Прикладная математика и механика. Том 36, 1972

УДК 531.314.1

О ПРИВЕДЕНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НЕГОЛОНОМНОЙ МЕХАНИКИ К ФОРМЕ ЛАГРАНЖА

А. С. Сумбатов

(Москва)

Рассматривается задача об эквивалентности некоторой системы обыкновенных дифференциальных уравнений системе уравнений Лагранжа.

Всюду, где это специально не оговорено, имеются в виду стационарные неголономные системы Чаплыгина с линейными связями.

Уравнения движения неголономных систем в форме Рауса, Чаплыгина по виду отличаются от уравнений Лагранжа второго рода наличием дополнительных членов (реакций связей, членов неголономности), что препятствует распространению методов интегрирования уравнений движения голономных систем на неголономные системы. Немногочисленные попытки [1,2] отыскать общие методы интегрирования уравнений неголономной механики сводились к преобразованию уравнений движения к форме Лагранжа [3]. Только в исключительных случаях уравнения движения неголономных систем имеют вид уравнений Лагранжа [1,4].

Задача об определении условий, гарантирующих эквивалентность данной системы дифференциальных уравнений

$$F_j(q_1^{\cdot\cdot},\ldots,q_n^{\cdot\cdot},q_1^{\cdot},\ldots,q_n^{\cdot},q_1,\ldots,q_n,t)=0 \qquad (j=1,\ldots,n) \tag{0.1}$$

системе Лагранжа

$$L_j(\theta)=0 \qquad (j=1,\ldots,n) \qquad \left(L_j=\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial q_j^{\cdot}}-\frac{\partial}{\partial q_j}\right) \tag{0.2}$$

где θ — некоторая функция от $q_1^{\cdot},\ldots,q_n^{\cdot}$, $q_1,\ldots,q_n$, t, известна давно. В работах [5-7] были получены необходимые и достаточные условия (условия Гельмгольца), на основании которых по виду уравнений (0.1) можно определить, является ли каждое из этих уравнений в отдельности уравнением Лагранжа относительно функции θ, названной Гельмгольцем кинетическим потенциалом. Следует отметить, что для уравнений Рауса, Чаплыгина условия Гельмгольца обычно не выполняются [8,9], тем не менее в некоторых случаях, комбинируя эти уравнения, можно заменить их эквивалентной системой Лагранжа [8].

В работе [10] была доказана теорема о том, что уравнения движения механической системы с линейными неинтегрируемыми связями

$$w_i=q_i^{\cdot}+\sum_{s=k+1}^{n}a_{is}(q_1,\ldots,q_n,t)\,q_s^{\cdot}+a_i(q_1,\ldots,q_n,t)=0 \quad (i=1,\ldots,k<n)$$

не равносильны системе уравнений (0.2), где

$$\theta=F+\sum_{i=1}^{k}\Lambda_i w_i, \quad F=\frac{1}{2}\sum_{j,h=1}^{n}b_{jh}q_j^{\cdot}q_h^{\cdot}+\sum_{j=1}^{n}c_jq_j^{\cdot}+P$$

(b_{jh}, c_j, P — произвольные функции от $q_1,\ldots,q_n,t$), Λ_i — некоторые функции, выбираемые из условия, чтобы уравнения экстремалей функционала $\int_{t_0}^{t_1}\theta dt$

имели вид (0.2) (условная вариационная задача с закрепленными концами). Но для некоторых неголономных механических систем уравнения (0.2) могут быть справедливы [11], когда существует частное решение так называемых «уравнений эквивалентности». В работе [11], указано, как составлять уравнения эквивалентности, но сами уравнения не приводятся и анализа их нет.

Если разрешить уравнения движения неголономной системы относительно ускорений, то правые части полученных уравнений будут представлять некоторые квадратичные формы скоростей. Ниже для системы двух таких уравнений с правыми частями, являющимися произвольными однородными квадратичными формами скоростей, доказывается теорема, которая при помощи только дифференцирования и алгебраических действий позволяет выяснить: можно ли получить данные уравнения из какой-нибудь системы уравнений Лагранжа путем разрешения относительно вторых производных, если кинетический потенциал — произвольная невырожденная однородная квадратичная форма скоростей.

1. Рассмотрим две системы уравнений

$$q_k^{\cdot\cdot} = F_k \qquad (k = 1, \ldots, m) \tag{1.1}$$

$$L_r(\theta) = 0 \qquad (r = 1, \ldots, m) \tag{1.2}$$

в которых

$$F_k = \frac{1}{2} \sum_{i, r=1}^{m} f_{ri}^k (q_1, \ldots, q_m) q_r^{\cdot} q_i^{\cdot} \qquad (f_{ri}^k = f_{ir}^k)$$

$$\theta = \frac{1}{2} \sum_{i, j=1}^{m} c_{ij} (q_1, \ldots, q_m) q_i^{\cdot} q_j^{\cdot} \qquad (c_{ij} = c_{ji})$$

причем

$$\det \| c_{ij} \| \neq 0 \tag{1.3}$$

Для эквивалентности этих систем необходимо [12], чтобы функция θ удовлетворяла совокупности дифференциальных уравнений с частными производными

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^2 \theta}{\partial q_r^{\cdot} \partial q_k^{\cdot}} F_k + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^2 \theta}{\partial q_r^{\cdot} \partial q_k} q_k^{\cdot} - \frac{\partial \theta}{\partial q_r} = 0 \qquad (r = 1, \ldots, m) \tag{1.4}$$

В уравнениях (1.4) величины $q_1^{\cdot}, \ldots, q_m^{\cdot}, q_1, \ldots, q_m$ рассматриваются как независимые переменные.

Значения $q_1^{\cdot}, \ldots, q_m^{\cdot}$ можно выбирать произвольно, поэтому коэффициенты квадратичных форм (1.4) должны тождественно обращаться в нуль

$$\omega_{rij} = \sum_{k=1}^{m} c_{rk} f_{ij}^k + \frac{\partial c_{ri}}{\partial q_j} + \frac{\partial c_{rj}}{\partial q_i} - \frac{\partial c_{ij}}{\partial q_r} = 0 \qquad (r, i, j = 1, \ldots, m) \tag{1.5}$$

Чтобы упростить систему уравнений (1.5), заменим каждое уравнение $\omega_{rij} = 0$ уравнением $\varkappa_{rij} = {}^1/_2 (\omega_{irj} + \omega_{jir}) = 0$, получим

$$\varkappa_{rij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m} (c_{kj} f_{ri}^k + c_{ki} f_{rj}^k) + \frac{\partial c_{ij}}{\partial q_r} = 0 \qquad (r, i, j = 1, \ldots, m) \tag{1.6}$$

Обратно $\omega_{ijr} = \varkappa_{rij} - \varkappa_{ijr} + \varkappa_{jri}$.

Соотношения (1.6), в которых функции f_{ri}^k предполагаются заданными, представляют систему ${}^1/_2\, m^2 (m + 1)$ уравнений с частными производными относительно $^1/_2\, m\,(m+1)$ неизвестных функций c_{ij}. Нас интересуют условия, когда эта система допускает частное решение, удовлетворяющее неравенству (1.3). Тогда в силу уравнений (1.4) систему уравнений (1.1) можно заменить равносильной системой (1.2).

2. Исследуем случай $m = 2$. Пусть

$$q_1^{\cdot\cdot} = {}^1/_2\, aq_1^{\cdot 2} + cq_1^{\cdot}q_2^{\cdot} + {}^1/_2 bq_2^{\cdot 2}, \quad q_2^{\cdot\cdot} = {}^1/_2\alpha q_1^{\cdot 2} + \gamma q_1^{\cdot}q_2^{\cdot} + {}^1/_2\beta q_2^{\cdot 2} \tag{2.1}$$

где a, b, c, α, β, γ — функции от q_1 и q_2. Обозначим

$$\theta = {}^1/_2 X(q_1, q_2)\, q_1^{\cdot 2} + Z(q_1, q_2)\, q_1^{\cdot}q_2^{\cdot} + {}^1/_2 Y(q_1, q_2)\, q_2^{\cdot 2} \tag{2.2}$$

Условие (1.3) примет вид

$$XY - Z^2 \neq 0 \tag{2.3}$$

Уравнения (1.6) запишутся в виде уравнений

$$\partial X/\partial q_1 + aX + \alpha Z = 0, \quad \partial X/\partial q_2 + cX + \gamma Z = 0 \tag{2.4}$$

$$\partial Y/\partial q_1 + cZ + \gamma Y = 0, \quad \partial Y/\partial q_2 + bZ + \beta Y = 0 \tag{2.5}$$

$$\begin{gathered}\partial Z/\partial q_1 + {}^1/_2\, [cX + (a+\gamma)\, Z + \alpha Y] = 0 \\ \partial Z/\partial q_2 + {}^1/_2\, [bX + (c+\beta)\, Z + \gamma Y] = 0\end{gathered} \tag{2.6}$$

которые при помощи дифференциалов можно записать короче

$$dX + (aX + \alpha Z)\, dq_1 + (cX + \gamma Z)\, dq_2 = 0 \tag{2.7}$$

$$dY + (cZ + \gamma Y)\, dq_1 + (bZ + \beta Y)\, dq_2 = 0 \tag{2.8}$$

$$\begin{gathered}dZ + {}^1/_2\, [cX + (a+\gamma)\, Z + \alpha Y]\, dq_1 + \\ + {}^1/_2\, [bx + (c+\beta)\, Z + \gamma Y] dq_2 = 0\end{gathered} \tag{2.9}$$

Введем в рассмотрение функции коэффициентов уравнений (2.1)

$$\begin{aligned}A_1 &= \frac{\partial a}{\partial q_2} - \frac{\partial c}{\partial q_1} - \frac{1}{2}(\alpha b - \gamma c) \\ A_2 &= \frac{\partial \alpha}{\partial q_2} - \frac{\partial \gamma}{\partial q_1} + \frac{1}{2}(\alpha c - \gamma a + \gamma^2 - \alpha\beta) \\ B_1 &= \frac{\partial \gamma}{\partial q_2} - \frac{\partial \beta}{\partial q_1} + \frac{1}{2}(\alpha b - \gamma c) \\ B_2 &= \frac{\partial c}{\partial q_2} - \frac{\partial b}{\partial q_1} - \frac{1}{2}(\gamma b - \beta c + c^2 - ab)\end{aligned} \tag{2.10}$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема. Для эквивалентности системы уравнений (2.1) какой-нибудь системе Лагранжа $L_1(\theta) = L_2(\theta) = 0$ (θ — некоторая функция (2.2), удовлетворяющая неравенству (2.3)) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из трех условий

1) $A_1 = B_1 = A_2 = B_2 = 0$
2) $A_1 = B_1 = 0$, $A_2 B_2 \neq 0$, $A_2 b - B_2\gamma = 0$, $A_2 c - B_2\alpha = 0$
   $B_2/A_2\, e^{\psi-\varphi} = \mathrm{const}$ ($d\varphi = adq_1 + cdq_2$, $d\psi = \gamma dq_1 + \beta dq_2$)
3) $A_1 = -B_1 \neq 0$, $A_2B_2 + A_1^2 \neq 0$

$$\frac{\partial}{\partial q_2}\left(-c\frac{A_2}{A_1} + a + \gamma + \alpha\frac{B_2}{A_1}\right) - \frac{\partial}{\partial q_1}\left(-b\frac{A_2}{A_1} + c + \beta + \gamma\frac{B_2}{A_1}\right) = 0$$

$$\frac{1}{2}\frac{A_2}{A_1}\left(-c\frac{A_2}{A_1}+a+\gamma+\alpha\frac{B_2}{A_1}\right)-\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{A_2}{A_1}\right)-a\frac{A_2}{A_1}+\alpha=0$$

$$\frac{1}{2}\frac{A_2}{A_1}\left(-b\frac{A_2}{A_1}+c+\beta+\gamma\frac{B_2}{A_1}\right)-\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{A_2}{A_1}\right)-c\frac{A_2}{A_1}+\gamma=0$$

$$-\frac{1}{2}\frac{B_2}{A_1}\left(-c\frac{A_2}{A_1}+a+\gamma+\alpha\frac{B_2}{A_1}\right)+\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{B_2}{A_1}\right)+\gamma\frac{B_2}{A_1}+c=0$$

$$-\frac{1}{2}\frac{B_2}{A_1}\left(-b\frac{A_2}{A_1}+c+\beta+\gamma\frac{B_2}{A_1}\right)+\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{B_2}{A_1}\right)+\beta\frac{B_2}{A_1}+b=0$$

Доказательство. Предположим, что система уравнений (2.4) — (2.6) имеет некоторое решение X, Y, Z, которое удовлетворяет неравенству (2.3). Рассмотрим $d(Z^2-XY)$ в силу (2.7) — (2.9)

$$d(Z^2-XY)=-(Z^2-XY)\left[(a+\gamma)\,dq_1+(c+\beta)\,dq_2\right]$$

Следовательно (см. (2.10))

$$A_1+B_1=0 \tag{2.11}$$

Вычисляя из уравнений (2.4) — (2.6) выражения

$$\frac{\partial^2 X}{\partial q_2\partial q_1}-\frac{\partial^2 X}{\partial q_1\partial q_2}=0,\qquad \frac{\partial^2 Y}{\partial q_2\partial q_1}-\frac{\partial^2 Y}{\partial q_1\partial q_2}=0,\qquad \frac{\partial^2 Z}{\partial q_2\partial q_1}-\frac{\partial^2 Z}{\partial q_1\partial q_2}=0$$

и пользуясь соотношением (2.11), получим систему уравнений

$$A_1X+A_2Z=0,\qquad -A_1Y+B_2Z=0,\qquad B_2X+A_2Y=0 \tag{2.12}$$

которой должны тождественно удовлетворять функции X, Y, Z.

Возможны два случая: $A_1=A_2=B_2=0$ либо $A_1^2+A_2^2+B_2^2\neq 0$.

В первом случае (условие 1)) система уравнений (2.7) — (2.9) является системой в полных дифференциалах. В этом можно убедиться, например, при помощи теоремы Фробениуса. Следовательно, существует три независимых интеграла уравнений (2.7)—(2.9). Постоянные этих интегралов всегда можно выбрать так, чтобы неравенство (2.3) выполнялось, иначе интегралы не были бы независимы.

Во втором случае могут быть два подслучая: $A_1=0$ либо $A_1\neq 0$. Рассмотрим каждый из них в отдельности.

Пусть $A_1=0$. Тогда из уравнений (2.12) и условия (2.3) получим $A_2B_2\neq 0$. Следовательно, $Z=0$ (см. (2.12)) и для выполнения неравенства (2.3) необходимо, чтобы уравнения (см. (2.6), (2.12))

$$cX+\alpha Y=0,\qquad bX+\gamma Y=0,\qquad B_2X+A_2Y=0 \tag{2.13}$$

удовлетворялись при ненулевых значениях X и Y. Поэтому необходимо, чтобы $\alpha b - c\gamma=0$. Но тогда, приняв во внимание (2.11), видно (см. (2.10)), что в рассматриваемом подслучае справедливы тождества

$$\frac{\partial a}{\partial q_2}-\frac{\partial c}{\partial q_1}=0,\qquad \frac{\partial\gamma}{\partial q_2}-\frac{\partial\beta}{\partial q_1}=0$$

Поскольку $Z=0$, из (2.7) и (2.8) получим

$$X=C_Xe^{-\varphi},\qquad Y=C_Ye^{-\psi}\qquad (C_X,\,C_Y=\mathrm{const})$$

В силу (2.13) необходимо, чтобы

$$-\frac{B_2}{A_2}e^{\psi-\varphi}=C_Y/C_X$$

Напротив, если условие (2) теоремы выполняется, то уравнениям (2.7) — (2.9) удовлетворяют функции

$$X=e^{-\varphi},\quad Y=B_2/A_2\,e^{-\varphi},\quad Z=0,\quad XY-Z^2\neq 0$$

Рассмотрим второй подслучай: $A_1 \neq 0$. Из первых двух уравнений (2.12) следует

$$X = -\frac{A_2}{A_1} Z, \qquad Y = \frac{B_2}{A_1} Z \tag{2.14}$$

а третье уравнение (2.12) выполняется автоматически. Неравенство (2.3) будет выполнено, если $Z \neq 0$ и $A_2B_2 + A_1^2 \neq 0$. Подставив функции (2.14) в уравнение (2.9), получим

$$dZ + Z\left[\frac{1}{2}\left(-c\frac{A_2}{A_1} + a + \gamma + \alpha\frac{B_2}{A_1}\right)dq_1 + \frac{1}{2}\left(-b\frac{A_2}{A_1} + c + \beta + \gamma\frac{B_2}{A_1}\right)dq_2\right] = 0$$

Это уравнение имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда выражение в квадратных скобках — точный дифференциал некоторой функции $\mu(q_1, q_2)$. Тогда $Z = C_Z e^{-\mu}$ (C_Z — произвольная постоянная). Последние четыре тождества в условии 3) теоремы необходимы и достаточны, чтобы уравнениям (2.4) и (2.5) удовлетворяли функции

$$X = -\frac{A_2}{A_1} e^{-\mu}, \qquad Y = \frac{B_2}{A_1} e^{-\mu}, \qquad Z = e^{-\mu}$$

Теорема доказана.

Нетрудно получить соответствующее ее обобщение на случай, когда в уравнения движения войдут силы.

3. Предыдущая теорема допускает простую формулировку, если $a = b = c = 0$ или $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Пусть, например

$$T = \frac{lq_1^{\cdot 2}}{2} + \frac{1}{2}\sum_{j,\,h=2}^{n} b_{jh}(q_2)\, q_j^{\cdot} q_h^{\cdot} \qquad (l = \text{const})$$

кинетическая энергия неголономной системы со связями

$$q_j^{\cdot} = f_j(q_1, q_2)\, q_2^{\cdot} \qquad (j = 3, \ldots, n)$$

Очевидно, разрешенные относительно $q_1^{\cdot\cdot}$, $q_2^{\cdot\cdot}$ уравнения Чаплыгина в случае движения системы по инерции имеют вид (2.1), где $a = b = c = 0$.

Из теоремы п. 2 следует, что для эквивалентности этих уравнений системе Лагранжа необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{\partial\gamma}{\partial q_2} - \frac{\partial\beta}{\partial q_1} = 0, \qquad \frac{\partial\alpha}{\partial q_2} - \frac{\partial\gamma}{\partial q_1} + \frac{1}{2}(\gamma^2 - \alpha\beta) = 0 \tag{3.1}$$

В качестве примера рассмотрим известную задачу Чаплыгина о неголономном движении тела по инерции вдоль горизонтальной плоскости [1]. Твердое тело опирается на плоскость тремя точками, две из которых представляют свободно скользящие ножки, а третья — точку A прикосновения острого колесика, жестко зарепленного в теле. Колесико не может скользить в направлении, перпендикулярном к его плоскости. Предположим также, что центр тяжести тела расположен в вертикальной плоскости, проведенной через точку A перпендикулярно плоскости колесика. Пусть q_1 — угол поворота тела вокруг вертикальной оси, q_2, q_3 — декартовы координаты точки A на горизонтальной плоскости. Неголономное условие выражается уравнением $q_3^{\cdot} = q_2^{\cdot}\,\mathrm{tg}\, q_1$, кинетическая энергия тела

$$T = \frac{m}{2}\left[(q_2^{\cdot} - q_1^{\cdot}k\cos q_1)^2 + (q_3^{\cdot} - q_1^{\cdot}k\sin q_1)^2 + lq_1^{\cdot 2}\right] \qquad (m,\, k,\, l = \text{const})$$

Разрешив уравнения Чаплыгина относительно ускорений, получим

$$q_1^{\cdot\cdot} = 0, \qquad q_2^{\cdot\cdot} = -q_1^{\cdot} q_2^{\cdot} \operatorname{tg} q_1 \tag{3.2}$$

Следовательно, $a = b = c = 0$, $\alpha = \beta = 0$, $\gamma = -\operatorname{tg} q_1$. Условие (3.1) не выполняется.

С. А. Чаплыгин показал [1], что если в рассматриваемом случае ввести неголономную координату s — длину дуги траектории точки A, то уравнения движения в переменных s и q_1 примут вид уравнений Лагранжа $s^{\cdot\cdot} = 0$, $q_1^{\cdot\cdot} = 0$ (см. [13]). Из доказанной теоремы следует, что уравнения (3.2) в лагранжевых координатах невозможно записать в виде уравнений $L_1(\theta) = L_2(\theta) = 0$, какой бы ни была функция (2.2), удовлетворяющая неравенству (2.3).

4. Укажем одно условие, при выполнении которого интегрирование уравнений Чаплыгина можно заменить интегрированием уравнений Лагранжа.

Пусть $q_1, \ldots, q_n$ — координаты механической системы, движение которой стеснено связями

$$q_i^{\cdot} = \sum_{s=k+1}^{n} a_{is}(q_{k+1}, \ldots, q_n)\, q_s^{\cdot} \qquad (i = 1, \ldots, k) \tag{4.1}$$

Предположим, что функция Лагранжа системы имеет вид

$$L = \theta_1(q_1^{\cdot}, \ldots, q_k^{\cdot}) + \theta_2(q_{k+1}^{\cdot}, \ldots, q_n^{\cdot}, q_{k+1}, \ldots, q_n) \tag{4.2}$$

Уравнения движения запишем в форме Рауса

$$L_i(\theta_1) = \lambda_i \qquad (i = 1, \ldots, k) \tag{4.3}$$

$$L_s(\theta_2) = R_s, \qquad R_s = -\sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_{is} \qquad (s = k+1, \ldots, n) \tag{4.4}$$

Пользуясь уравнениями связей (4.1), выразим множители λ_i в функциях от $q^{\cdot}_{k+1}, \ldots, q^{\cdot}_n, q_{k+1}, \ldots, q_n$. Тогда уравнения (4.4) можно рассматривать независимо от (4.3). Для сравнения напишем уравнения Чаплыгина

$$L_s(\theta_1^* + \theta_2) = \Phi_s, \quad \Phi_s = \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial q_i^{\cdot}}\right)^* L_s\left(\sum_{r=k+1}^{n} a_{ir} q_r^{\cdot}\right) \quad (s = k+1, \ldots, n) \tag{4.5}$$

Звездочкой обозначен результат исключения скоростей $q_i^{\cdot}$ ($i = 1, \ldots, k$) по формулам (4.1) из соответствующих выражений. Уравнения (4.4) и (4.5) эквивалентны. Поэтому если бы существовала функция $\theta = \theta(q^{\cdot}_{k+1}, \ldots, q_n^{\cdot}, q_{k+1}, \ldots, q_n)$ такая что [1]

$$R_s = L_s(\theta) \qquad (s = k+1, \ldots, n) \tag{4.6}$$

в силу уравнений (4.4) и

$$\det \left\| \frac{\partial^2 (\theta_2 - \theta)}{\partial q_s^{\cdot} \partial q_r^{\cdot}} \right\| \neq 0$$

то уравнения Чаплыгина были бы равносильны уравнениям Лагранжа $L_s(\theta_2 - \theta) = 0$ $(s = k+1, \ldots, n)$. Указанным условиям удовлетворяет функция $\theta = 0$, если

$$R_{k+1} = \ldots = R_n = 0 \tag{4.7}$$

[1] Условия (4.6) другим путем получены С. О. Титковой (см. С. О. Титкова. Качение шара по шероховатой плоскости. Канд. дисс. Алма-Ата, Изд-во Казахс. Гос. ун-та, 1970).

Условие (4.7) достаточно для того, чтобы уравнения (4.5) можно было заменить уравнениями $L_s(\theta_2) = 0$, $(s = k+1,\dots n)$.

Очевидно, соотношения (4.7) выполняются, если $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$. Именно этот случай имеет место при движении без скольжения однородного шара вдоль плоскости по инерции. Здесь [8]

$$\theta_1 = \frac{m}{2}(q_1^{\cdot 2} + q_2^{\cdot 2}), \quad \theta_2 = \frac{ma^2}{5}(q_3^{\cdot 2} + q_4^{\cdot 2} + q_5^{\cdot 2} + 2q_4^{\cdot} q_5^{\cdot} \cos q_3)$$

где q_1 и q_2 — декартовы координаты точки касания на плоскости, q_3, q_4, q_5 — углы Эйлера, m — масса шара, a — радиус. Можно показать [14], что реакция, действующая со стороны плоскости на шар, направлена перпендикулярно плоскости. Следовательно, в уравнения Рауса силы реакции не войдут, т. е. $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. В работе [8], исходя из уравнений Чаплыгина, составленных для шара, справедливость уравнений $L_3(\theta_2) = L_4(\theta_2) = L_5(\theta_2) = 0$ доказана непосредственными вычислениями.

Заметим, что соотношения (4.7) могут выполняться, когда $\lambda_1^2 + \dots + \lambda_k^2 \neq 0$. Примером может служить однородный круглый диск, катающийся по инерции вдоль шероховатой горизонтальной плоскости при условии, что плоскость диска остается вертикальной во все время движения. Пусть q_1 и q_2 — декартовы координаты точки касания на плоскости, q_3 — угол собственного вращения диска, q_4 — угол поворота вокруг вертикальной оси. Уравнения связей следующие: $q_1^{\cdot} = -aq_3^{\cdot}\cos q_4$, $q_2^{\cdot} = -aq_3^{\cdot}\sin q_4$. Лагранжиан системы имеет вид (4.2), где

$$\theta_1 = {}^1/_2 m(q_1^{\cdot 2} + q_2^{\cdot 2}), \quad \theta_2 = {}^1/_2 ma^2(q_3^{\cdot 2} + {}^1/_2 q_4^{\cdot 2})$$

(m — масса диска, a — радиус). Нетрудно убедиться, что

$$\lambda_1 = maq_3^{\cdot} q_4^{\cdot}\sin q_4, \qquad \lambda_2 = -maq_3^{\cdot} q_4^{\cdot}\cos q_4$$

но $R_3 = R_4 = 0$.

Поступила 13 IV 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Чаплыгин С. А. Исследования по динамике неголономных систем, М.—Л., Гостехиздат, 1949, стр. 28—38.
2. Аржаных И. С. Условия применимости потенциального метода интегрирования уравнений движения неголономных консервативных систем, Докл. АН СССР, 1952, т. 87, № 1.
3. Сумбатов А. С. Об интегрировании уравнений динамики с множителями связей, ПММ, 1972, т. 36, вып. 1.
4. Шульгин М. Ф. Об одном методе интегрирования уравнений движения неголономных систем, Научн. тр. Ташкентск. ун-та. Механика, 1963, вып. 222, стр. 61—62.
5. Helmholtz H. Ueber die physikalische Bedeutung des Princips der kleinsten Wirkung, J. für die reine und angewandte Mathematik, 1887, Bd. 100.
6. Mayer A. Die Existenzbedingungen eines kinetischen Potenzials, Berichte uber die verhandlungen der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Math. Phys. Kl., 1896, Bd. 48.
7. Суслов Г. К. О кинетическом потенциале Гельмгольца, Матем. сб., 1896, т. 19, вып. 1.
8. Новоселов В. С. Применение метода Гельмгольца к изучению движения систем Чаплыгина, Вестн. ЛГУ, Сер. матем., механ., астрон., 1958, № 13, вып. 3.
9. Новоселов В. С. Применение метода Гельмгольца к исследованию движения неголономных систем. Вестн. ЛГУ, Сер. матем., механ., астрон., 1958, № 1, вып. 1.
10. Хмелевский И. Л. О принципе Гамильтона для неголономных систем, ПММ, 1960, т. 24, вып. 5.
11. Хмелевский И. Л. Об одной задаче Чаплыгина, ПММ, 1962, т. 26, вып. 2.
12. Уиттекер Е. Т. Аналитическая динамика, М.— Л., Гостехиздат, 1937.
13. Шульгин М. Ф. О динамических уравнениях Чаплыгина при существовании условных неинтегрируемых уравнений, ПММ, 1954, т. 18, вып. 6.
14. Аппель П. Теоретическая механика, т. 2., М., Физматгиз, 1960.