Прикладная математика и механика. Том 36, 1972

УДК 531.36

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ СО СЛУЧАЙНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

М. З. Коловский, З. В. Троицкая

(Ленинград)

Предлагается приближенный метод исследования устойчивости систем линейных уравнений со стационарными случайными коэффициентами, основанный на использовании метода возмущений. Задача сводится к исследованию устойчивости системы конечно-разностных уравнений, коэффициенты которой определяются по спектральным плотностям случайных параметров.

Условия устойчивости систем линейных уравнений со случайными коэффициентами рассматривались многими авторами [1–5]. Для систем, коэффициенты которых являются гауссовскими белыми шумами, получены точные критерии устойчивости [1]. В ряде работ, главным образом для систем второго порядка с малыми стационарными возмущениями параметров, найдены приближенные условия, основанные на использовании асимптотических методов [3, 4]. Применение тех же методов к системам высокого порядка приводит к сложной вычислительной схеме.

1. Рассмотрим уравнение n-го порядка

$$\mathbf{y}^{\cdot} = [C + \mu G(t) - \mu^2 B_1]\,\mathbf{y} \tag{1.1}$$

Здесь C — вещественная матрица $n \times n$ с собственными числами $\lambda_s = ik_s$ $(s = 1,\ldots, 2r)$, $\operatorname{Re}\lambda_s < 0$ $(s = 2r + 1,\ldots, n)$; предполагается, что все k_s различны (и, очевидно, попарно противоположны). Элементы матрицы $G(t)$ — центрированные стационарные случайные процессы, B_1 — вещественная матрица, μ — малый параметр.

Если $\mathbf{h}_m$ $(m = 1,\ldots, n)$ —линейно независимые собственные векторы матрицы C, то преобразованием $\mathbf{x} = H^{-1}\mathbf{y}$, где $H = \|\mathbf{h}_1,\ldots, \mathbf{h}_n\|$, система (1.1) приводится к виду

$$\mathbf{x}^{\cdot} = [A + \mu P(t) - \mu^2 B]\,\mathbf{x} \tag{1.2}$$

где $A = \|k_1 i,\ldots, k_{2r}\, i,\ \lambda_{2r+1},\ldots, \lambda_n\|$ — диагональная матрица, а $P = H^{-1} GH$ и $B = H^{-1}B_1H$ — комплексные матрицы.

Используя идеи метода возмущений, будем искать решение уравнения (1.2) в виде ряда

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mu\mathbf{x}_1 + \mu^2\mathbf{x}_2 + \ldots \tag{1.3}$$

при начальных условиях $\mathbf{x}_0(0) = \mathbf{x}(0) = \mathbf{c}$, $\mathbf{x}_j(0) = 0$ $(j > 0)$, предполагая, что для каждой из реализаций $P(t)$ этот ряд сходится на некотором интервале $[0, T]$, где $T \sim \mu^{-1}$. Подставляя (1.3) в (1.2) и выделяя члены с различными степенями μ, получаем систему рекуррентных уравнений

$$\mathbf{x}_0^{\cdot} = A\mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x}_1^{\cdot} = A\mathbf{x}_1 + P(t)\,\mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x}_2^{\cdot} = A\mathbf{x}_2 + P(t)\,\mathbf{x}_1 - B\mathbf{x}_0 \tag{1.4}$$

решая которую, находим

$$\mathbf{x}_0 = e^{At}\mathbf{c}, \qquad \mathbf{x}_1 = \int\limits_0^t e^{A(t-\tau)} P(\tau)\, e^{A\tau}\mathbf{c}\, d\tau$$

$$\mathbf{x}_2 = \int\limits_0^t e^{A(t-\tau)}\left[P(\tau)\int\limits_0^\tau e^{A(\tau-\tau_1)} P(\tau_1)\, e^{A\tau_1}\mathbf{c}\, d\tau_1 - Be^{A\tau}\mathbf{c}\right] d\tau \qquad (1.5)$$

Об устойчивости системы (1.2) будем судить по изменению среднего значения квадрата нормы $\mathbf{x}(t)$ $\langle \mathbf{x}(t)\,\bar{\mathbf{x}}(t)\rangle$, где черта сверху означает сопряженную величину. Так как

$$\langle \mathbf{x}(t)\,\bar{\mathbf{x}}(t)\rangle = \sum_{s=1}^n \langle x_s(t)\,\bar{x}_s(t)\rangle \qquad (1.6)$$

задача сводится к вычислению среднеквадратичных значений $|x_s(t)|$. Из (1.3) находим

$$\langle |x_s|^2\rangle = \langle x_{0s}\bar{x}_{0s}\rangle + \mu(\langle x_{1s}\bar{x}_{0s}\rangle + \langle x_{0s}\bar{x}_{1s}\rangle) + \mu^2(\langle x_{1s}\bar{x}_{1s}\rangle + \\ + \langle x_{2s}\bar{x}_{0s}\rangle + \langle x_{0s}\bar{x}_{2s}\rangle) + \ldots \qquad (1.7)$$

Пусть компоненты c_s вектора начальных условий $\mathbf{c}$ — случайные величины, удовлетворяющие условиям

$$\langle c_s c_m\rangle = \langle |c_s|^2\rangle\,\delta_{sm}, \quad \langle p_{lk}(t)\,\bar{c}_s\rangle \equiv 0 \quad (l, k, s, m = 1, \ldots, n) \qquad (1.8)$$

где δ_{sm} — символ Кронекера, $p_{lk}(t)$ — элементы матрицы $P(t)$. В дальнейшем при вычислении $\langle \mathbf{x}(t)\,\bar{\mathbf{x}}(t)\rangle$ будет производиться усреднение не только по реализациям $P(t)$, но и по множеству начальных условий. Если при этом величина $\langle \mathbf{x}(t)\,\bar{\mathbf{x}}(t)\rangle$ останется ограниченной при $t\to\infty$, каково бы ни было множество c_s, удовлетворяющее условиям (1.8), система (1.2) будет считаться устойчивой.

Вычисляя слагаемые, входящие в (1.7), и учитывая (1.8), получим

$$\langle x_{0s}(T)\,\bar{x}_{0s}(T)\rangle = \langle e^{\lambda_s T} c_s e^{\bar{\lambda}_s T}\bar{c}_s\rangle = \langle |c_s|^2\rangle\, e^{2\operatorname{Re}\lambda_s T} = e^{2\operatorname{Re}\lambda_s T}\langle x_s(0)\,\bar{x}_s(0)\rangle \qquad (1.9)$$

$$\langle x_{0s}(T)\,\bar{x}_{1s}(T)\rangle = \int\limits_0^T e^{\lambda_s T} e^{\lambda_s(T-\tau)}\sum_{m=1}^n e^{\bar{\lambda}_s\tau}\langle p_{sm}(\tau)\, c_s\bar{c}_m\rangle\, d\tau = 0 \qquad (1.10)$$

$$\langle x_{1s}(T)\,\bar{x}_{1s}(T)\rangle = e^{2\operatorname{Re}\lambda_s T}\sum_{m=1}^n \langle |c_m|^2\rangle \int\limits_0^T\int\limits_0^T e^{(\lambda_m-\lambda_s)\tau} e^{(\bar{\lambda}_m-\bar{\lambda}_s)\tau_1} K_{sm}(\tau-\tau_1)\, d\tau_1\, d\tau =$$

$$= e^{2\operatorname{Re}\lambda_s T}\sum_{m=1}^n \langle x_m(0)\,\bar{x}_m(0)\rangle \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty S_{sm}(\omega)\,|e^{(\lambda_m-\lambda_s+i\omega)T} - 1|\,|\lambda_m - \lambda_s + i\omega|^{-2}\, d\omega \qquad (1.11)$$

$$\langle x_{2s}(T)\,\bar{x}_{0s}(T)\rangle = e^{2\operatorname{Re}\lambda_s T}\langle |c_s|^2\rangle\left\{\sum_{m=1}^n\int\limits_0^T\int\limits_0^\tau e^{(\lambda_m-\lambda_s)(\tau-\tau_1)} K'_{sm}(\tau-\tau_1)\, d\tau_1\, d\tau - b_{ss}T\right\} =$$

$$= e^{2\operatorname{Re}\lambda_s T}\langle x_s(0)\,\bar{x}_s(0)\rangle\left\{\sum_{m=1}^n \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^\infty S'_{sm}(\omega)\left[\frac{e^{(\lambda_m-\lambda_s+i\omega)T} - 1}{(\lambda_m-\lambda_s+i\omega)^2} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{T}{\lambda_m-\lambda_s+i\omega}\right] d\omega - b_{ss}T\right\} \qquad (1.12)$$

Здесь

$$K_{sm}(\tau) = \langle p_{sm}(t)\,\bar{p}_{sm}(t-\tau)\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{sm}(\omega)\,e^{i\omega\tau}\,d\omega$$

$$K'_{sm}(\tau-\tau_1) = \langle p_{sm}(\tau)\,p_{ms}(\tau_1)\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S'_{sm}(\omega)\,e^{i\omega(\tau-\tau_1)}\,d\omega$$

Пусть для некоторых s и m выполняется соотношение $\lambda_s - \lambda_m = ik_{sm}$, где k_{sm} — вещественное число. Тогда в подынтегральных выражениях (1.11) и (1.12) имеются особенности, приводящие при интегрировании к появлению слагаемых, пропорциональных T. Для выделения этих слагаемых примем, что $T \gg T_1$ (T_1 — время корреляции процессов $p_{sm}(t)$); тогда для $S_{sm}(\omega)$ и $S'_{sm}(\omega)$ в диапазонах $[k_{sm} - 1/T_1,\ k_{sm} + 1/T_1]$ справедливы соотношения $S_{sm}(\omega) \approx S_{sm}(k_{sm}) = \text{const}$, $S'_{sm}(\omega) \approx$ $\approx S'_{sm}(k_{sm}) = \text{const}$. Учитывая это, получаем

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{sm}(\omega)\,|e^{(\lambda_m-\lambda_s+i\omega)T} - 1|^2\,|k_{sm}-\omega|^2\,d\omega =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{sm}(\omega)\,\frac{1-\cos(k_{sm}-\omega)T}{(k_{sm}-\omega)^2}\,d\omega = \tag{1.13}$$

$$= \frac{1}{\pi} S_{sm}(k_{sm})\int_{k_{sm}-1/T_1}^{k_{sm}+1/T_1}\frac{1-\cos(k_{sm}-\omega)T}{(k_{sm}-\omega)^2}\,d\omega + \varphi_{sm}(T) = TS_{sm}(k_{sm}) + \psi_{sm}(T)$$

Здесь $\varphi_{sm}(T)$ и $\psi_{sm}(T)$ — функции, остающиеся ограниченными при $T \to \infty$. Аналогично получаем при $\lambda_s - \lambda_m = ik_{sm}$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S'_{sm}(\omega)\left[\frac{e^{(\lambda_m-\lambda_s+i\omega)T}-1}{(\lambda_m-\lambda_s+i\omega)^2} - \frac{T}{\lambda_m-\lambda_s+i\omega}\right]d\omega = \frac{T}{2}S'_{sm}(k_{sm}) + \eta_{sm}(T) \tag{1.14}$$

где $\eta_{sm}(T)$ — ограниченная функция.

Подставим (1.13) и (1.14) в (1.11) и (1.12) и выделим члены, неограниченно возрастающие с ростом T. Очевидно, что такие члены могут быть лишь в выражениях, соответствующих $s \leqslant 2r$. При $s > 2r$ множитель $e^{2\mathrm{Re}\lambda_s T}$ исключает возможность неограниченного роста, поскольку $\mathrm{Re}\lambda_s < 0$. При $s \leqslant 2r$ неограниченными могут быть только слагаемые, соответствующие $m \leqslant 2r$, так как при $m > 2r$, $s \leqslant 2r$ разность $\lambda_m - \lambda_s$ не может быть чисто мнимой. Учитывая это и подставляя (1.9) — (1.12) в (1.7), получаем для $s \leqslant 2r$ ($k_{sm} = k_s - k_m$)

$$\langle x_s(T)\,\bar{x}_s(T)\rangle = \langle x_s(0)\,\bar{x}_s(0)\rangle + \mu^2 T\Big\{\sum_{m=1}^{2r}[S_{sm}(k_s-k_m)\langle x_m(0)\,\bar{x}_m(0)\rangle +$$

$$+ \mathrm{Re}\,S'_{sm}(k_s-k_m)\langle x_s(0)\,\bar{x}_s(0)\rangle] - 2\,\mathrm{Re}\,b_{ss}\langle x_s(0)\,\bar{x}_s(0)\rangle\Big\} + \mu^2\theta_s(T) + \ldots \tag{1.15}$$

где $\theta_s(T)$ — ограниченная функция, а отброшенные члены имеют порядок малости выше второго. Если $T \sim \mu^{-1}$, то $\mu^2 T \sim \mu^1$ и с точностью до членов порядка μ^2 выражения (1.15) могут быть записаны в форме

$$\mathrm{v}(T) = \mathrm{v}(0) + \mu^2 T \Gamma \mathrm{v}(0) \tag{1.16}$$

Здесь $\mathrm{v}(t)$ — $2r$-мерный вектор с компонентами $\langle |x_m(t)|^2 \rangle$, Γ — матрица $2r \times 2r$ с элементами

$$\gamma_{ss} = S_{ss}(0) + \sum_{m=1}^{2r} \operatorname{Re} S'_{sm}(k_s - k_m) - 2 \operatorname{Re} b_{ss}, \quad \gamma_{sm} = S_{sm}(k_s - k_m) \tag{1.17}$$

Можно убедиться в том, что при сделанных предположениях величины $\langle x_s(T)\, x_m(T) \rangle$ при $s \neq m$ и $\langle p_{lk}(T)\, \bar{x}_s(T) \rangle$ будут малыми порядка μ^2. Если теперь аналогичным путем выразить $\mathrm{v}(2T)$ через $\mathrm{v}(T)$, то эти величины дадут в выражениях (1.10) — (1.12) поправки порядка μ^3 и выше, что не отразится на конечных результатах.

Таким образом, величины $\mathrm{v}(pT)$ и $\mathrm{v}[(p-1)T]$ при целых p связаны конечно-разностными соотношениями

$$\mathrm{v}(pT) = (E + \mu^2 T \Gamma)\, \mathrm{v}[(p-1)T] \tag{1.18}$$

где E — единичная матрица.

Так как при $s > 2r$ величины $\langle |x_s(T)|^2 \rangle$ ограничены, достаточным условием ограниченности $\langle |\mathrm{x}(T)|^2 \rangle$ является ограниченность решений системы (1.18) при любом $\mathrm{v}(0)$. Для этого, как известно, достаточно, чтобы корни уравнения

$$\det [E + \mu^2 T \Gamma - E\eta] = 0 \tag{1.19}$$

удовлетворяли условию $|\eta_s| < 1$ $(s = 1, \ldots, 2r)$. Отсюда можно получить эквивалентное (при малых μ) условие, состоящее в том, что уравнение

$$\det (\Gamma - E\rho) = 0 \tag{1.20}$$

должно иметь все корни с отрицательными вещественными частями.

Итак, исследование устойчивости системы (1.2) сводится к исследованию корней характеристического уравнения (1.20). Очевидно, что в силу ограниченности матрицы H^{-1} условия устойчивости для систем (1.2) и (1.1) совпадают.

2. Примеры. 1°. Исследуем устойчивость системы второго порядка

$$x^{\cdot\cdot} + 2n\mu^2 x^{\cdot} + k^2 x + \mu\nu(t)\, x^{\cdot} + \mu\xi(t)\, x = 0 \tag{2.1}$$

Записав его в виде системы (1.1), получаем

$$C = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ k^2 & 0 \end{Vmatrix}, \qquad G(t) = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ -\xi(t) & -\nu(t) \end{Vmatrix}, \qquad B = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2n \end{Vmatrix}$$

Видно, что в данном случае

$$H = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ ik & -ik \end{Vmatrix}$$

Преобразуя систему к форме (1.2), получим

$$A = \begin{Vmatrix} ik & 0 \\ 0 & -ik \end{Vmatrix}, \quad P(t) = \frac{1}{2ki} \begin{Vmatrix} -\xi(t) - ik\nu(t), & -\xi(t) + ik\nu(t) \\ \xi(t) + ik\nu(t), & \xi(t) - ik\nu(t) \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} n & -n \\ -n & n \end{Vmatrix}$$

Далее находим

$$S_{11}(\omega)=S_{21}(\omega)=\frac{1}{4k^2}S_\xi(\omega)+\frac{1}{4}S_\nu(\omega)+\frac{1}{2k}\operatorname{Im}S_{\xi\nu}(\omega)$$

$$S_{12}(\omega)=S_{22}(\omega)=\frac{1}{4k^2}S_\xi(\omega)+\frac{1}{4}S_\nu(\omega)-\frac{1}{2k}\operatorname{Im}S_{\xi\nu}(\omega)$$

$$\operatorname{Re}S_{11}'(\omega)=\operatorname{Re}S_{22}'(\omega)=-\frac{1}{4k^2}S_\xi(\omega)+\frac{1}{4}S_\nu(\omega)$$

$$\operatorname{Re}S_{12}'(\omega)=\frac{1}{4k^2}S_\xi(\omega)+\frac{1}{4}S_\nu(\omega)-\frac{1}{2k}\operatorname{Im}S_{\xi\nu}(\omega)$$

$$\operatorname{Re}S_{21}'(\omega)=\frac{1}{4k^2}S_\xi(\omega)+\frac{1}{4}S_\nu(\omega)+\frac{1}{2k}\operatorname{Im}S_{\xi\nu}(\omega)$$

где $S_\xi(\omega)$, $S_\nu(\omega)$, $S_{\xi\nu}(\omega)$ — спектральные плотности $\xi(t)$, $\nu(t)$ и их взаимная спектральная плотность. По формулам (1.17) находим

$$\gamma_{11}=\gamma_{22}=\frac{1}{2}S_\nu(0)+\frac{1}{4}S_\nu(2k)+\frac{1}{4k^2}S_\xi(2k)-\frac{1}{2k}\operatorname{Im}S_{\xi\nu}(2k)-2n$$

$$\gamma_{12}=\gamma_{21}=\frac{1}{4k^2}S_\xi(2k)+\frac{1}{4}S_\nu(2k)-\frac{1}{2k}\operatorname{Im}S_{\xi\nu}(2k)$$

Составляя обычные условия Гурвица для уравнения (1.20), приходим к следующим условиям устойчивости:

$$n>\frac{1}{4}S_\nu(0)+\frac{1}{4}S_\nu(2k)+\frac{1}{4k^2}S_\xi(2k)-\frac{1}{k}\operatorname{Im}S_{\xi\nu}(2k)\tag{2.2}$$

При $\nu=0$ и $S_\xi(\omega)\equiv S_0$ это условие дает $n>S_0/4k^2$, что совпадает с известным условием устойчивости в случае, когда случайный параметр является «белым шумом».

2°. Рассмотрим систему двух уравнений второго порядка

$$\begin{gathered}z_1^{\cdot\cdot}+k_1^2z_1+\mu^2\beta_1z_1^{\cdot}+\mu\xi(t)(a_{11}z_1+a_{12}z_2)=0\\ z_2^{\cdot\cdot}+k_2^2z_2+\mu^2\beta_2z_2^{\cdot}+\mu\xi(t)(a_{21}z_1+a_{22}z_2)=0\end{gathered}\tag{2.3}$$

Записав систему (2.3) в виде четырех уравнений первого порядка и преобразовав матрицу C к диагональному виду, получим

$$A=\begin{Vmatrix}ik_1&0&0&0\\0&-ik_1&0&0\\0&0&ik_2&0\\0&0&0&-ik_2\end{Vmatrix},\qquad B=\frac{1}{2}\begin{Vmatrix}\beta_1&-\beta_1&0&0\\-\beta_1&\beta_1&0&0\\0&0&\beta_2&-\beta_2\\0&0&-\beta_2&\beta_2\end{Vmatrix}$$

$$P(t)=\frac{i\xi(t)}{2k_1\cdot k_2}\begin{Vmatrix}a_{11}k_2&a_{11}k_2&a_{12}k_2&a_{12}k_2\\-a_{11}k_2&-a_{11}k_2&-a_{12}k_2&-a_{12}k_2\\a_{21}k_1&a_{21}k_1&a_{22}k_1&a_{22}k_1\\-a_{21}k_1&-a_{21}k_1&-a_{22}k_1&-a_{22}k_1\end{Vmatrix}$$

Спектральные плотности $S_{sm}(\omega)$ в данном случае равны

$$S_{12}=S_{22}=-S_{12}=-S_{21}=\frac{1}{4}\frac{a_{11}^2}{k_2^2}S_\xi$$

$$S_{13}=S_{31}=S_{24}=S_{42}=-S_{18}=-S_{31}=-S_{24}=-S_{42}=\frac{1}{4}\frac{a_{12}a_{21}}{k_1k_2}S_\xi$$

$$S_{33}=S_{44}=-S_{34}=-S_{43}=\frac{1}{4}\frac{a_{22}^2}{k_1^2}S_\xi$$

$$S'_{sm}(\omega)=-S_{sm}(\omega)$$

Элементы матрицы Г, определенные по формулам (1.17), при этом имеют такой вид:

$$\gamma_{11}=\gamma_{22}=\frac{a_{11}^2}{4k_1^2}S_\xi(2k_1)+\frac{a_{12}a_{21}}{4k_1k_2}(S_\xi^+-S_\xi^-)-\beta_1$$

$$\gamma_{33}=\gamma_{44}=\frac{a_{22}^2}{4k_2^2}S_\xi(2k_2)+\frac{a_{12}a_{21}}{4k_1k_2}(S_\xi^+-S_\xi^-)-\beta_2$$

$$\gamma_{12}=\gamma_{21}=-\frac{a_{11}^2}{4k_1^2}S_\xi(2k_1),\qquad \gamma_{34}=\gamma_{43}=-\frac{1}{4}\frac{a_{22}^2}{k_2^2}S_\xi(2k_2)$$

$$\gamma_{13}=\gamma_{31}=\gamma_{24}=\gamma_{42}=\frac{1}{4}\frac{a_{12}a_{21}}{k_1k_2}S_\xi^-$$

$$\gamma_{14}=\gamma_{41}=\gamma_{23}=\gamma_{32}=\frac{1}{4}\frac{a_{11}a_{21}}{k_1k_2}S_\xi^+$$

$$S_\xi^+=S_\xi(k_1+k_2),\qquad S_\xi^-=S_\xi(k_1-k_2)=S_\xi(k_2-k_1)$$

Матрица Г после преобразований приводится к виду

$$\Gamma=\begin{Vmatrix}\Gamma_1 & \Gamma_2\\ 0 & \Gamma_3\end{Vmatrix}$$

где Γ_1, Γ_2, Γ_3 — квадратные матрицы второго порядка.

Уравнение (1.20) при этом распадается на два уравнения

$$\det(\Gamma_1-E\rho)=0,\qquad \det(\Gamma_3-E\rho)=0$$

Элементы матриц Γ_1 и Γ_3 соответственно равны

$$\gamma_{11}^{(1)}=\frac{a_{12}a_{21}}{4k_1k_2}(S_\xi^+-S_\xi^-)-\beta_1,\qquad \gamma_{22}^{(1)}=\frac{a_{12}a_{21}}{4k_1k_2}(S_\xi^+-S_\xi^-)-\beta_2$$

$$\gamma_{12}^{(1)}=\gamma_{21}^{(1)}=-\frac{a_{12}a_{21}}{4k_1k_2}(S_\xi^+-S_\xi^-)$$

$$\gamma_{11}^{(3)}=\frac{1}{2}\frac{a_{22}^2}{k_2^2}S_\xi(2k_2)+\frac{a_{12}a_{21}}{4k_1k_2}(S_\xi^+-S_\xi^-)-\beta_2$$

$$\gamma_{22}^{(3)}=\frac{1}{2}\frac{a_{11}^2}{k_1^2}S_\xi(2k_1)+\frac{a_{12}a_{21}}{4k_1k_2}(S_\xi^+-S_\xi^-)-\beta_1$$

$$\gamma_{12}^{(3)}=\gamma_{21}^{(3)}=\frac{a_{12}a_{21}}{4k_1k_2}(S_\xi^++S_\xi^-)$$

Записав условия Гурвица, получим следующие условия устойчивости:

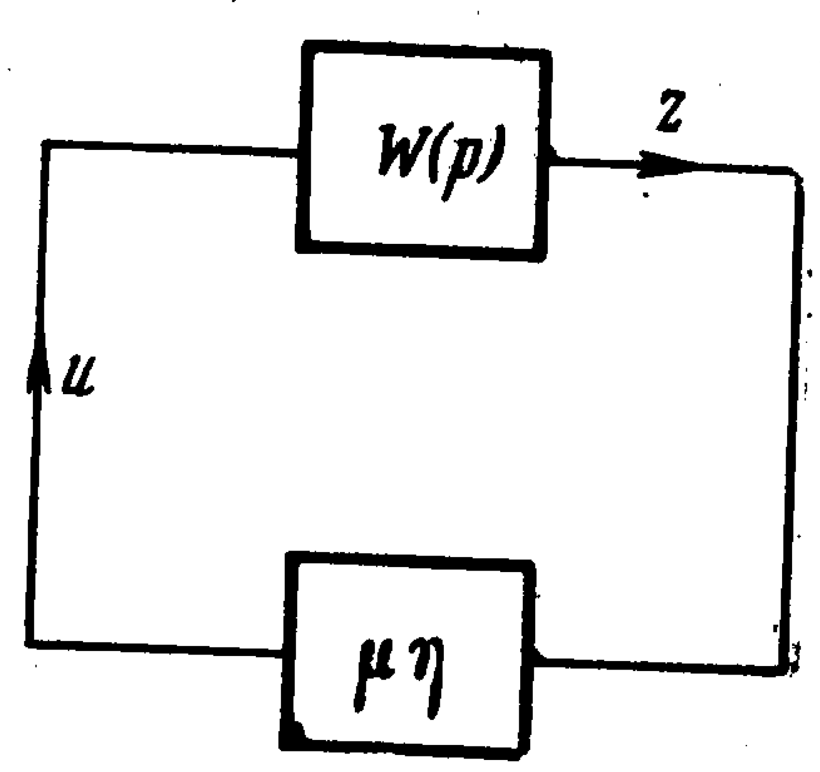
$$\beta_1>\frac{a_{11}^2}{2k_1^2}S_\xi(2k_1)+\frac{a_{12}a_{21}}{4k_1k_2}(S_\xi^+-S_\xi^-)\tag{2.4}$$

$$\beta_2>\frac{a_{22}^2}{2k_2^2}S_\xi(2k_2)+\frac{a_{12}a_{21}}{4k_1k_2}(S_\xi^+-S_\xi^-)$$

$$\left[\beta_1-\frac{a_{11}^2}{2k_1^2}S_\xi(2k_1)-\frac{a_{12}a_{21}}{4k_1k_2}(S_\xi^+-S_\xi^-)\right]\times$$

$$\times\left[\beta_2-\frac{a_{22}^2}{2k_2^2}S_\xi(2k_2)-\frac{a_{12}a_{21}}{4k_1\cdot k_2}(S_\xi^+-S_\xi^-)\right]>\frac{a_{12}^2a_{21}^2}{16k_1^2k_2^2}(S_\xi^+-S_\xi^-)^2$$

3°. Рассмотрим систему автоматического управления, содержащую в контуре элемент со случайным коэффициентом усиления $k[1+\mu\eta(t)]$, где η — центрированный стационарный случайный процесс. Разложив передаточную функцию $W(p)$ (фигура) на простейшие дроби, можно записать уравнения движения системы в форме



$$z=W(p)u=\sum_{s=1}^{n}\frac{B_s}{p-\lambda_s}u,\qquad u=\mu\eta(t)z\tag{2.5}$$

Предположим, что среди корней характеристического уравнения имеется одна пара комплексных корней с малой отрицательной вещественной частью

$$\lambda_{12} = -\mu^2 n \pm ik \tag{2.6}$$

Остальные корни удовлетворяют условиям $\operatorname{Re}\lambda_s < 0$ ($s = 3, \ldots, n$), причем $|\operatorname{Re}\lambda_s| \gg \mu^2 n$. Очевидно, что при этом $B_1 = \bar{B}_2$.

Введя новые переменные

$$x_s = \frac{B_s}{p-\lambda_s} u = \frac{B_s}{p-\lambda_s} \mu\eta(t) z$$

приводим уравнения (2.5) к форме

$$x_s^{\boldsymbol{\cdot}} = \lambda_s x_s + B_s \mu\eta(t) \sum_{s=1}^{n} x_s$$

или, с учетом (2.6)

$$x_1^{\boldsymbol{\cdot}} = -\mu^2 n x_1 + ikx_1 + \mu B_1 \eta(t) \sum_{s=1}^{n} x_s$$

$$x_2^{\boldsymbol{\cdot}} = -\mu^2 n x_2 - ikx_2 + \mu B_2 \eta(t) \sum_{s=1}^{n} x_s$$

$$x_r^{\boldsymbol{\cdot}} = \lambda_r x_r + \mu B_2 \eta(t) \sum_{s=1}^{n} x_s \qquad (r = 3, \ldots, n)$$

Определяя элементы матрицы Г, находим

$$\gamma_{11} = \gamma_{22} = 2a^2 S_\eta(0) + (a^2 + b^2) S_\eta(2k) - 2n$$

$$\gamma_{12} = \gamma_{21} = (a^2 + b^2) S_\eta(2k) \qquad a = \operatorname{Re} B_1, \qquad b = \operatorname{Im} B_1$$

Отсюда получаем условие устойчивости

$$n > a^2 S_\eta(0) + (a^2 + b^2) S_\eta(2k) \tag{2.7}$$

Поступила 5 III 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Хасьминский Р. З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. М., «Наука», 1969.
2. Кац И. Я., Красовский Н. Н. Об устойчивости систем со случайными параметрами. ПММ, 1960, т. 24, вып. 5.
3. Стратонович Р. Л. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. М., «Сов. радио», 1961.
4. Коломиец В. Г. О параметрическом случайном воздействии на линейные и нелинейные колебательные системы. Укр. матем. ж., 1963, т. 15, вып. 2.
5. Челпанов И. Б. Колебания системы второго порядка при случайных изменениях параметра. ПММ, 1962, т. 26, вып. 4.
6. Weidenhammer F., Stabilitatsbedingungen fur Schwingungssysteme mit zufalliger Parametererregung durch weibes Rauschen, Ingr.— Arch., 1966, Bd. 35, Nr. 1 (Русс. перев. «Механика», Сб. перев. иностр. статей, 1967, № 6).