Прикладная математика и механика. Том 36, 1972

УДК 517.9

ИГРОВАЯ ЗАДАЧА ИМПУЛЬСНОЙ «МЯГКОЙ» ВСТРЕЧИ ДВУХ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК

Г. К. Пожарицкий

(Москва)

Рассматривается игровая задача [1–4] о «мягкой» (по координатам и скоростям) встрече двух материальных точек, подверженных действию заданных сил притяжения к неподвижному центру и управляющих сил. Заданные силы пропорциональны расстояниям точек до центра или равны нулю, а управляющие силы произвольны по направлениям и ограничены по импульсу. Первая и вторая точки рассматриваются как минимизирующий и максимизирующий игроки в игре, где платой является время до мягкой встречи.

В процессе решения задачи все пространство позиций игры разделено на две области. В первой области найдено решение минимаксной задачи и синтезированы три функции позиции: оптимальные управления первого и второго игроков и время до мягкой встречи. Во второй области синтезировано управление второго игрока, позволяющее ему уклониться от мягкой встречи при любых действиях первого игрока.

1. Пусть уравнения движения системы имеют вид

$$x^{\cdot} = y, \qquad y^{\cdot} = -k^2x + u + v \tag{1.1}$$
$$\mu^{\cdot} = -|u|, \quad \nu^{\cdot} = -|v|, \quad \mu \geqslant 0, \quad \nu \geqslant 0$$

где x, y, u, v — трехмерные векторы, $|x|$, $|y|$, $|u|$, $|v|$ — их евклидовы модули, а μ и ν — неотрицательные числа, подчиненные фазовым ограничениям $\mu \geqslant 0$, $\nu \geqslant 0$.

Уравнения (1.1) можно интерпретировать как уравнения относительного движения двух материальных точек с массами m_1, m_2, радиус-векторы которых относительно неподвижного центра O равны r_1 и r_2, а точки подвержены действию заданных сил $F_1 = -m_1k^2r_1$, $F_2 = -m_2k^2r_2$ и управляющих сил $f_1 = m_1u$, $f_2 = -m_2v$, стесненных импульсными ограничениями

$$\mu^\circ - \int_0^\tau |u|\,dt = \mu(\tau) \geqslant 0 \tag{1.2}$$
$$\nu^\circ - \int_0^\tau |v|\,dt = \nu(\tau) \geqslant 0$$

В уравнениях (1.1) $x = r_1 - r_2$, $y = r_1^{\cdot} - r_2^{\cdot}$, константа $k \geqslant 0$ предполагается неотрицательной.

Введем в рассмотрение три вектора

$$w(\tau) = [x_i(\tau),\ y_i(\tau - 0),\ \mu(\tau - 0),\ \nu(\tau - 0)]$$
$$w^{(2)}(\tau) = [x_i(\tau),\ y_i(\tau - 0) + \nu_{1i},\ \mu(\tau - 0),\ \nu(\tau - 0) - |\nu_1|] =$$
$$= [x_i^{(2)}(\tau),\ y_i^{(2)}(\tau),\ \mu^{(2)}(\tau),\ \nu^{(2)}(\tau)]$$

$$w^{(2,1)}(\tau) = [x_i^{(2)}(\tau),\ y_i^{(2)}(\tau) + \mu_{1i},\ \mu^{(2)}(\tau) - |\mu_1|,\ \nu^{(2)}(\tau)] = \\ = [x_i^{(2,1)}(\tau),\ y_i^{(2,1)}(\tau),\ \mu^{(2,1)}(\tau),\ \nu^{(2,1)}(\tau)] \tag{1.3}$$

Эти векторы имеют следующий смысл. Первый из них, $w(\tau)$ — это левый предел при $t \to \tau - 0$ некоторого решения системы (1.1) при конечных u, v и таких, что решение при $t < \tau$ непрерывно и дифференцируемо почти при всех t на полуинтервале $t \in [\tau - \varepsilon_1, \tau)$, $\varepsilon_1 > 0$. Вектор $w(\tau)$ будем называть позицией игры при $t = \tau$, а для того, чтобы начальное значение $w(0)$ было позицией, припишем ей малую ($t \in [-\varepsilon, 0)$) предысторию при $u(t) = v(t) = 0$.

Вектор $w^{(2)}(\tau)$ изображает результат импульсных $v(\tau) = \nu_1\delta$ действий второй точки (второго игрока), а вектор $w^{(2,1)}(\tau)$ — образ вектора $w^{(2)}(\tau)$, полученный в результате импульсного $u(w^{(2)}(\tau)) = \mu_1\delta$ управления первой точки (первого игрока). Индекс $i = 1, 2, 3$ указывает на проекции векторов x, y, μ_1, ν_1 на неподвижные оси. Аргумент τ будем опускать в записи, если это не затруднит понимания.

Пусть пара управлений $[u(w^{(2)}), u(w, v)]$, $v(w)$ такова, что при $t \geqslant 0$ она порождает траекторию $w(t > 0, \{[u(w^{(2)}), u(w, v)], v(w)\}, w(0))$, которая почти при всех t удовлетворяет системе (1.1) совместно с фазовыми оценками $\nu \geqslant 0$, $\mu \geqslant 0$, всюду непрерывна по t справа и имеет конечное число скачков по формулам (1.3). Такую пару управлений и траекторию назовем допустимыми и будем решать задачу только в этом классе. Запись $[u(w^{(2)}), u(w, v)]$ означает, что первый игрок может формировать либо управление $u(w^{(2)})$, либо, при конечном $v(w)$, управление $u(w, v)$, т. е. второй игрок дискриминирован.

Сформулируем задачу мягкой ($x = y = 0$) встречи.

Определение 1. Если вектор $w^{(2)}(\tau) \in M_0\,[|x| = 0]$, и существует импульсное управление $u(w^{(2)}) = \mu_1(w^{(2)})\,\delta$, обращающее в нуль вектор $y^{(2,1)}(\tau)$, то будем говорить, что $w^{(2)}(\tau)$ и τ вектор и момент встречи соответственно. Можно проверить, что при выполнении соотношений

$$|x(\tau)| = 0, \qquad \mu(\tau) - \nu(\tau) - |y(\tau)| \geqslant 0$$

любой допустимый ($\nu(\tau) - |\nu_1| \geqslant 0$) вектор $w^{(2)}(\tau)$ отвечает встрече.

С другой стороны при выполнении соотношений

$$|x(\tau)| = 0, \qquad \mu(\tau) - \nu(\tau) - |y(\tau)| < 0$$

векторы

$$w^{(2)}(|y| \neq 0) = [x^{(2)}(\tau),\ y_i^{(2)}(\tau) = y_i(\tau) + \nu y_i/|y|,\ \mu^{(2)}(\tau),\ \nu^{(2)}(\tau) = 0]$$
$$w^{(2)}(|y| = 0) = [x^{(2)}(\tau),\ |y^{(2)}(\tau)| = \nu;\ y_{3,4}^{(2)} = 0,\ \mu^{(2)}(\tau),\ \nu^{(2)}(\tau) = 0]$$

не являются векторами встречи. Это значит, что второй игрок не может избежать выбора вектора встречи (не может избежать встречи) тогда и только тогда, когда позиция

$$w(\tau) \in M\,[|x| = 0;\ \mu - \nu - |y| \geqslant 0]$$

В связи с этим будем именовать M множеством окончания игры.

Сформулируем две основные конфликтные задачи.

Задача 1. Указать управления $u^\circ(w, v)$, $v^\circ(w)$, при которых время $T[u, v]$ первого попадания траектории на M удовлетворяет оценкам

$$T[u^c, v] \leqslant T[u^\circ, v^\circ] \leqslant T[u, v^\circ]$$

Совокупность позиций, для которых существует решение задачи 1, образует множество $W^\circ(w)$.

Задача 2. Указать $v_0(w)$ такое, чтобы траектория $w(t, \{u, v_0(w)\}, w(0))$ не попадала на M при $t \in [0, \infty]$ и при любом управлении u. Условия существования $v_0(w)$ выделяют множество $W_0(w)$.

2. Обозначим разность $\mu - \nu$ через ξ, а через j_α, j_β, j_γ — правую единичную тройку ортов. При $|x| \neq 0$ орт j_α параллелен вектору x, орт j_β направлен вдоль вектора y^β — проекции вектора y на плоскость ортогональную к x. Орт j_γ дополняет тройку. Если $y^\beta = 0$, то j_β, j_γ произвольны. Если $|x| = 0$, то произвольна вся тройка. Проекции любого вектора e на орты тройки обозначим через e_α, e_β, e_γ.

Результаты [1,4] наводят на мысль о формировании импульсного управления

$$u_{(1)}(w^{(2)}) = \lambda_1(w^{(2)})\,\delta j_\alpha - y_\beta^{(2)}\delta j_\beta = \mu_{(1)}\delta \tag{2.1}$$

Здесь $\lambda_1(w^{(2)})$ — наименьший корень уравнения

$$\varphi(w^{(2)}, \lambda) = \xi - \sqrt{(y_\beta^{(2)})^2 + \lambda^2} - \sqrt{(y_\alpha^{(2)} + \lambda)^2 + k^2|x|^2} = 0 \tag{2.2}$$

на сегменте $c\,[\lambda^2 \leqslant \xi^2 - y_\beta{}^2]$.

При $k > 0$, изменяя масштабы переменных можно получить $k = 1$. Поэтому в дальнейшем будут рассматриваться два разных случая: $k = 1$, $k = 0$. Для сокращения записей предположим, что $w^{(2)} = w$. Как будет видно из дальнейшего (лемма 3.2), предположение о том, что $v(w) = \nu_1\delta = 0$ $(w^{(2)} = w)$ не повлияет на возможность формирования управления $u_{(1)}(w^{(2)})$, при $w^{(2)} \neq w$.

Разделим все пространство позиций W для случаев $k = 1$, $k = 0$ на следующие области:

$$D^{(1)}\,[R(w, k = 1) = R^{(1)} = \xi - \sqrt{y^2 + x^2 + 2|x|y_\beta} \geqslant 0;\ |x| > 0]$$
$$y^2 = |y|^2, \quad x^2 = |x|^2$$
$$D^{(0)} = D^{(0,1)}\,[R(w, k = 0) = R^{(0)} = \xi - |y| > 0;\ |x| > 0] \cup$$
$$\cup D^{(0,2)}\,[R^{(0)} = y_\beta = 0;\ y_\alpha < 0;\ |x| > 0]$$
$$D_{(1)} = W \setminus [D^{(1)} \cup M] = D_{(1)}\,[R^{(1)}(w) < 0]$$
$$D_{(0)} = W \setminus [D^{(0)} \cup M] = D_{(0,1)}\,[R^{(0)} < 0] \cup$$
$$\cup D_{(0,2)}\,[R^{(0)} = 0;\ |y| > 0;\ y_\beta\ |x|] / |y| > 0] \cup$$
$$\cup D_{(0,3)}\,[R^{(0)} = y_\beta = 0;\ y_\alpha \geqslant 0;\ |x| > 0]$$

Лемма 2.1 содержит четыре утверждения.

2.1.1. Уравнение (2.2) имеет корни при $w \in D^{(1),(0)}$ $\lambda_1(w, k = 1) = \lambda^{(1)}(w)$, $\lambda_1(w, k = 0) = \lambda^{(0)}(w)$ на сегменте $C\,[\lambda^2 \leqslant \xi^2 - y_\beta{}^2]$.

2.1.2. Эти корни даются формулами

$$\lambda^{(1)}(w) = (y_\alpha s^{(1)} - \sqrt{\xi^2((s^{(1)})^2 + y_\alpha^2 x^2 - x^2\xi^2)})\, q^{-1} - y_\alpha$$
$$2s^{(1)} = \xi^2 + x^2 - y^2, \qquad q = \xi^2 - y_\alpha^2 \tag{2.3}$$
$$\lambda^{(0)}(w) = -{}^1/_2((\xi + y_\alpha)^2 - y_\beta^2)(\xi + y_\alpha)^{-1}, \quad w \in D^{(0,1)}$$
$$\lambda^{(0)}(w) = 0, \qquad w \in D^{(0,2)}$$

2.1.3. Справедливы оценки

$$\lambda^{(1)}(w) \leqslant -y_\alpha y_\beta(|x| + y_\beta)^{-1} = \lambda_2(w), \qquad \lambda^{(0)}(w) \leqslant 0 \tag{2.4}$$

2.1.4. Если управления $v^{(1),(0)}(w) = 0$, то управления $u_{(1)}(w)$ приводят траекторию на множество M через времена

$$T^{(1)}(w) = T[u_{(1)}(w), 0] = \pi + \arccos(p^{(1)}((p^{(1)})^2 + x^2)^{-1/2}) \tag{2.5}$$
$$T^{(0)}(w) = T[u_1(w), 0] = -|x| / p^{(0)}$$
$$p^{(1)}(w) = y_\alpha + \lambda^{(1)}(w), \qquad p^{(0)}_{(w)} = y_\alpha + \lambda^{(0)}(w)$$

Прежде чем начать доказательство, уточним терминологию. На паре $u_{(1)}(w, v)$, $v(w) = 0$ справедливы равенства

$$w^{(2.1)}(0) = [x(0),\ y_\alpha^{(2.1)} = p^{(1),(0)}(w(0)),\ y_\beta^{(2.1)} = 0,\ \xi^{(2.1)} = \xi - |\mu_{(1)}|] \tag{2.6}$$

Из дальнейшего будет видно, что при > 0 управление $u_{(1)}(w)$ обращается в нуль и движение происходит так, как если бы начальной была позиция $w'(0) = w^{(2.1)}(0)$.

Такую оговорку нужно ввести потому, что $w^{(2.1)}(0)$ не является позицией [1].

Доказательство леммы 2.1 проведем по порядку высказанных утверждений.

2.1.1. *Доказательство.* Простые вычисления позволяют установить равенства

$$R^{(1),(0)}(w) = \max\nolimits_\lambda \varphi(w, k = 1, 0)), \quad \lambda \in (-\infty, +\infty) \tag{2.7}$$
$$R^{(1)}(w) = \varphi(w, \lambda_2(\omega) = -y_\alpha y_\beta(|x| + y_\beta)^{-1}) \tag{2.8}$$
$$R^{(0)}(w) = \varphi(w, -y_\alpha) \tag{2.9}$$

Можно также проверить, что $\lambda = \lambda_2(w)$ — единственная точка максимума, как и $\lambda = -y_\alpha$ при $y_\beta > 0$. Если $y_\beta = 0$, то максимум $R^{(0)}(w)$ достигается на отрезке $y_\alpha + \lambda \leqslant 0$. В областях $D^{(1),(0)}$ можно также установить оценки

$$\xi^2 - y_\beta^{(2)} \geqslant 0, \qquad \varphi(w, \pm\sqrt{\xi^2 - y_\beta^2}) \leqslant 0 \tag{2.10}$$
$$\lambda_2^2(\omega) \leqslant \xi^2 - y_\beta^2$$

Равенство (2.7) гарантирует существование корня уравнения (2.2) на прямой $\lambda \in (-\infty, +\infty)$. Равенства (2.8), (2.9) совместно с оценками (2.10) указывают, что при $R^{(1),(0)} > 0$ сегмент «C» содержит не менее двух корней, а при $R^{(1),(0)} = 0$ — не менее одного корня.

---

[1] В дальнейшем «движение исходит из позиции $w^{(2.1)}(w, u(w, v), v((w))$» будем понимать в том смысле, что оно происходит так же, как происходило бы из позиции $w'(0) = w^{(2.1)}(0)$. Это уточнение распространяется на всю статью.

2.1.2. *Доказательство.* Замена $p = \lambda + y_\alpha$ и простые преобразования позволяют получить следствия уравнения (2.2) при $k = 1, 0$ в виде

$$(\xi^2 - y_\alpha^2)\,p^2 - 2s^{(1)}y_\alpha p + x^2 - (s^{(1)})^2 = 0 \qquad (2.11)$$

$$(\xi^2 - y_\alpha^2)\,p^2 - (\xi^2 - y^2)\,y_\alpha p - {}^1/_2\,(\xi^2 - y^2) = 0 \qquad (2.12)$$

При $R^{(1),(0)} > 0$ уравнения (2.11) и (2.12) имеют в точности по два корня и наименьшие из них даются формулами (2.3). Соображения, высказанные при доказательстве утверждения 2.1.1, убеждают, что эти пары корней удовлетворяют уравнению (2.2) при $k = 1,0$. Если $R^{(1)} = 0$, то (2.2) и (2.11) имеют единственный корень $\lambda^{(1)}(w) = \lambda_2(w)$. Если $R^{(0)} = y_\beta = 0$, то (2.12) обращается в тождество, однако уравнение (2.2) принимает вид

$$\xi - |\lambda| - |y_\alpha + \lambda| = 0$$

и его наименьший корень $\lambda^{(0)}(w) = 0$.

2.1.3. *Доказательство.* Оценки 2.1.3. являются простыми следствиями предыдущих рассуждений.

2.1.4. *Доказательство.* После реализации управления $u_{(1)}(w)$ движение исходит из позиции $w^{(2.1)}(0)$, даваемой формулами (2.16), и при $t > 0$ будет происходить согласно уравнениям

$$\begin{aligned} &x/|x| = x(0)/|x(0)|, \quad |x|^{\cdot} = y_\alpha, \quad y_\alpha^{\cdot} = -|x| \\ &y_\beta = y_\beta^{\cdot} = 0, \qquad u_{(1)}(w(t)) = 0 \qquad (k = 1) \end{aligned} \qquad (2.13)$$

$$\begin{aligned} &x/|x| = x(0)/|x(0)|, \quad |x|^{\cdot} = y_\alpha < 0, \quad y_\alpha^{\cdot} = 0 \\ &y_\beta = y_\beta^{\cdot} = 0, \qquad u_{(1)}(w(t)) = 0 \qquad (k = 0) \end{aligned} \qquad (2.14)$$

Траектории этих уравнений реализуют времена $T[u_{(1)}, 0]$, согласно (2.5). Доказательство леммы 2.1 закончено.

3. Схема построения управления $v_0(w)$, примененная в [4] для одномерного аналога рассматриваемой задачи, естественно, обобщается для $n = 3$ и приводит к формированию в областях $D_{(1),(0)}$ импульсных управлений

$$\begin{gathered} v_{(1)}^{\rightarrow}(w) = \nu_{1(1)}(w)\,\delta = \nu y_\alpha \psi^{(1)}\delta j_\alpha + \nu\,(y_\beta + |x|)\,\psi^{(1)}\delta j_\beta \\ v_{(0)}^{\rightarrow}(w) = \nu_{1(0)}(w)\,\delta = \nu y_\alpha \psi^{(0)}\delta j_\alpha + \nu y_\beta \psi^{(1)}\delta j_\beta \\ \psi^{(1)} = (y^2 + x^2)^{-1/2}, \qquad \psi^{(0)} = |y|^{-1} \end{gathered}$$

Теорема 3. Управления $v_{(0),(1)}(w)$ решают задачу 2 в областях $D_{(1),(0)}$, т. е. справедливы включения

$$v_{(1),(0)}(w) \in v_0(w), \qquad D_{(1),(0)}(w) \in W_0(w) \qquad (3.1)$$

Доказательство. Очевидно, что совокупность возможных векторов $w^{(2.1)}(w)$ совпадает при $v = v_{(1),(0)}(w)$ с совокупностью возможных векторов $w^{(2.1)}(w^{(2)}(w, v_{(1),(0)}(w)))$. Поэтому вектор $w^{(2)}(w, v_{(1),(0)}(w))$ можно считать начальной позицией и обсуждать в ней возможности первого игрока. Можно непосредственно проверить соотношения

$$R^{(1),(0)}(w) = R^{(1),(0)}(w^{(2)}(w, v_{(1),(0)}(w))) = \mu - \sqrt{(y^{(2)})^2 + k^2x^2} \leqslant 0 \quad (k = 1, 0) \qquad (3.2)$$

$$(R^{(1),(0)})^{\cdot} = -|u| - \psi^{(1),(0)}(y_\alpha u_\alpha + y_\beta u_\beta) \leqslant 0 \qquad (3.3)$$

где $(R^{(1),(0)})^{\cdot}$ — правые производные функций $R^{(1),(0)}$ в силу системы (1.1) при конечном управлении u. Оценка (3.3) при $k=1$, $|x|\neq 0$ становится строгой, а равенство в (3.3) достигается только в случае $k|x|=0$ на управлении $u=-my$ $(m>0)$, антипараллельном скорости. Оценка (3.3) показывает, что при $t>0$ сохраняется включение $w(t>0, u)\in D_{(1)}$ $(w)\not\ni M$. Доказательство для $k=1$ закончено.

При $k=0$ оценка (3.3) гарантирует включение $w(t>0, u, w(0))\in \in D_{(0,1)}\notin M$ при $w(0)\in D_{(0,1)}(w)$. Осталось обсудить случаи $w(0)\in \in D_{(0,2)}(w)$, $w(0)\in D_{(0.3)}(w)$. В первом случае любое управление u, удерживающее позицию на поверхности $R^{(0)}(w)=0$, антипараллельно вектору y и сохраняет величину $y_\beta\,|x|\,/\,|y|$, равную проекции вектора x на нормаль к вектору y, лежащую в плоскости, содержащей векторы x, y. Во втором случае эта проекция равна нулю, но допустимое управление $u=-my$ сохраняет неравенство $y_\alpha\geqslant 0$, и величина $|x|>0$ не уменьшается. Итак, допустимое управление, сохраняющее равенство $R^{(0)}(w)= =0$, не может привести траекторию на M. С другой стороны, согласно (3.3), любое управление $u\neq -my$ $(m>0)$ переводит траекторию в область $D_{(0,1)}(w)$, откуда выход на M также невозможен. Доказательство теоремы 3 закончено. Обсудим возможности второго игрока в области $D^{(1),(0)}(w)$.

Лемма 3.1 содержит три утверждения.

3.1.1. Любое импульсное управление $v=\nu_1\delta$ сохраняет включения $w^{(2)}\in D^{(1),(0)}$.

3.1.2. Справедливы оценки

$$p^{(1),(0)}(w^{(2)})\leqslant p^{(1),(0)}(w) \tag{3.4}$$

переходящие в равенства только на управлениях

$$v^{(1),(0)}(w,n)=-nh_\alpha^{(1),(0)}(w)\,\delta j_\alpha-nh_\beta^{(1),(0)}(w)\,\delta j_\beta$$

$$0\leqslant n\leqslant\nu,\quad w\in C^{(1),(0)}\ [(l^{(1),(0)})^2=y_\beta{}^2+(\lambda^{(1),(0)}(w))^2>0]$$

$$h_\alpha^{(1),(0)}=\lambda^{(1),(0)}/l^{(1),(0)},\quad h_\beta^{(1),(0)}=-y_\beta/l^{(1),(0)},\ l^{(1),(0)}>0$$

$$v^{(1),(0)}(w,n)=n\delta j_\alpha;\quad 0\leqslant n\leqslant\nu,\quad w\in E^{(1),(0)}\ [l^{(1),(0)}=0]$$

3.1.3. При $v=v^{(1),(0)}$ справедливы равенства

$$h_\alpha^{(1),(0)}(w)=h_\alpha^{(1),(0)}(w^{(2)}),\quad h_\beta^{(1),(0)}(w)=h_\beta^{(1),(0)}(w^{(2)})\quad \text{при } w\in C^{(1)(0)}$$

$$y_\beta=y_\beta^{(2)}=0\quad \text{при } w\in E^{(1),(0)} \tag{3.5}$$

Доказательство. Будем его проводить только для случая $k=1$, $w\in C^{(1),(0)}$. Остальные случаи рассматриваются аналогично.

Обозначим через $\varphi_*^{[p]}(w, p^{(1),(0)})\geqslant 0$ частную производную функции $\varphi_*(w,p)$, полученной после замены $p=y_\alpha+\lambda$ в функции $\varphi(w,\lambda)$, заметим, что $\varphi_*^{[p]}>0$ строго положительна при $R^{(1)}(w)>0$. Ограничимся только подслучаем $R^{(1)}(w)>0$ и начнем изменять $v=\nu_1\delta$ от нуля. Тогда вариация корня $\delta p^{(1)}=p^{(1)}(w^{(2)})-p^{(1)}(w)$ будет изменяться при малом $|\nu_1|$, согласно уравнению

$$\varphi_*^{[p]}(w,p^{(1)})\,\delta p^{(1)}=-|\nu_1|-h_\alpha^{(1)}(w)\,\nu_\alpha-h_\beta^{(1)}(w)\,\nu_\beta+O(w,|\nu_1|)\leqslant 0 \tag{3.6}$$

Сумма слагаемых первого измерения строго отрицательна при $\nu_1\delta \neq v^{(1)}(n, w)$. Эта сумма обращается в нуль только при $v = v^{(1)}(n, w)$, но при этом легко проверить, что и величина $O(w, |\nu_1|)$ обращается в нуль. Пусть вектор ν_1 конечен и удовлетворяет соотношениям

$$\nu_1 \neq v^{(1),(0)}, \qquad w^{(2)}(w, \theta, \nu_1) \in C^{(1),(0)} \quad \text{при} \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 1$$

Предположим от противного, что $\delta p^{(1)}(w, \nu_1) \geqslant 0$. Из соотношения $\nu_1 \neq v^{(1),(0)}$ и оценки (3.6) следует оценка $\delta p^{(1)}(w, \theta\nu_1) < 0$ для достаточно малых θ. Последняя оценка совместно с предположением от противного влечет существование такого числа $0 < \theta_1 < 1$, что $\delta p^{(1)}(w^{(2)}(w, \theta_1\nu_1), \Delta\theta\nu_1) > 0$ при любых достаточно малых $\Delta\theta > 0$. Это неравенство противоречит оценке (3.6), примененной в точке $w^{(2)}(w, \theta_1\nu_1)$. Итак, оценка (3.4) и первая часть утверждения 3.1.2 доказаны. Включение $w^{(2)} \in D^{(1)}$ при $R^1 > 0$ является следствием наличия корня $\lambda^{(1)}(w^{(2)}) = p^{(1)}(w^{(2)}) - y_\alpha^{(2)}$. Утверждение 3.1.1 этим доказано. Равенства (3.5) проверяются подстановкой. Доказательство леммы 3.1 закончено.

Лемма 3.2. Содержит два утверждения.

3.2.1. Любое импульсное управление $u = \mu_1\delta$, сохраняющее включение $w^{(2.1)} \in D^{(1),(0)}$, не может нарушить оценок

$$p^{(1),(0)}(w^{(2.1)}) \geqslant p^{(1),(0)}(w^{(2)}) \tag{3.7}$$

которые переходят в строгие равенства только при

$$u^{\{(1),(0)\}}(w^{(2)}, r) = ru_{(1)}(w^{(2)}, k = 1, 0), \qquad 0 \leqslant r \leqslant 1$$

3.2.2. Управления $u^{\{(1),(0)\}}(w^{(2)}, r)$ сохраняют величины

$$h_\alpha^{(1),(0)}(w^{(2)}) = h_\alpha^{(1),(0)}(w^{(2.1)}(w^{(2)}, u^{\{(1),(0)\}}(w^{(2)}, r)))$$

$$h_\beta^{(1),(0)}(w^{(2)}) = h_\beta^{(1),(0)}(w^{(2.1)}(w^{(2)}, u^{\{(1),(0)\}}(w^{(2)}, r)))$$

при $w^{(2)} \in C^{(1),(0)}(w^{(2)})$.

Доказательство проводится аналогично доказательству леммы 3.1.

В итоге леммы 3.1 и 3.2 устанавливают равенство

$$\max_v \min_{u(v)} [p^{(1),(0)}(w^{(2,1)}) - p^{(1),(0)}(w)] = 0 \tag{3.8}$$

где минимум разыскивается на всех $u(w)$, импульсных и сохраняющих включение $w^{(2,1)} \in D^{(1),(0)}$, а максимум — на всех допустимых импульсных управлениях $v = \nu_1\delta$, $\nu - |\nu_1| \geqslant 0$.

4. Итак, управление

$$u_{(1)}(w^{(2)}) = u^{(1),(0)}(w^{(2)}) = \lambda^{(1),(0)}(w^{(2)})\,\delta j_\alpha - y_\beta^{(2)}\delta j_\beta, \qquad w^{(2)} \in C^{(1),(0)} \tag{4.1}$$

сформировано в области $C^{(1),(0)}$.

Если же в позиции $w \in E^{(1),(0)}$ второй игрок использует конечное управление $v(w)$, то $w^{(2)} = w$, а естественным обобщением импульсного управления $u_{(1)}(w^{(2)})$ в этом случае является управление

$$u^{(1),(0)}(w, v) = u_\alpha^{(1)(0)}(w, v)\, j_\alpha - v_\beta j_\beta - v_\gamma j_\gamma \tag{4.2}$$

где $u_\alpha^{(1),(0)}(w, v)$ — наименьшие корни уравнения

$$|v| - \sqrt{v_\beta^2 + v_\gamma^2 + u_\alpha^2} - y_\alpha(v_\alpha + u_\alpha)\,\xi^{-1} = 0 \tag{4.3}$$

Уравнение (4.3) допускает очевидные корни $u_{\alpha 1,1} = u_{\alpha 0,1} = -v_\alpha$ и, кроме того, корень $u_{\alpha 1,2} = 2(v_\alpha \xi^2 - |v| y_\alpha \xi) q^{-1} - v_\alpha$ при $|v| q - 2y_\alpha \xi v_\alpha - 2|v| y_\alpha^2 \geqslant 0$ и корень $u_{\alpha 0,1} = 0$ при $v_\beta = v_\gamma = 0$, $v_\alpha < 0$.

5. Приступим к анализу случая $k = 1$ и, до тех пор, пока не будет оговорено противное, будем рассматривать только этот случай. Введем обозначения

$$z^{(1)}(w) = p^{(1)}(w)\,|x|^{-1}, \qquad \zeta = \xi\,|x|^{-1} \tag{5.1}$$

$$z_\alpha = y_\alpha\,|x|^{-1}, \qquad z_\beta = y_\beta\,|x|^{-1}$$

$$z^{(1)(2)}(w^{(2)}) = p^{(1)}(w^{(2)})\,|x|^{-1}, \qquad \zeta^{(2)} = \xi^{(2)}\,|x|^{-1}$$

$$z_\alpha^{(2)} = y_\alpha^{(2)}\,|x|^{-1}, \qquad z_\beta^{(2)} = y_\beta^{(2)}\,|x|^{-1}$$

$$0 \leqslant b^{(1)}(w^{(2)}) = \{(z_\beta^{(2)})^2 - (z^{(1)(2)}(w^{(2)}) - z_\alpha^{(2)})^2\}^{1/2}$$

Функция $T^{(1)}(z^{(1)}(w))$ строго монотонно возрастает по аргументу $z^{(1)}(w)$. Однако, согласно лемме 3.1 (лемме 3.2), второй (первый) игрок не может при помощи импульсных управлений увеличить (уменьшить) величину $z^{(1)}(w)$ и функцию $T^{(1)}(z^{(1)}(w))$.

Вследствие этого естественно рассмотреть последствия импульсных действий второго и первого игроков, применивших в начальный момент импульсные управления

$$v^{(1)}(w, 0 \leqslant n \leqslant \nu), \qquad u^{\{(1)\}}(w^{(2)}, 0 \leqslant r \leqslant 1) = r u_{(1)} \tag{5.2}$$

и применяющих при $t > 0$ конечные управления u, v. Нетрудно проверить справедливость равенств

$$\zeta^{(2.1)} = \zeta - (b^{(1)} - b^{(2)}) = \zeta - a, \qquad z_\alpha^{(2,1)} = z_\alpha + a h_\alpha(w) \tag{5.3}$$

$$z_\beta^{(2,1)} = z_\beta + a h_\alpha(w), \qquad 0 \leqslant b^{(2)} = n/|x| \leqslant \nu/|x| \tag{5.4}$$

$$z^{(1)}(w) = z^{(1)}(w^{(2,1)})$$

$$h_\alpha(w) = h_\alpha(w^{(2,1)}), \qquad h_\beta(w) = h_\beta(w^{(2,1)}) \tag{5.5}$$

В формулах (5.3) рассматривается случай

$$w \in C^{(1)}[y_\beta^2 + (\lambda^{(1)}(w))^2 > 0] \cap [R^{(1)}(w) > 0] \tag{5.6}$$

Из (2.2), (5.1) — (5.4) следует, что функция $z^{(1)}(w) = z^{(1),(2,1)}(w^{(2,1)})$ — наименьший корень уравнения

$$\zeta^{(2,1)} - \sqrt{(z_\beta^{(2,1)})^2 + ((z - z_\alpha)^{(2,1)})^2} - \sqrt{z^2 + 1} = 0 \tag{5.7}$$

Как следствие системы (4.1) для переменных ζ, z_α, z_β можно получить дифференциальные уравнения

$$\zeta^\cdot = -\zeta z_\alpha - |u_1| + |v_1|, \qquad z_\alpha^\cdot = -1 - z_\alpha^2 + z_\beta^2 + u_{1\alpha} + v_{1\alpha} \tag{5.8}$$

$$z_\beta^\cdot = -2 z_\alpha z_\beta + u_{1\beta} + v_{1\beta}, \qquad u_1 = u\,|x|^{-1}, \qquad v_1 = v\,|x|^{-1}$$

Правая производная функция $T^{(1)}(z^{(1)}(w^{(2,1)}))$ вдоль движения, исходящего из позиции $w^{(2.1)}$, будет иметь вид

$$[T_2^{(1)}(z^{(1)}(w^{(2,1)}))]^{\cdot} = (dT^{(1)} / dz^1)[z^{(1)}(w^{(2.1)})]^{\cdot}$$
$$[z^1(w^{(2,1)})]^{\cdot} = P_1(w^{(2.1)}) + P_2(w^{(2,1)}, u) + P_3(w^{(2,1)}, v)$$

где $P_1(w^{(2,1)})$ объединяет слагаемые, не зависящие от управлений, $P_2(w^{(2,1)}, u)$ объединяет слагаемые, зависящие только от u, а $P_3(w((^{2,1)}, v))$ — зависящие только от v.

Для вычисления указанных величин продифференцируем по времени уравнение (5.5), получим уравнение

$$(z^{(1)}(w^{(2,1)}))^{\cdot}\,\theta(w) = (-\zeta^{(2.1)})^{\cdot} - h_\alpha(w)(z_\alpha^{(2,1)})^{\cdot} - h_\beta(w)(z_\beta^{(2,1)})^{\cdot} \tag{5.9}$$

$$\theta(w) = [-h_\alpha(w) - z^{(1)}(w) / \sqrt{(z^{(1)}(w))^2 + 1}] > 0 \tag{5.10}$$

Оценка (5.10) есть следствие предположения $R^{(1)}(w) > 0$.

Следствием (5.9), (5.10) и (5.6) является равенство

$$P_1 = (\theta(w))^{-1}[H(w) + (\zeta h_\alpha + z_\alpha)a] \tag{5.11}$$
$$H(w) = \zeta z_\alpha - h_\alpha(z_\beta{}^2 - z_\alpha{}^2 - 1) - 2h_\beta z_\alpha z_\beta$$

Простые вычисления позволяют установить оценку

$$\zeta h_\alpha + z_\alpha \leqslant 0 \tag{5.12}$$

а рассуждения, аналогичные доказательствам лемм 3.1, 3.2, устанавливают равенство

$$\max_v \min_{u(v)} [P_2(w^{(2,1)}, u) + P_3(w^{(2,1)}; v)] = 0 \tag{5.13}$$

Из оценки (5.12) следует оценка

$$P_1(w, u_{(1)}(w^{(2)}), \quad v^{(1)}(0 \leqslant n \leqslant \nu, w)) \leqslant P_1(w^{(2,1)}) \tag{5.14}$$
$$w^{(2,1)} = w^{(2,1)}(w, u^{(1)}, v^{(1)})$$

6. *Теорема* 6. Из включений $w \in D^{(1),(0)}(w)$ следуют равенства

$$T[u^\circ, v^\circ] = T[[u_{(1)}(w^{(2)}), u^{(1),(0)}(w, v)], v^{(1),(0)}(w, n)] = T^{(1),(0)}(z^{(1),(0)}(w)) \tag{6.1}$$

$$[u_{(1)}(w^{(2)}), u^{(1),(0)}(w, v)] = u^\circ(w, v) \tag{6.2}$$
$$v^{(1),(0)}(w, n) = v^\circ(w)$$

$$M \cup D^{(1),(0)}(w) = W^\circ(w), \qquad D_{(1),(0)}(w) = W_0(w) \tag{6.3}$$

Из (6.1) следует, что управления $[u_{(1)}, u^{(1),(0)}]$, $v^{(1),(0)}$ решают задачу 1 в областях $D^{(1),(0)}(w)$ с оптимальными временами $T^{(1),(0)}(z^{(1),(0)}(w))$, а в остальной части пространства позиций второй игрок может решить задачу 2 (убегания).

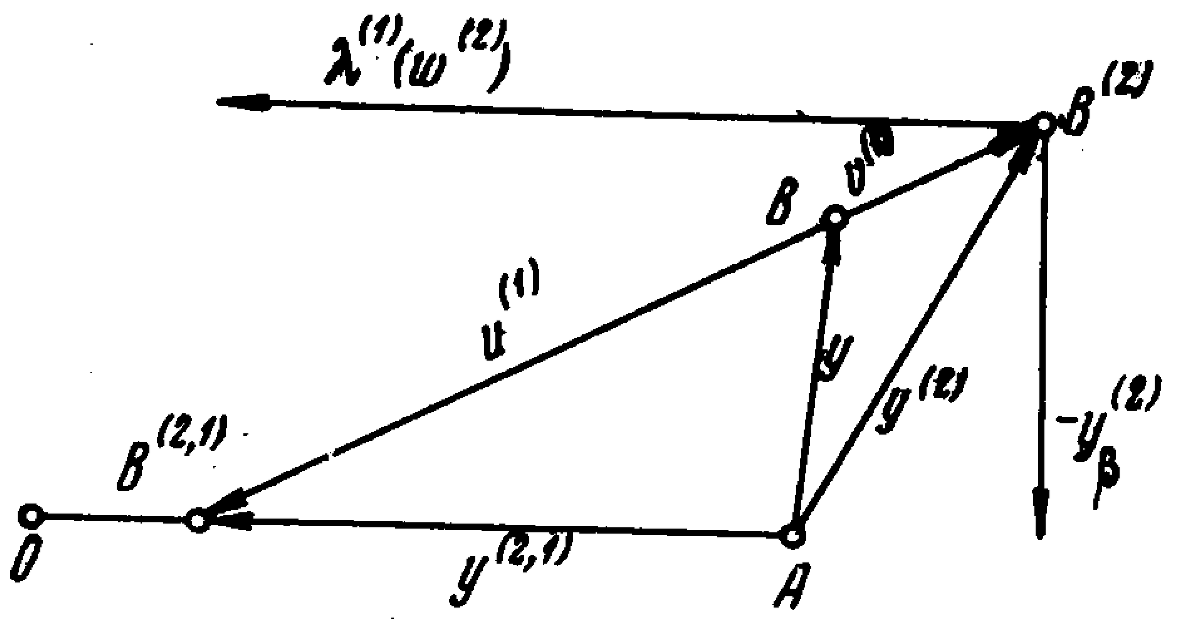
Доказательство. Снова ограничимся случаем $k = 1$. Из монотонности по $z^{(1)}(w)$ функции $T^{(1)}(z^{(1)}(w))$ и лемм 3.1, 3.2 следует равенство

$$\max_{\nu_1} \min_{\mu(\nu_1)} \Delta T^{(1)} = \Delta T(w, u^{(1)}, v^{(1)}) = 0 \tag{6.4}$$

Из (5.13) и (5.14) следует равенство

$$\max_v \min_{u(v)} (T^{(1)})^{\cdot} = T^{(1)\cdot}(w, u_{(1)}, v^{(1)}) = -1 \qquad (6.5)$$

Равенства (6.4), (6.5) доказывают равенства (6.1), (6.2) и включение $D^{(1),(0)} \in W^{\circ}(w)$. Равенства (6.3) следуют из последнего включения, включения (3.4) и равенства $M \cup D^{(1),(0)} \cup D_{(1),(0)} = W$. Доказательство теоремы 6 закончено. Случай $k = 0$ рассматривается аналогично.



Оптимальное движение иллюстрируется фигурой. Векторы $(O, A) = R$ и $(O, B) = y$ представляют начальное положение и скорость. Вектор $v^{(1)} = (B, B^{(2)})$ в сумме с вектором y образует вектор $y^{(2)} = (A, B^{(2)})$ — результат оптимальных действий второго игрока. Вектор $(B^{(2)}, B^{(2,1)}) = u^{(1)}$ в сумме с вектором $y^{(2)}$ приводит к вектору $y^{(2,1)}$ направленному вдоль вектора (O, A). После этого оптимальное движение исходит из позиции $w^{(2,1)}$ и происходит вдоль неподвижной прямой (O, A) в течение времени $T^{(1)}$.

Поступила 6 IV 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Красовский Н. Н. Теория управления движением. М., «Наука», 1968.
2. Красовский Н. Н. Игровые задачи о встрече движений. М., «Наука», 1970.
3. Красовский Н. Н., Третьяков В. Е. К задаче о преследовании в случае ограничений на импульсе управляющих сил. Дифференциальные уравнения. 1966, т. 2, вып. 5.
4. Пожарицкий Г. К. Импульсные преследования в случае линейных однотипных объектов второго порядка. ПММ, 1966, т. 30, вып. 5.