3}$$

Тогда

$$Q_1^{(2)} = \frac{16 m_2 \varepsilon_2 m_1^2 \varepsilon_1^2 g \nu^{(0)2}}{M I_1^2 (p^2 - 4\nu^{(0)2})} \cos(2\alpha_1^{(0)} - \alpha_2^{(0)} - \chi) +$$
$$+ \frac{1}{2I_1}\left(\frac{dL_1}{d\omega_{11}}\right)\nu_{11}^{(1)} + \frac{1}{2I_1}\left(\frac{dL_1}{d\omega_{12}}\right)\nu_{12}^{(1)} = 0$$
$$Q_2^{(2)} = -\frac{8 m_2 \varepsilon_2 m_1^2 \varepsilon_1^2 g \nu^{(0)2}}{M I_1 I_2 (p^2 - 4\nu^{(0)2})} \cos(2\alpha_1^{(0)} - \alpha_2^{(0)} - \chi) + \frac{1}{2I_2}\left(\frac{dL_2}{d\omega_{21}}\right)\nu_{21}^{(1)} + \frac{1}{2I_2}\left(\frac{dL_2}{d\omega_{22}}\right)\nu_{22}^{(1)} = 0$$
$$2\nu_{11}^{(1)} = 2\nu_{12}^{(1)} = \nu_{21}^{(1)} = \nu_{22}^{(1)} = 2\nu^{(1)} \tag{3.4}$$

Обычно $(dL_k / d\omega_{ki}) < 0$, поэтому $\nu^{(1)} = 0$, и уравнение, связывающее постоянные $\alpha_1^{(0)}$ и $\alpha_2^{(0)}$, получаем в виде

$$\cos(2\alpha_1^{(0)} - \alpha_2^{(0)} - \chi) = 0$$

откуда $2\alpha_1^{(0)} - \alpha_2^{(0)} = \chi + \pi / 2$ или $2\alpha_1^{(0)} - \alpha_2^{(0)} = \chi + 3\pi / 2$.

Из условий устойчивости первой группы ($\lambda_1^2 < 0$) вытекает, что фазировка (3.4) будет устойчива, если $p^2 > 4\nu^{(0)2}$. Соотношения (2.4) приводят к требованию [6] $-(dL_k / d\omega_{ki}) < 0$. Наконец, условие отрицательности корней уравнения (2.7) показывает, что при $p^2 > 4\nu^{(0)2}$ устойчивым будет режим, когда $2\alpha_1^{(0)} - \alpha_2^{(0)} = \chi + 3\pi / 2$. Примем начальные фазы вращения вибраторов первой пары $\alpha_{11}^{(0)}$ и $\alpha_{12}^{(0)}$ равными нулю. Тогда закон колебаний твердого тела $x(t)$ будет

$$x = \frac{2 m_1 \varepsilon_1 \nu^2}{M(p^2 - \nu^2)} \cos \nu t + \frac{8 m_2 \varepsilon_2 \nu^2}{M(p^2 - 4\nu^2)} \cos\left(2\nu t - \chi - \frac{3\pi}{2}\right) + O(\mu) =$$
$$= \frac{2 m_1 \varepsilon_1 \nu^2}{M(p^2 - \nu^2)} \cos \nu t - \frac{8 m_2 \varepsilon_2 \nu^2}{M(p^2 - 4\nu^2)} \sin(2\nu t - \chi) + O(\mu) \tag{3.5}$$

причем $\nu = \nu^{(0)} + O(\mu^2)$.

Аналогично исследуются и другие решения уравнения (3.2).

Автор благодарит И. И. Блехмана за обсуждение результатов и ценные советы.

Поступила 8 VII 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Блехман И. И. Синхронизация динамических систем. М., «Наука», 1971.
2. Зарецкий Л. Б. Кратная синхронизация центробежных вибровозбудителей. Изв. АН СССР. МТТ, 1971, № 4.
3. Нагаев Р. Ф. Общая задача о синхронизации в почти консервативной системе. ПММ, 1965, т. 29, вып. 5.
4. Нагаев Р. Ф., Ходжаев К. Ш. Синхронные движения в системе объектов с несущими связями. ПММ, 1967, т. 31, вып. 4.
5. Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М., Гостехиздат, 1966.
6. Ходжаев К. Ш. Синхронизация механических вибраторов, связанных с линейной колебательной системой. Инж. ж. МТТ, 1967, № 4.