Прикладная математика и механика. Том 36, 1972

УДК 517.9

О СУЩЕСТВОВАНИИ ЗНАЧЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЫ ЗАДАННОЙ ПРОДОЛЖИТЕЛЬНОСТИ

М. И. Алексейчик

(Москва)

Естественное расширение постановки Айзекса [1] приводит к дифференциальным играм, которые описываются дифференциальными уравнениями с последействием и в информационном отношении определяются информацией о всей предыстории игры. В данной статье, примыкающей к исследованиям [2-10], усилия направлены на доказательство теоремы о существовании значения дифференциальной игры в такой, расширенной постановке. Рассматривается дифференциальная игра предписанной продолжительности с платой, заданной в виде функционала от траектории игры. Дифференциальная игра аппроксимируется некоторым семейством многошаговых игр. Рассматриваются две последовательности (минимаксная и максиминная), составленные из минимаксных и максиминных значений платы в многошаговых играх. Получены условия, при выполнении которых эти последовательности сходятся и пределы их равны. Доказательство сходимости минимаксной и максиминной последовательностей проводится по схеме, предложенной Флемингом [2]. Доказательство равенства пределов этих последовательностей основано на результатах Н. Н. Красовского и А. И. Субботина [3,9].

1. Пусть X — евклидово пространство, P, Q — компактные подмножества X, $[0, \vartheta]$ — заданный отрезок времени, $C[0, \tau]$ — совокупность функций $x = x(s)$, непрерывных на $[0, \tau]$

$$\|x\| = \sqrt{xx}, \qquad \|x(s)\|_\tau = \max_{0 \leqslant s \leqslant \tau} \|x(s)\|$$

$$\mathrm{P} = \{(t,\ x(s : 0 \leqslant s \leqslant t)) : t \in [0, \vartheta],\ x(s) \in C[0, t]\}$$

$$\mathrm{P}[t] = \{(t,\ x(s : 0 \leqslant s \leqslant t)) : x(s) \in C[0, t]\}$$

Пусть f — непрерывная на $\mathrm{P} \times P \times Q$ функция с областью значений в X, F — функционал, непрерывный на $C[0, \vartheta]$.

Множества P, Q — это области управления игроков, ϑ — заранее предписанный момент окончания игры, f — правая часть уравнения движения

$$x^{\cdot}(\ ) = f[t,\ x(s : 0 \leqslant s \leqslant t),\ u,\ v] \qquad (u \in P,\ v \in Q) \tag{1.1}$$

Игрок I, владеющий управлением $u \in P$, стремится минимизировать значение функционала платы F, игрок II, распоряжающийся управлением $v \in Q$, преследует противоположную цель. Игрокам известны функция f, множества P, Q, функционал F и момент завершения игры ϑ. В процессе игры обоим участникам предоставляется полная информация: в каждый текущий момент t им сообщаются значения переменного t и реализовавшийся к этому моменту кусок $x(s : 0 \leqslant s \leqslant t)$ траектории.

На функцию f, множества P, Q и функционал F накладываются следующие требования:

1) При фиксированном $p \in \mathrm{P}$ для любого $e \in X$

$$\min_{u \in P} \max_{v \in Q} ef[p, u, v] = \max_{v \in Q} \min_{u \in P} ef[p, u, v]$$

2) При каждом $p \in \mathrm{P}$ множества $f[p, P, v]$, $f[p, u, Q]$ выпуклы.

3) Существует $K > 0$ такое, что

$$\|f[t, y(s: 0 \leqslant s \leqslant t), u, v] - f[t, z(s: 0 \leqslant s \leqslant t), u, v]\| \leqslant \leqslant K\|y(s) - z(s)\|_t$$

для всех $t \in [0, \vartheta]$, $y(s), z(s) \in C[0, \ ]$, $u \in P$, $v \in Q$.

4) Функция f непрерывна на $\mathrm{P} \times P \times Q$ в том смысле, что $f[t_n, x_n(s: 0 \leqslant s \leqslant t_n), u_n, v_n] \to f[t, x(s: 0 \leqslant s \leqslant t), u, v]$ при $t_n \to t$, $\|x_n(s) - x(s)\|_\vartheta \to 0$, $u_n \to u$, $v_n \to v$.

5) Существует $M > 0$ такое, что $\|f\| \leqslant M$ на $\mathrm{P} \times P \times Q$.

6) Существует $L > 0$ такое, что $|F[y(s: 0 \leqslant s \leqslant \vartheta)] - F[z(s: 0 \leqslant s \leqslant \vartheta)]| \leqslant L\|y(s) - z(s)\|_\vartheta$ для всех $y(s), z(s) \in C[0, \vartheta]$.

Таково неформальное описание рассматриваемой дифференциальной игры Г. Однако непосредственное исследование проблемы существования в непрерывной дифференциальной игре наталкивается на непреодолимые трудности, связанные с необходимостью ограничить игроков таким поведением $u = u[t, x(s: 0 \leqslant s \leqslant t)]$, $v = v[t, x(s: 0 \leqslant s \leqslant t)]$, которое бы гарантировало интегрируемость уравнения (1.1). Эти трудности преодолеваются при переходе к дискретной постановке. При этом переходе исходная дифференциальная игра аппроксимируется некоторым семейством многошаговых игр. Рассматриваются две последовательности (минимаксная и максиминная), составленные из минимаксных и максиминных значений платы в многошаговых играх. Если эти последовательности сходятся к некоторому общему пределу, это предельное значение называется обобщенным значением исходной дифференциальной игры Г.

2. Пусть Σ — совокупность покрытий промежутка $[0, \vartheta]$ конечной системой соприкасающихся отрезков $[t_{i-1}, t_i]$

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < \ _n = \vartheta$$

Пусть σ — общий элемент множества Σ, $l(\sigma)$ — число отрезков $[t_{i-1}, t_i]$ в покрытии σ, $|\sigma|$ — наибольшая из длин $\Delta_i = t_i - t_{i-1}$, $\mathrm{P}_i = \mathrm{P}[t_i]$.

Пусть A, B — произвольные множества. Совокупность однозначных отображений множества A в множество B обозначим $[A \to B]$.

Формулируем определение семейства $\{\Gamma_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$ многошаговых игр Γ_σ, которыми аппроксимируется исходная дифференциальная игра Г.

Многошаговая игра Γ_σ продолжительностью в $n = l(\sigma)$ шагов описывается уравнением

$$x(t) = x(t_{i-1}) + (t - t_{i-1}) f[t_{i-1}, x(s: 0 \leqslant s \leqslant t_{i-1}), u_i, v_i] \qquad (2.1)$$
$$(t \in [t_{i-1}, t_i], \ u_i \in P, \ v_i \in Q, \ 1 \leqslant i \leqslant n)$$

Плата задается функционалом F. Игрок I, владеющий управлением $u \in P$, стремится минимизировать значение функционала F; игрок II, распоряжающийся управлением $v \in Q$, преследует противоположную цель. Игрокам известны функция f, множества P, Q, покрытие δ и функционал F. В процессе игры обоим участникам предоставляется полная информация: на каждом шаге i им сообщается реализовавшаяся к моменту этого шага позиция $(t_{i-1}, x\,(s : 0 \leqslant s \leqslant t_{i-1}))$. Эта информация позволяет игрокам строить свое поведение в виде функций

$$u_i = u_i\,[t_{i-1},\ x\,(s : 0 \leqslant s \leqslant t_{i-1})] \in [\mathrm{P}_{i-1} \to P]$$
$$v_i = v_i\,[t_{i-1},\ x\,(s : 0 \leqslant s \leqslant t_{i-1})] \in [\mathrm{P}_{i-1} \to Q]$$

Последовательность $\{u_1, \ldots, u_n\}$ ($\{v_1, \ldots, v_n\}$) таких функций называется стратегией игрока I (II).

Вместе с Γ_σ рассматриваются многошаговые игры $\Gamma_\sigma \pm$. Мажоранта Γ_σ^+ миноранта Γ_σ^-) определяется аналогично Γ_σ с тем лишь отличием, что здесь на каждом шаге i второй (первый) участник выбирает свое текущее управление, уже будучи осведомленным о состоявшемся выборе противника. Стратегией I (II) в Γ_σ^+ является последовательность отображений

$$u_i \in [\mathrm{P}_{i-1} \to P] \qquad (v_i \in [\mathrm{P}_{i-1} \times P \to Q]) \qquad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

Стратегией I (II) в Γ_σ^- служит последовательность

$$u_i \in [\mathrm{P}_{i-1} \times Q \to P] \qquad (v_i \in [\mathrm{P}_{i-1} \to Q]) \qquad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

В непрерывной постановке игре Γ_σ^+ (Γ_σ^-) соответствует дифференциальная игра Γ^+ (Γ^-) с дискриминацией [11] первого (второго) участника.

Видно, что минимаксное значение функционала F в игре Γ_σ

$$\min_{u_1 \in [\mathrm{P}_0 \to P]} \ldots \min_{u_n \in [\mathrm{P}_{n-1} \to P]} \max_{v_1 \in [\mathrm{P}_0 \to Q]} \ldots \max_{v_n \in [\mathrm{P}_{n-1} \to Q]} F\,[x\,(s : 0 \leqslant s \leqslant \vartheta)]$$

совпадает с минимаксным значением F в игре Γ_σ^+

$$\min_{u_1 \in [\mathrm{P}_0 \to P]} \ldots \min_{u_n \in [\mathrm{P}_{n-1} \to P]} \max_{v_1 \in [\mathrm{P}_0 (\times) P \to Q]} \ldots \max_{v_n \in [\mathrm{P}_{n-1} (\times) P \to Q]} F\,[x\,(s : 0 \leqslant s \leqslant \vartheta)]$$

Это общее минимаксное значение обозначим $V_\sigma^+ = V_\sigma^+\,(x_0)$. Максиминное значение платы, общее для игр Γ_σ, Γ_σ^-, обозначим $V_\sigma^- = V_\sigma^-\,(x_0)$.

Условимся произвольные функции из $C\,[0, \tau]$ обозначать $y\,(t)$ или $z\,(t)$, по возможности сохраняя обозначение $x\,(t)$ для траекторий уравнения (2.1). Положим

$$\mathrm{VAL}_k^+ = \min_{u_1 \in P} \max_{v_1 \in Q} \ldots \min_{u_k \in P} \max_{v_k \in Q}, \quad \mathrm{VAL}_k^- = \max_{v_1 \in Q} \min_{u_1 \in P} \ldots \max_{v_k \in Q} \min_{u_k \in P}$$

$$\mathrm{VAL}^\pm = \mathrm{VAL}_1^\pm$$

Теорема 1. Пусть выполнены условия 4)—6). Тогда в играх $\Gamma_\sigma^\pm$ существует седловая точка, а значения $V_\sigma^\pm$ этих игр удовлетворяют соотношению

$$V_\sigma^\pm(x_0) = \mathrm{VAL}_n{}^\pm F\,[x(s:0 \leqslant s \leqslant \vartheta)] \qquad (n = l(\sigma)) \tag{2.2}$$

Доказательство. Аргументация основывается на рассмотрении функций $V_{\sigma,i}^\pm$ $(0 \leqslant i \leqslant n)$, определяемых рекуррентными соотношениями

$$V_{\sigma,n}^\pm[y(s\colon 0 \leqslant s \leqslant \vartheta)] = F\,[y(s\colon 0 \leqslant s \leqslant \vartheta)]$$
$$V_{\sigma,i-1}^\pm[y(s\colon 0 \leqslant s \leqslant t_{i-1})] = \mathrm{VAL}^\pm V_{\sigma,i}^\pm\,[y_*(s\colon 0 \leqslant s \leqslant t_i)]$$

где $y_*(t) = y_*(t; u, v)$ — непрерывное продолжение функции $y(t) \in C[0, t_{i-1}]$ на отрезок $[0, t_i]$, заданное на $[t_{i-1}, t_i]$ по формуле

$$y_*(t) = y(t_{i-1}) + (t - t_{i-1})\,f\,[t_{i-1}, y(s\colon 0 \leqslant s \leqslant t_{i-1}), u, v]$$

По той же индуктивной схеме, по которой проводится доказательство теоремы существования Цермело — Неймана в позиционных играх [12], убеждаемся в том, что $V_{\sigma,i}^\pm\,[y(s:0 \leqslant s \leqslant t_i)]$ — значение (цена) игры $\Gamma_\sigma^\pm$, отвечающее позиции $(t_i,\ y(s:0 \leqslant s \leqslant t_i))$ как начальной.

Цена $V_{\sigma,0}^\pm$ является одновременно минимаксным и максиминным значением платы в $\Gamma_{\sigma,0}^\pm$. Поэтому $V_{\sigma,0}^\pm[x_0] = V_\sigma^\pm(x_0)$. Теперь (2.2) вытекает из определения функций $V_{\sigma,i}^\pm$.

3. Здесь после ряда вспомогательных утверждений будет установлено, что при выполнении условий 2) — 6) существуют обобщенные значения

$$V^\pm(x) = \lim V_\sigma{}^\pm(x) \quad \text{при } |\sigma| \to 0 \tag{3.1}$$

дифференциальных игр $\Gamma^\pm$.

Лемма 1. Пусть φ_1, φ_2 — скалярные функции, непрерывные на $(P \times Q)^k$. Пусть a — максимум отклонения $|\varphi_1 - \varphi_2|$ на $(P \times Q)^k$. Тогда

$$|\mathrm{VAL}_k{}^\pm\varphi_1(u_1, v_1, \ldots, u_k, v_k) - \mathrm{VAL}_k{}^\pm\varphi_2(\cdot)| \leqslant a$$

Доказательство леммы для $k = 1$ проводится непосредственно [13], а в общем случае достигается индукцией.

Скажем, что покрытие $\sigma' \in \Sigma$ содержит покрытие $\sigma \in \Sigma$, если каждый отрезок $[t_{i-1},\ t] \in \sigma$ можно представить в виде суммы из $m_i \geqslant 1$ отрезков $[t_{i,j-1}, t_{i,j}] \in \sigma'$ таким образом, чтобы

$$t_{i-1} = t_{i,0} < t_{i,1} < \ldots < t_{i,m_i} = t_{i+1} \qquad (1 \leqslant i \leqslant n = l(\sigma))$$
$$\Delta_{i,1} + \ldots + \Delta_{i,m_i} = \Delta_i \qquad (\Delta_{i,j} = t_{i,j} - t_{i,j-1})$$
$$m_1 + \ldots + m_n = m = l(\sigma')$$

Пусть $\sigma' \supseteq \sigma$. Рассмотрим функции

$$V_{\sigma,\sigma',n}^\pm[y(s:0 \leqslant s \leqslant \vartheta)] = F\,[y(s:0 \leqslant s \leqslant \vartheta)]$$
$$V_{\sigma,\sigma',i-1}^\pm\,[y(s:0 \leqslant s \leqslant t_{i-1})] = \mathrm{VAL}_{m_i}^\pm V_{\sigma,\sigma',i}^\pm\,[y^*(s:0 \leqslant s \leqslant t_i)]$$

Здесь и в дальнейшем $y^*(t) = y^*(t;\ u_1,\ v_1, \ldots,\ u_{m_i}, v_{m_i})$ — непрерывное продолжение функции $y(t) \in C\,[0,\ t_{i-1}]$ на отрезок $[0,\ t_i]$, определенное на $[t_{i-1}, t_i]$ по формуле

$$y^*(t) = y(t_{i-1}) + (t - t_{i-1}) \sum_{1 \leqslant j \leqslant m_i} (\Delta_{i,j} / \Delta_i) f[t_{i-1}, y(s: 0 \leqslant s \leqslant t_{i-1}), u_j, v_j]$$

Положим $V^{\pm}_{\sigma,\sigma'} = V^{\pm}_{\sigma,\sigma',0}$. Заметим, что, если $\sigma' = \sigma$, то

$$V^{\pm}_{\sigma,\sigma',i} = V^{\pm}_{\sigma,i}, \qquad V^{\pm}_{\sigma,\sigma'} = V_\sigma^{\pm}$$

Лемма 2. Пусть выполнены условия 3) — 6). Пусть $\sigma' \supseteq \sigma$. Тогда функции $V^{\pm}_{\sigma,\sigma',i}$ удовлетворяют условию Липшица на $C\,[0, t_i]$ с постоянной $Le^{K\vartheta}$.

Доказательство. Покажем, что при каждом $0 \leqslant i \leqslant n$

$$|V^{\pm}_{\sigma,\sigma',i}[y(s: 0 \leqslant s \leqslant t_i)] - V^{\pm}_{\sigma,\sigma',i}[z(s: 0 \leqslant s \leqslant t_i)] \leqslant a_i \| y(s) - z(s) \|_{t_i} \tag{3.2}$$

где

$$a_n = L, \qquad a_{i-1} = (1 + K\Delta_i) a_i, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n \tag{3.3}$$

Это верно при $i = n$. Рассуждая индуктивно, предположим, что (3.2) справедливо для некоторого i. В этом предположении докажем (3.2) для $i - 1$.

По условию 3) для всякого $t \in [t_{i-1}, t_i]$

$$\| y^*(t) - z^*(t) \| \leqslant \| y(t_{i-1}) - z(t_{i-1}) \| + \sum_{1 \leqslant j \leqslant m_i} \Delta_{i,j} K \| y(s) - z(s) \|_{t_{i-1}} =$$

$$= \| y(t_{i-1}) - z(t_{i-1}) \| + \Delta_i K \| y(s) - z(s) \|_{t_{i-1}} \leqslant (1 + K\Delta_i) \| y(s) - z(s) \|_{t_{i-1}}$$

Отсюда и из индуктивного предположения находим, что

$$| V^{\pm}_{\sigma,\sigma',i}[y^*(s: 0 \leqslant s \leqslant t_i)] - V^{\pm}_{\sigma,\sigma',i}[z^*(s: 0 \leqslant s \leqslant t_i)] | \leqslant$$

$$\leqslant a_i \max \{ \| y(s) - z(s) \|_{t_{i-1}}, \quad (1 + K\Delta_i) \| y(s) - z(s) \|_{t_{i-1}} \} =$$

$$= a_i (1 + K\Delta_i) \| y(s) - z(s) \|_{t_{i-1}}$$

для любых $(u_1, v_1, \ldots, u_{m_i}, v_{m_i}) \in (P \times Q)^{m_i}$.

Справедливость (3.2) для $i - 1$ объясняется леммой 1.

Соотношения (3.2) установлены. Все $\Delta_i > 0$, $\Delta_1 + \ldots + \Delta_n = \vartheta$, поэтому вследствие (3.3)

$$a_n \leqslant a_{n-1} \leqslant \ldots \leqslant a_0 = (1 + K\Delta_1) \ldots (1 + K\Delta_n) L \leqslant L(1 + K\vartheta / n)^n \leqslant Le^{K\vartheta}$$

Заменяя в (3.2) a_i на постоянную $Le^{K\vartheta}$, приходим к утверждению леммы.

Пусть $A(x)$ — совокупность абсолютно непрерывных на $[0, \vartheta]$ функций $z(t)$, стесненных ограничениями $z(0) = x$, $\| z^{\cdot}(t) \| \leqslant M$. Через $\omega(\lambda, x)$ обозначим максимум отклонения

$$\| f[t, z(s: 0 \leqslant s \leqslant t), u, v] - f[\tau, z(s: 0 \leqslant s \leqslant \tau), u, v] \|$$

по всем $| - \tau | \leqslant \lambda$, $z(s) \in A(x)$, $(u, v) \in P \times Q$. Согласно условию (4), функция $\omega(\lambda, x)$ непрерывна на $[0, \vartheta] \times X$. Кроме того, $\omega(0, x) \equiv 0$.

Лемма 3. Пусть выполнены условия 3) — 6). Пусть $\sigma' \supseteq \sigma$. Тогда для любого $x \in X$

$$| V_{\sigma'}^{\pm}(x) - V^{\pm}_{\sigma,\sigma'}(x) | \leqslant L\Omega$$

$$\Omega = 2Me^{K\vartheta} |\sigma| + [(e^{K\vartheta} - 1) / K]\, \omega(|\sigma|, x)$$

Доказательство. Вместе с траекторией $x(t)$ уравнения

$$x(t) = x(t_{i,j-1}) + (t - t_{i,j-1}) f[t_{i,j-1}, \ x(s{:}\ 0 \leqslant s \leqslant t_{i,j-1}), \ u_{i,j}, v_{i,j}]$$
$$(t \in [t_{i,j-1}, \ t_{i,j}], \quad u_{i,j} \in P, \quad v_{i,j} \in Q, \quad 1 \leqslant j \leqslant m_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant n)$$

рассмотрим траекторию $y(t)$, определяемую уравнением

$$y(t) = y(t_{i-1}) + (t - t_{i-1}) \sum_{1 \leqslant j \leqslant m_i} (\Delta_{i,j} / \Delta_i) f[t_{i-1}, \ y(s{:}\ 0 \leqslant s \leqslant t_{i-1}), u_{i,j}, v_{i,j}]$$
$$(t \in [t_{i-1}, t_i], \quad u_{i,j} \in P, \quad v_{i,j} \in Q, \quad 1 \leqslant i \leqslant n)$$

и начальным условием $y(0) = x(0) = x_0$.

Опираясь на неравенства

$$\begin{gathered}\| f[t, x(s{:}\ 0 \leqslant s \leqslant t), u, v] - f[\tau, y(s{:}\ 0 \leqslant s \leqslant \tau), u, v] \| \leqslant \\ \leqslant \| f[t, x(s{:}\ 0 \leqslant s \leqslant t, u, v] - f[\tau, x(s{:}\ 0 \leqslant s \leqslant \tau), u, v] \| + \\ + \| f[\tau, x(s{:}\ 0 \leqslant s \leqslant \tau), u, v] - f[\tau, y(s{:}\ 0 \leqslant s \leqslant \tau), u, v] \| \leqslant \\ \leqslant \omega(|t - \tau|, x_0) + K \| x(s) - x(s) \|_\tau \end{gathered} \tag{3.4}$$

$$\| x(t) - y(t) \| \leqslant 2M |t - \tau| + \| x(\tau) - y(\tau) \|$$

$$\| x(s) - y(s) \|_{t_i} \leqslant 2M |\sigma| + \max_{0 \leqslant j \leqslant i} \| x(t_j) - y(t_j) \| \tag{3.5}$$

индукцией по i легко показать, что

$$\max_{0 \leqslant j \leqslant i} \| x(t_j) - y(t_j) \| \leqslant b_i \qquad (0 \leqslant i \leqslant n) \tag{3.6}$$

$$b_0 = 0, \quad b_i = (1 + K\Delta_i) b_{i-1} + \Delta_i [2KM |\sigma| + \omega(|\sigma|, x_0)]$$

Положим

$$c_i(\sigma) = b_i / [2KM |\sigma| + \omega(|\sigma|, x_0)]$$

Тогда величины $c_i(\sigma)$ удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$c_0(\sigma) = 0, \quad c_i(\sigma) = (1 + K\Delta_i) c_{i-1}(\sigma) + \Delta_i \qquad (1 \leqslant i \leqslant n) \tag{3.7}$$

Эти соотношения позволяют $c_n(\sigma)$ представить в виде

$$\begin{gathered} c_n(\sigma) = (\Delta_1 + \ldots + \Delta_n) + K(\Delta_1\Delta_2 + \ldots + \Delta_1\Delta_n + \\ + \Delta_2\Delta_3 + \ldots + \Delta_2\Delta_n + \ldots + \Delta_{n-1}\Delta_n) + \ldots + K^{n-1}\Delta_1 \ldots \Delta_n \end{gathered}$$

Отсюда $c_n(\sigma) \leqslant c_n(\sigma(n))$, где $\sigma(n)$ — покрытие, образованное из n отрезков $[t_{i-1}, t_i]$ одной и той же длины $\Delta_i = \vartheta / n$. Подставляя в (3.7) $\Delta_i = \vartheta / n$, находим

$$\begin{gathered} c_n(\sigma(n)) = [1 + (1 + K\vartheta / n) + \ldots + (1 + K\vartheta / n)^{n-1}] \vartheta / n = \\ = [(1 + K\vartheta / n)^n - 1] K \leqslant (e^{K\vartheta} - 1) / K \end{gathered}$$

Это приводит к следующей оценке:

$$b_n \leqslant [(e^{K\vartheta} - 1) / K] [2KM |\sigma| + \omega(|\sigma|, x_0]$$

Отсюда, из (3.5), (3.6) и условия 6) вытекает, что $\| x(s) - y(s) \|_\vartheta \leqslant \Omega$, $| F[x(s: 0 \leqslant s \leqslant \vartheta)] - F[y(s: 0 \leqslant s \leqslant \vartheta)] \leqslant L\Omega$ для любых

$$(u_{1,1}, v_{1,1}, \ldots, u_{n,m_n}, v_{n,m_n}) \in (P \times Q)^m$$

На основании леммы 1 получаем

$$| V^{\pm}_{\sigma'}(x_0) - V^{\pm}_{\sigma,\sigma'}(x_0) | = | \mathrm{VAL}^{\pm}_{m} F [x(s\colon 0 \leqslant s \leqslant \vartheta)] - \mathrm{VAL}^{\pm}_{m} F [y(s\colon 0 \leqslant s \leqslant \vartheta)] | \leqslant L\Omega$$

Лемма доказана.

Положим

$$\Sigma_*(\sigma) = \{ \sigma'' : \sigma'' \in \Sigma,\ l(\sigma'') = l(\sigma) \}$$

Общий элемент множества $\Sigma_*(\sigma)$ обозначим σ_*. Пусть $[\tau_{i-1}, \tau_i]$ — последовательные соприкасающиеся отрезки, составляющие покрытие σ_*

$$\delta_i = \tau_i - \tau_{i-1}, \qquad \rho[\sigma, \sigma_*] = \max_{0 \leqslant i \leqslant n} | t_i - \tau_i |$$

Лемма 4. Пусть выполнены условия 3) — 6). Тогда существует неотрицательная скалярная функция $D(\sigma, \sigma_*, x)$, такая, что для любого $\sigma \in \Sigma$

$$| V_\sigma^{\pm}(x) - V_{\sigma *}^{\pm}(x) | \leqslant LD(\sigma, \sigma_*, x) \tag{3.8}$$

$$\lim_{\rho[\sigma, \sigma_*] \to 0} D(\sigma, \sigma_*, x) \leqslant 2Me^{K\vartheta} |\sigma| \tag{3.9}$$

Доказательство. Вместе с траекторией $x(t)$ уравнения (2.1) рассмотрим траекторию $y(t)$, определяемую уравнением

$$y(t) = y(\tau_{i-1}) + (t - \tau_{i-1}) f[\tau_{i-1}, y(s\colon 0 \leqslant s \leqslant \tau_{i-1}), u_i, v_i]$$
$$(t \in [\tau_{i-1}, \tau_i], \quad u_i \in P, \quad v_i \in Q, \quad 1 \leqslant i \leqslant n)$$

и начальным условием $y(0) = x(0) = x_0$.

Используя (3.4) совместно с неравенствами

$$| \Delta_i - \delta_i | \leqslant 2\rho[\sigma, \sigma_*]$$

$$\| x(s) - y(s) \|_{t_i} \leqslant 2M |\sigma| + M\rho[\sigma, \sigma_*] + \max_{0 \leqslant j \leqslant i} \| x(t_j) - y(\tau_j) \| \tag{3.10}$$

индукцией по i нетрудно установить, что

$$\max_{0 \leqslant j \leqslant i} \| x(t_j) - y(\tau_j) \| \leqslant d_i \qquad (0 \leqslant i \leqslant n) \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned} d_0 = 0;\ \ d_i = (1 + K\Delta_i) d_{i-1} + \Delta_i \omega(\rho[\sigma, \sigma_*], x_0) + \\ + \Delta_i KM(2|\sigma| + \rho[\sigma, \sigma_*]) + 2M\rho[\sigma, \sigma_*] \end{aligned} \tag{3.12}$$

Положим

$$D(\sigma, \sigma_*, x_0) = d_n(\sigma, \sigma_*, x_0) + M(2|\sigma| + \rho[\sigma, \sigma_*])$$

Тогда в силу (3.10) и (3.11)

$$\| x(s) - y(s) \|_\vartheta \leqslant D(\sigma, \sigma_*, x_0)$$

$$| F[x(s\colon 0 \leqslant s \leqslant \vartheta)] - F[y(s\colon 0 \leqslant s \leqslant \vartheta)] | \leqslant LD(\sigma, \sigma_*, x_0)$$

для всех $(u_1, v_1, \ldots, u_n, v_n) \in (P \times Q)^n$. Отсюда и из леммы 1 выводим (3.8).

Чтобы убедиться в справедливости (3.9), рассмотрим величины $d_i^* = d_i^*(\sigma)$, определенные формулами

$$d_0^* = 0, \qquad d_i^* = (1 + K\Delta_i) d_{i-1}^* + 2\Delta_i KM |\sigma| \qquad 1 \leqslant i \leqslant n \tag{3.13}$$

Сопоставляя (3.12) и (3.13) и принимая во внимание, что

$$\omega(\lambda, x_0) \to 0 \quad \text{при } \lambda \to 0 \tag{3.14}$$

заключаем, что

$$d_n(\sigma, \sigma_*, x_0) \to d_n^*(\sigma) \quad \text{при } \rho[\sigma, \sigma_*] \to 0$$

Теперь (3.9) вытекает из оценки

$$d_n^*(\sigma) \leqslant (e^{K\vartheta} - 1)\, 2M\, |\sigma|$$

Лемма 5. Пусть выполнены условия 2) — 6). Пусть $\sigma' \supseteqq \sigma$. Тогда

$$V_\sigma^+(x) \geqslant V_{\sigma,\sigma'}^+(x), \qquad V_\sigma^-(x) \leqslant V_{\sigma,\sigma'}^-(x)$$

Доказательство. Неравенства

$$V_{\sigma,i}^+ \geqslant V_{\sigma,\sigma',i}^+, \qquad V_{\sigma,i}^- \leqslant V_{\sigma,\sigma',i}^- \tag{3.15}$$

верны для $i = n$. Их справедливость в общем случае устанавливается при помощи тех же индуктивных рассуждений, которые применялись Флемингом при доказательстве леммы 3 работы [2]. При $i = 0$ неравенства (3.15) обращаются в соотношения, требуемые леммой.

Теорема 2. Пусть выполнены условия 2) — 6). Тогда пределы (3.1) существуют, сходимость равномерно по x на всяком ограниченном подмножестве пространства X, предельные функции $V^{\pm}(x)$ удовлетворяют условию Липшица на X с постоянной $Le^{K\vartheta}$.

Доказательство. Пусть

$$\Sigma^*(\sigma) = \{\sigma'': \sigma'' \in \Sigma,\ l(\sigma'') \geqslant l(\sigma)\}, \qquad \sigma^* \in \Sigma^*(\sigma)$$

$$\Sigma(\sigma, \sigma^*) = \{\sigma'': \sigma'' \in \Sigma,\ \sigma'' \subseteq \sigma^*, \quad l(\sigma'') = l(\sigma)\}$$

Пусть $\sigma_*(\sigma, \sigma^*)$ — произвольное покрытие из $\Sigma(\sigma, \sigma^*)$, подчиняющееся соотношениям

$$\sigma_*(\sigma, \sigma^*) \subseteq \sigma^* \tag{3.16}$$

$$l(\sigma_*(\sigma, \sigma^*)) = l(\sigma) \tag{3.17}$$

$$\rho[\sigma, \sigma_*(\sigma, \sigma^*)] = \min_{\sigma'' \in \Sigma(\sigma, \sigma^*)} \rho[\sigma, \sigma''] \tag{3.18}$$

На основании лемм 3—5, (3.16) и (3.17)

$$V_{\sigma*}^+(x) \leqslant V_\sigma^+(x) + L\Omega + LD(\sigma, \sigma_*(\sigma, \sigma^*), x)$$

В следующих трех соотношениях предел в левой части берется по всем $\sigma^* \in \Sigma^*(\sigma)$, $|\sigma^*| \to 0$. Согласно (3.16) — (3.18)

$$\lim \rho[\sigma, \sigma_*(\sigma, \sigma^*)] = 0$$

Поэтому в силу (3.9)

$$\overline{\lim}\, V_{\sigma*}^+(x) \leqslant V_\sigma^+(x) + L\Omega + 2LMe^{K\vartheta}|\sigma|$$

Но при любом фиксированном $\sigma \in \Sigma$

$$\overline{\lim}\, V_{\sigma*}^+ = \overline{\lim}_{|\sigma| \to 0} V_\sigma^+(x)$$

Следовательно, для каждого $\sigma \in \Sigma$

$$\overline{\lim}_{|\sigma| \to 0} V_\sigma^+(x) \leqslant V_\sigma^+(x) + L\Omega + 2LMe^{K\vartheta}|\sigma|$$

Однако ввиду (3.14) сумма $\Omega + 2Me^{K\vartheta}|\sigma|$ стремится к нулю при $|\sigma| \to 0$. Значит

$$\overline{\lim_{|\sigma| \to 0}}\, V_\sigma^+(x) \leqslant \underline{\lim}_{|\sigma| \to 0} V_\sigma^+(x)$$

Существование предела $V^+(x)$ тем самым установлено. Доказательство существования предела $V^-(x)$ проводится аналогично. В оставшемся теорема вытекает из леммы 2.

4. Здесь будет показано, что при выполнении условий 1) — 6) существует обобщенное значение $V = V^+ = V^-$ игры Г.

Лемма 6. Пусть выполнены условия 1) — 6). Тогда при каждом $\sigma \in \Sigma$ пределы

$$V_{\sigma,0,i}[y(s:0\leqslant s\leqslant t_i)] = \lim_{\sigma'\supseteq\sigma,\,\|\sigma'\|\to 0} V^{\pm}_{\sigma,\sigma',i}[y(s:0\leqslant s\leqslant t_i)]$$

существуют и равны, сходимость равномерна по $y(s)$ на всяком компактном подмножестве пространства $C[0, t_i]$, предельные функции $V_{\sigma,i,0}$ удовлетворяют условию Липшица на $C[0, t_i]$ с постоянной $Le^{K\theta}$.

Доказательство. Лемма верна при $i = n$. Рассуждая индуктивно, предположим, что лемма справедлива для некоторого i. В этом предположении докажем лемму для $i - 1$.

Заметим, прежде всего, что на основании леммы 2 достаточно убедиться в том, что при каждом $y(s) \in C[0, t_{i-1}]$ пределы $V_{\sigma,0,i-1}$ существуют и равны. Фиксировав $y(s) \in C[0, t_{i-1}]$, через B обозначим совокупность функций $z(s) \in C[0, t_i]$, каждая из которых на $[0, t_{i-1}]$ совпадает с $y(s)$, а на $[t_{i-1}, t_i]$ подчиняется условию Липшица по s с постоянной M. Положим

$$\varepsilon^{\pm} = \max_{z(s)\in B} | V_{\sigma,0,i}[z(s\colon 0\leqslant s\leqslant t_i)] - V^{\pm}_{\sigma,\sigma',i}[z(s\colon 0\leqslant s\leqslant t_i)]|$$

Тогда, согласно лемме 1, отклонение

$$| V^{\pm}_{\sigma,\sigma',i-1}[y(s\colon 0\leqslant s\leqslant t_{i-1})] - \mathrm{VAL}^{\pm}_{m_i} V_{\sigma,0,i}[y^*(\cdot)]| =$$
$$= |\mathrm{VAL}^{\pm}_{m_i} V^{\pm}_{\sigma,\sigma',i}[y^*(\cdot)] - \mathrm{VAL}^{\pm}_{m_i} V_{\sigma,0,i}[y^*(\cdot)]|$$

не превосходит $\varepsilon^{\pm}$.

Рассмотрим теперь на отрезке $[t_{i-1}, t_i]$ некоторую вспомогательную дифференциальную игру Г*. Г* описывается уравнением $\dot{x}(t) = f^*(u, v) \equiv f[t_{i-1}, y(s:0\leqslant s\leqslant t_{i-1}), u, v]$, $u \in P$, $v \in Q$ с начальным условием $x(t_{i-1}) = y(t_{i-1})$. Платой в Г* является функционал

$$F^*[y(t_{i-1}),\ x(t_i)] = V_{\sigma,0,i}[\xi(s\colon 0\leqslant s\leqslant t_i)]$$

где $\xi(t)$ — продолжение функции $y(t) \in C[0, t_{i-1}]$ на отрезок $[0, t_i]$, заданное на $[t_{i-1}, t_i]$ по формуле $\xi(t) = y(t_{i-1}) + [(t - t_{i-1})/\Delta_i][x(t_i) - y(t_{i-1})]$. Поскольку Г* удовлетворяет условиям 1) — 6) и не содержит элементов последействия, к ней применимы результаты работ [8, 9]. Опираясь на эти результаты, легко установить, что существуют и равны пределы

$$\lim \mathrm{VAL}^{\pm}_{m_i} F^*[y(t_{i-1}), x(t_i)] \equiv \lim \mathrm{VAL}^{\pm}_{m_i} V_{\sigma,0,i}[x^*(s\colon 0\leqslant s\leqslant t_i)] \equiv$$
$$\equiv \lim \mathrm{VAL}^{\pm}_{m_i} V_{\sigma,0,i}[y^*(s\colon 0\leqslant s\leqslant t_i)]$$

(пределы берутся по всем $\sigma' \supseteq \sigma$, $|\sigma'| \to 0$). Так как по индуктивному предположению $\varepsilon^{\pm} \to 0$ при $|\sigma'| \to 0$, то пределы $V_{\sigma,0,i-1}$ также существуют и равны.

Лемма доказана.

Теорема 3. Пусть выполнены условия 1) — 6). Тогда $V^+(x) = V^-(x)$.

Доказательство. Согласно лемме 3 для любых $\sigma' \supseteq \sigma$

$$|V^+_{\sigma'}(x) - V^-_{\sigma'}(x)| \leqslant |V^+_{\sigma,\sigma'}(x) - V^-_{\sigma,\sigma'}(x)| + 2L\Omega$$

В соответствии с леммой 6, рассматриваемой при $i = 0$, отклонение $| V^+_{\sigma, \sigma'}(x) - V^-_{\sigma, \sigma'}(x) |$ стремится к нулю при $| \sigma' | \to 0$. Поэтому по теореме 2 отклонение $| V^+(x) - V^-(x) |$ не превосходит $2 L \Omega$. Но $\Omega \to 0$, когда $| \sigma | \to 0$. Следовательно, $V^+(x) = V^-(x)$.

5. Пусть M (N) — совокупность мер μ (ν), заданных на σ-алгебре борелевских подмножеств множества P (Q) и нормированных на этом множестве

$$\mu(P) = \int d\mu = 1 \left(\nu(Q) = \int d\nu = 1\right)$$

Положим

$$f[p, \mu, \nu] = \iint f[p, u, v]\, d\mu d\nu$$

Исходную дифференциальную игру, рассматриваемую в смешанной постановке [8, 9], обозначим G. В смешанной постановке развитие игры описывается уравнением

$$x^{\cdot}(t) = f[t, x(s: 0 \leqslant s \leqslant t), \mu, \nu], \; \mu \in \mathrm{M}, \; \nu \in \mathrm{N}$$

Таким образом, в G фактическими управлениями игроков являются меры $\mu \in \mathrm{M}$, $\nu \in \mathrm{N}$. Заметим в этой связи, что множества M, N слабо компактны (см. [14], стр. 791) и выпуклы.

Производя в определениях п. 2 замену $u, v, P, Q \to \mu, \nu, \mathrm{M}, \mathrm{N}$, приходим к соответственным определениям для дифференциальной игры G. Мажорантную и минорантную смешанные многошаговые игры, соответствующие покрытию $\sigma \in \Sigma$, обозначим $G_\sigma^\pm$. Значения этих игр обозначим $U_\sigma^\pm$.

Теорема 4. Пусть выполнены условия 3) — 6). Тогда в играх $G_\sigma^\pm$ существует седловая точка, значения $U_\sigma^\pm$ этих игр удовлетворяют соотношению

$$U_\sigma^\pm(x_0) = \mathrm{VAL}_n^\pm F[x(s: 0 \leqslant s \leqslant \vartheta)] \qquad (n = l(\sigma))$$

пределы

$$U^\pm(x) = \lim_{|\sigma| \to 0} U_\sigma^\pm(x)$$

существуют и равны, сходимость равномерна по x на всяком ограниченном подмножестве пространства X, функции $U_\sigma^\pm$ и их предельные значения $U^+(x) = U^-(x)$ подчиняются условию Липшица на X с постоянной $Ie^{K\vartheta}$.

6. Пусть выполнены условия 2) — 6). Тогда одновременно существуют обобщенные значения $V^\pm$ дифференциальных игр $\Gamma^\pm$ и обобщенное значение $U = U^+ = U^-$ дифференциальной игры G. Легко проверить, что значения эти связаны неравенством $V^+ \geqslant U \geqslant V^-$. Следовательно, при выполнении условий 1) — 6), $V^+ = U = V^- = V$.

7. Рассмотрим важный частный случай, когда уравнение движения (1.1) не содержит элементов последействия, т. е. имеет вид

$$x^{\cdot}(t) = f[t, x(t), u, v] \qquad (u \in P, \; v \in Q) \qquad (7.1)$$

В этом случае интересно выявить те дополнительные условия на функционал платы, при выполнении которых дифференциальная игра с полной информацией о текущей позиции $(t,\ x\,(t))$ имеет (обобщенное) значение в чистых или смешанных стратегиях.

Функционал F назовем квазиаддитивным, если существует непрерывная на $(-\infty,\ \infty) \times (-\infty,\ \infty)$ скалярная функция $\Phi(\alpha,\ \beta)$, обладающая следующими свойствами:

$$\Phi\,(\alpha,\ \beta) \leqslant \Phi\,(\alpha,\ \beta') \text{ для всех } \alpha,\ \beta \leqslant \beta'$$

$$F\,[x\,(s : a \leqslant s \leqslant b)] =$$

$$= \Phi\,[(F\,(x\,(s : a \leqslant s \leqslant \tau)],\ F\,[x\,(s : \tau \leqslant s \leqslant b)])$$

для всех $0 \leqslant a \leqslant \tau \leqslant b \leqslant \vartheta,\ x\,(s) \in C\,[0,\ \vartheta]$

Пусть $h\,(x)$ — скалярная функция, непрерывная на X. Тогда функционалы

$$F = h\,(x\,(\vartheta)), \qquad F = \min_{0 \leqslant s \leqslant \vartheta} h\,(x\,(s)), \qquad F = \int\limits_0^{\vartheta} h\,(x\,(s))\,ds$$

квазиаддитивны: в первом случае $\Phi\,(\alpha,\ \beta) = \beta$, во втором — $\Phi\,(\alpha,\ \beta) = \min\,\{\alpha,\ \beta\}$, в третьем — $\Phi\,(\alpha,\ \beta) = \alpha + \beta$.

Теорема 5. Пусть выполнены условия 3) $\div$ 6). Предположим, что функционал F квазиаддитивен, а уравнение движения имеет вид (7.1). Тогда в играх $\Gamma_\sigma^{\pm}$ $(G_\sigma^{\pm})$ существует седловая точка, образованная такими стратегиями

$$\{u_1^\circ, \ldots, u_n^\circ\}, \qquad \{v_1^\circ, \ldots, v_n^\circ\}$$

$$(\{\mu_1^\circ, \ldots, \mu_n^\circ\}, \qquad \{\nu_1^\circ, \ldots, \nu_n^\circ\})$$

каждая компонента которых при $i > 1$ не зависит от $x\,(s : 0 \leqslant s < t_{i-1})$.

Доказательство получается из того, что в условиях теоремы функции $V_{\sigma,\,i}^{\pm}$ можно определить по формулам

$$V_{\sigma,n}^{\pm}\,[y\,(s : 0 \leqslant s \leqslant \vartheta)] = F\,[y\,(s : 0 \leqslant s \leqslant \vartheta)]$$

$$V_{\sigma,i-1}^{\pm}\,[y\,(s : 0 \leqslant s \leqslant t_{i-1})] = \mathrm{VAL}^{\pm}\Phi\,(F\,[y\,(s : 0 \leqslant s \leqslant t_{i-1})],\ V_{\sigma,i}^{\pm}\,[y_*\,(s : t_{i-1} \leqslant s \leqslant t_i)]) = \tag{7.2}$$

$$= \Phi\,(F\,[y\,(s : 0 \leqslant s \leqslant t_{i-1})],\ \mathrm{VAL}^{\pm}V_{\sigma,i}^{\pm}\,[y_*\,(s : t_{i-1} \leqslant s \leqslant t_i)])$$

Эта возможность, в свою очередь, объясняется равенствами

$$V_{\sigma,0}^{\pm}\,[x_0] = \mathrm{VAL}_n^{\pm}F\,[x\,(s : 0 \leqslant s \leqslant \vartheta)] \quad (n = l\,(\sigma))$$

которые нетрудно вывести из (7.2) и разложения

$$F\,[x\,(s : 0 \leqslant s \leqslant \vartheta)] = \Phi\,(F\,[x\,(s : t_0 \leqslant s \leqslant t_1)]\ \Phi\,(\cdots\Phi\,(F\,[x\,(s : t_{n-2} \leqslant s \leqslant t_{n-1})]$$

$$F\,[x\,(s : t_{n-1} \leqslant s \leqslant t_n)])\cdots))$$

Автор благодарен Г. К. Пожарицкому за внимание к работе.

Поступила 8 IV 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М., «Мир», 1967.
2. Fleming W. H. The convergence problem for differential games. J. Math. Anasis and Applic, 1961, vol. 3, № 1.
3. Понтрягин Л. С. О линейных дифференциальных играх. 2. Докл. АН СССР, 1967, т. 175, № 4.
4. Смольяков Э. Р. Дифференциальные игры в смешанных стратегиях. Докл. АН СССР, 1970, т. 191, № 1.
5. Varaiya P., Lin J. Existence of saddle points in differential games. SIAM J. Control, 1969, vol. 7, № 1.
6. Петров Н. Н. О существовании значения игры преследования. Докл. АН СССР, 1970, т. 190, № 6.
7. Friedman A. Differential games with restricted phase coordinates. J. of Differential Equations, 1970, vol. 8, № 1.
8. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Альтернатива для игровой задачи сближения. ПММ, 1970, т. 34, вып. 6.
9. Красовский Н. Н., Субботин А. И. О структуре игровых задач динамики. ПММ, 1971, т. 35, вып. 1.
10. Осипов Ю. С. К теории дифференциальных игр систем с последействием. ПММ, 1971, т. 35, вып. 2.
11. Красовский Н. Н., Репин Ю. М., Третьяков В. Е. О некоторых игровых ситуациях в теории управляемых систем. Изв. АН СССР, Техн. кибернетика, 1965, № 4.
12. Позиционные игры. Сб. статей под ред. Н. Н. Воробьева и И. Н. Врублевской. М., «Наука», 1967.
13. Воробьев Н. Н., Романовский И. В. Игры с запрещенными ситуациями. Вестн. ЛГУ, сер. матем. механ. и астрономии, 1959, № 7, вып. 2.
14. Дынкин Е. Б. Марковские процессы. М., Физматгиз, 1963.