Прикладная математика и механика. Том 36, 1972

УДК 517.9

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ НЕКОТОРЫМИ ПРОЦЕССАМИ НАБЛЮДЕНИЯ

В. Б. Колмановский

(Москва)

Изучается вопрос об оптимальных законах наблюдения, обеспечивающих заданную точность определения ненаблюдаемых координат. Полученные условия разрешимости поставленных задач формулируются в терминах коэффициентов уравнений.

Работа примыкает к статьям [1,2]. Иной подход к задачам оптимального наблюдения при случайных возмущениях имеется в [3,4].

1. Предположим, что состояние объекта в момент времени t определяется вектором фазовых координат $x(t) \in R_n$, где R_n означает n-мерное евклидово пространство, функция $x(t)$ — решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$x^{\cdot}(t) = Ax(t) + f(t), \quad x(0) = x_0 \quad (0 \leqslant t \leqslant T) \tag{1.1}$$

Доступный наблюдению вектор $y(t)$ таков, что

$$dy(t) = h(t)Hx(t)\,dt + \sigma\, d\xi(t), \quad y(0) = 0 \tag{1.2}$$

Относительно коэффициентов уравнений (1.1), (1.2) постоянно предполагаются выполненными следующие ограничения. Матрица A размером $n \times n$ с постоянными элементами и детерминированная, измеримая, ограниченная функция $f(t) \in R_n$ заданы. Случайная величина $x(0)$ имеет невырожденное гауссово распределение с параметрами

$$m_0 = Mx(0), \qquad D_0 = M(x_0 - m_0)(x_0 - m_0)'$$

Здесь штрих — знак транспонирования, M — математическое ожидание, а матрица D_0 положительно определена ввиду невырожденности распределения $x(0)$. Винеровский случайный процесс $\xi(t)$ предполагается независимым от $x(0)$, матрица σ — невырожденной, а детерминированная функция $h(t)$ — скалярной. Размерность наблюдаемой величины $y(t)$ может быть любой (от единицы до n). Для дальнейшего, однако, удобно считать, что $y(t) \in R_n$, размер постоянных матриц H и σ равен $n \times n$, причем матрица σ невырожденная.

Последние требования не ограничивают общности.

Действительно, если наблюдению доступна i-мерная величина $y_i(t)$, т.е. уравнения (1.2) имеют вид

$$dy_i(t) = h(t)H_i x(t)\,dt + \sigma_i\, d\zeta_i(t), \qquad y_i(0) = 0$$

то следует рассмотреть новый процесс $\zeta(t) = (\zeta_i(t), \eta(t))$, где винеровский процесс с независимыми компонентами $\eta(t) \in R_{n-i}$ не зависит от $\zeta_i(t)$ и от $x(0)$, и ввести новые матрицы H и σ следующим образом. Первые i строк матрицы H совпадают с соответствующими i строками матрицы H_i, а остальные равны нулю; в левом верхнем углу матрицы σ стоит матрица σ_i, далее элементы $\sigma_{jj} = 1$ при $j = i + 1, \ldots, n$, прочие же элементы матрицы σ равны нулю.

Управление процессом наблюдения осуществляется при помощи выбора скалярной функции $h(t)$.

Обозначим через q ненулевой вектор из R_n и введем в рассмотрение линейную комбинацию $q' x(T)$. В результате проведения наблюдений погрешность определения величины $q' x(T)$ должна быть не больше заданного фиксированного числа $\alpha > 0$. Точнее говоря, должно иметь место неравенство

$$q' M(x(T) - m(T))(x(T) - m(T))' q = q' D(T) q \leqslant \alpha \tag{1.3}$$

где $m(T)$ — условное математическое ожидание вектора $x(T)$ при условии $y(s)$ $(0 \leqslant s \leqslant T)$, а матрица дисперсии $D(t)$ апостериорного распределения задается соотношениями [1]

$$\begin{gathered} D^{\cdot}(t) = AD(t) + D(t)A' - D(t)H'(\sigma\sigma')^{-1}HD(t)\gamma(t) \\ \gamma(t) = h^2(t), \qquad D(0) = D_0 \quad (0 \leqslant t \leqslant T) \end{gathered} \tag{1.4}$$

Иногда, чтобы подчеркнуть зависимость решения задачи (1.4) от определяющих его параметров, оно будет обозначаться символом $D(t, D_0, \gamma)$. В зависимости от требований, налагаемых на функцию $h(t)$, возможны различные постановки задачи об оптимизации процесса наблюдения [1], некоторые из которых и изучаются ниже.

2. *Задача* 1. Найти неотрицательную интегрируемую с квадратом функцию $\gamma(t)$, доставляющую минимум интегралу

$$I(\gamma) = \int_0^T \gamma^2(t)\,dt \tag{2.1}$$

такую, что функция $D(T, D_0, \gamma)$ удовлетворяет оценке (1.3). При этом фиксированная постоянная $T < \infty$.

Теорема 2.1. Для разрешимости задачи 1 при любом числе $\alpha > 0$, векторе $q \in R_n$ и положительно определенной матрице D_0 необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы

$$[H'(\sigma')^{-1}, A'H'(\sigma')^{-1}, \ldots, (A')^{n-1} H'(\sigma')^{-1}] \tag{2.2}$$

был полным (т. е. равнялся числу n — размерности системы (1.1)). В формуле (2.2) выражение A^n означает n-ю степень матрицы A.

Доказательству теоремы 2.1 предпошлем вспомогательную лемму. Назовем функцию $\gamma(t) \geqslant 0$ допустимой, если $J(\gamma) < \infty$ и матрица $D(T, D_0, \gamma)$ удовлетворяет соотношению (1.3).

Лемма 2.1. Пусть существует допустимая функция $\gamma_1(t)$. Тогда существует и оптимальная, разрешающая задачу 1.

Доказательство леммы 2.1 по существу близко к доказательству аналогичного утверждения в задаче о линейных оптимальных быстродействиях ([5], гл. 3).

Для случая, когда число допустимых функций конечно, утверждение леммы 2.1 очевидно.

Введем теперь в рассмотрение последовательность $\gamma_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots)$ допустимых функций таких, что

$$\lim_{i\to\infty} J(\gamma_i) = J_0 = \inf J(\gamma) \tag{2.3}$$

где «инфинум» в правой части (2.3) вычисляется по множеству всех допустимых функций. Ясно, что последовательность $\gamma_i(t)$ принадлежит некоторому шару гильбертова пространства скалярных функций на отрезке $[0, T]$ и потому слабо компактна ([6], стр. 212). Примем для упрощения записи, что и сама последовательность $\gamma_i(t)$ слабо сходится к функции $\gamma_0(t)$. Отсюда, на основании ([6], стр. 217) и равенства (2.3 заключаем, что $J(\gamma_0) \leqslant J_0$. Кроме того, дословно повторяя рассуждения книги [5] (стр. 143—145), получаем, что $\gamma_0(t) \geqslant 0$ $(0 \leqslant t \leqslant T)$. Значит, для доказательства оптимальности функции $\gamma_0(t)$ достаточно показать, что матрица $D(T, D_0, \gamma_0)$ удовлетворяет неравенству (1.3). Однако это немедленно следует из оценок

$$q'D(T, \Gamma_0, \gamma_i)\, q \leqslant \alpha \qquad i = 1, 2, \ldots$$

слабой сходимости последовательности $\gamma_i(t)$ и формулы [1]

$$D(T) = z(T)\left[D_0^{-1} + \int\limits_0^T \gamma(t)\, z'(t)\, H'(\sigma\sigma')^{-1} Hz(t)\, dt\right]^{-1} z'(T) \tag{2.4}$$

в которой D_0^{-1} — обратная матрица к D_0, а $z(t)$ — фундаментальное решение системы уравнений (1.1), равное

$$z(t) = \exp\left(\int\limits_0^t A\, ds\right)$$

Лемма 2.1 доказана.

Доказательство теоремы 2.1. Достаточность. Покажем, что при выполнении условий теоремы 2.1 существует допустимая функция $\gamma(t)$.

Прежде всего отметим, что если

$$q'z(T)\, D_0 z'(T)\, q \leqslant \alpha$$

то теорема 2.1 в силу формулы (2.4) уже доказана, так как в этом случае в качестве допустимой функции можно взять $\gamma(t) \equiv 0$. Поэтому в дальнейшем предполагается, что

$$q'z(T)\, D_0\, z'(T)\, q > \alpha \tag{2.5}$$

Далее ввиду уравнения (1.4) и положительной определенности матрицы D_0 нетрудно установить положительную определенность матрицы $D(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant T)$, используя соотношение (2.4).

Пусть функция $\gamma(t)$ в уравнении (1.4) равна неотрицательной постоянной ε при всех $0 \leqslant t \leqslant T$. Положим

$$\varphi(\varepsilon) = q'D(T, D_0, \varepsilon)\, q \tag{2.6}$$

На основании (2.4) — (2.6) имеем

$$\varphi(0) > \alpha \tag{2.7}$$

Поэтому для доказательства существования допустимой функции достаточно установить непрерывность $\varphi(\varepsilon)$ и соотношение

$$\lim_{\varepsilon\to\infty} \varphi(\varepsilon) = 0 \qquad (2.8)$$

Ранг матрицы (2.2) равен n, поэтому вектор-функции, представляющие собой столбцы матрицы $z'(t)\, H'(\sigma')^{-1}$, линейно независимы на отрезке $0 \leqslant t \leqslant T$ (см. [3], § 19). Значит, матрица

$$z'(T)^{-1} \int\limits_0^T z'(t)\, H'(\sigma\sigma')^{-1} H z(t)\, dt\, z(T)^{-1} \qquad (2.9)$$

положительно определена.

Следовательно, существует такая невырожденная действительная матрица Q, которая одновременно приводит матрицу (2.9) к единичному, а матрицу

$$z'(T)^{-1}\, D_0^{-1}\, z(T)^{-1} \qquad (2.10)$$

к диагональному виду.

Поэтому, обозначая через λ_i собственные значения матрицы (2.10), положительные ввиду положительной определенности матрицы (2.10), получаем на основании (2.4), (2.6), что функция $\varphi(\varepsilon)$ может быть представлена в виде

$$\varphi(\varepsilon) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i (\lambda_i + \varepsilon)^{-1}$$

Здесь через β_i обозначены диагональные элементы матрицы $Qqq'Q^{-1}$. Отсюда вытекает непрерывность функции $\varphi(\varepsilon)$ и справедливость предельного соотношения (2.8). Тем самым достаточность требований теоремы 2 .1 установлена.

Необходимость. Предположим противное, т. е., что ранг матрицы (2.2) равен $m < n$. Тогда найдется такой ненулевой вектор q_1, который ортогонален всем столбцам матрицы (2.2). Поэтому (см. [3], § 19) функция

$$\sigma^{-1} Hz(t)\, q_1 = \sigma^{-1} H \exp(At)\, q_1 \equiv 0 \qquad 0 \leqslant t \leqslant T \qquad (2.11)$$

Зафиксируем теперь некоторое число $\alpha > 0$ и положительно определенную матрицу D_0 и определим вектор q равенством

$$q = z'(T)^{-1} D_0^{-1}\, q_1 \varepsilon$$

где ε — некоторая постоянная. Эту постоянную ε выберем таким образом чтобы

$$q'\, z(T)\, D_0 z'(T)\, q = q_1'\, D_0^{-1}\, q_1 \varepsilon^2 > \alpha \qquad (2.12)$$

Последнее возможно, так как по предположению $q_1' q_1 > 0$.

По условиям теоремы 2.1 задача 1 разрешима для числа α вектора q и матрицы D_0. Иными словами говоря, существует такая $\gamma(t)$, что справедлива оценка

$$\alpha \geqslant q'\, D(T,\, D_0,\, \gamma)\, q$$

Но для любой положительно определенной матрицы $D\,(T)$ и любого вектора $q \in$ имеет место равенство

$$q' D\,(T)\, q = \max_{y \in R_n} [2y'q - y' D\,(T)^{-1} y] \tag{2.13}$$

Таким образом

$$\alpha \geqslant \max_{y \in R_n} [2y'q - y' D\,(T,\, D_0,\, \gamma)^{-1} y] \tag{2.14}$$

Заметим, что максимум по $y \in R_n$ выражения

$$2y'q - y'z'\,(T)^{-1}\, D_0^{-1} z^{-1}\,(T)\, y$$

существует в силу положительной определенности матрицы $z'\,(T)^{-1} D_0^{-1} z^{-1}\,(T)$, достигается при

$$y = z\,(T)\, D_0 z'\,(T)\, q \tag{2.15}$$

и равен левой части выражения (2.12).

Однако при значении y, равном правой части уравнения (2.15), на основании (2.11) и определения вектора q интеграл

$$\int_0^T y'z'\,(T)^{-1} \gamma\,(t)\, z'\,(t)\, H'\,(\sigma\sigma')^{-1} H z\,(t)\, dt z^{-1}\,(T)\, y = 0$$

Таким образом, в силу формул (2.14), (2.4), (2.12)

$$\max_{y \in R_n} [2y'q - y' D\,(T,\, D_0,\, \gamma)^{-1} y] = q' z\,(T)\, D_0 z'\,(T)\, q > \alpha$$

что невозможно, ибо противоречит неравенству (2.14). Теорема 2.1 полностью доказана.

Замечание. При любой невырожденной матрице σ ранг матрицы (2.2) равен рангу матрицы $(H',\, A'H',\, \ldots,\, (A')^{n-1}\, H')$. Таким образом требования теоремы 2.1 совпадают с условием полной наблюдаемости в детерминированной задаче оптимального наблюдения (см. [3], § 30—38).

3. *Пример* 1. Пусть скалярные уравнения (1.1), (1.2) имеют вид

$$\begin{gathered} x^{\cdot}\,(t) = ax\,(t) + f\,(t) \\ dy\,(t) = h\,(t)\, H\, x\,(t)\, dt + d\xi\,(t), \quad H = \text{const} \neq 0 \end{gathered} \tag{3.1}$$

Тогда дисперсия $D\,(t)$ определяется соотношениями

$$D^{\cdot}\,(t) = 2a\, D\,(t) - D^2\,(t)\, H^2\, \gamma\,(t), \qquad D\,(0) = D_0 \tag{3.2}$$

а неравенство (1.3) переходит в требование $D\,(T) \leqslant \alpha q^{-2}$. Отсюда из (3.2) и (2.4) следует, что оптимальная функция $\gamma\,(t) \equiv 0$ при $q^2 D_0 e^{2aT} \leqslant \alpha$.

Пусть теперь $q^2 D_0 e^{2aT} > \alpha$.

Используя метод неопределенных множителей Лагранжа и явный вид решения (2.4) уравнения (3.2), получаем, что оптимальное значение $\gamma_0\,(t)$ равно

$$\gamma_0\,(t) = 4a\,(\alpha^{-1} q^2 - D_0^{-1} e^{-2aT})\,(e^{4aT} - 1)^{-1} e^{2a\,(t+T)} H^{-2}$$

Очевидно также, что коэффициенты уравнений (3.1) удовлетворяют требованиям теоремы 2.1.

Следствие 1. Пусть даны m чисел t_i таких, что $0 < t_1 < t_2 < \ldots$ $\ldots < t_m = T$ и m векторов $q_i \in R_n$. Требуется выбрать функцию $\gamma(t) \geqslant 0$, доставляющую минимум интегралу (2.1) и удовлетворяющую оценкам

$$q_i' D(t_i, D_0, \gamma) q_i \leqslant \alpha_i \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

где α_i — заданные положительные постоянные. Повторяя с незначительными изменениями доказательство теоремы 2.1, получаем, что необходимое и достаточное условие разрешимости поставленной задачи совпадает с необходимым и достаточным условием разрешимости задачи 1, установленным в теореме 2.1.

Следствие 2. Приведем достаточные условия разрешимости задачи 1 для некоторых систем вида (1.1), (1.2) с переменными коэффициентами. Точнее говоря, предположим, что уравнения (1.1), (1.2) имеют вид

$$x^{\cdot}(t) = A(t)\, x(t) + f(t), \qquad x(0) = x_0 \quad (0 \leqslant t \leqslant T)$$

$$dy(t) = h(t)\, H(t)\, x(t)\, dt + \sigma(t)\, d\xi(t), \qquad y(0) = 0 \qquad (3.3)$$

где матрицы $A(t)$, $H(t)$, $\sigma(t)$ с измеримыми ограниченными элементами при всех $0 \leqslant t \leqslant T$ удовлетворяют требованиям § 1. Если, сверх того, можно указать точку s на отрезке $[0, T]$ такую, что:

1) существуют и непрерывны производные матриц $A(t)$ и $\sigma^{-1}(t)\, H(t)$ до порядка $n - 1$, в некоторой окрестности точки s;

2) в точке s равен числу n ранг матрицы

$$(K_1(s), \ldots, K_n(s))$$

где

$$K_1(s) = H'(s), (\sigma'(s))^{-1}, \qquad K_{i+1}(s) = \frac{dK_i(s)}{ds} + A'(s)\, K_i(s)$$

то задача 1 для системы (3.3) разрешима при любом числе $\alpha > 0$, векторе $q \in R_n$ и невырожденной матрице D_0.

Доказательство следствия 2 совершенно аналогично доказательству теоремы 2.1 с тем лишь отличием, что на этот раз положительная определенность матрицы

$$\int_0^T z'(t)\, H'(t)\, (\sigma(t)\, \sigma'(t))^{-1} H(t)\, z(t)\, dt$$

соответствующей матрице (2.9) в доказательстве теоремы 2.1, устанавливается при помощи результатов ([3] § 20).

4. В этом параграфе рассматривается задача оптимального наблюдения, в которой также требуется обеспечить выполнение неравенства (1.3) при отличных от задачи 1 предположениях о функции $h(t)$. Уравнения движения и наблюдения имеют вид (3.1).

Задача 2. Пусть время проведения наблюдений конечно, но не фиксировано. Наблюдения прекращаются в первый момент T, в который выполняется неравенство (1.3). Требуется определить кусочно-постоянную функцию $h(t)$, принимающую два значения (либо нуль, либо единица), доставляющую минимум интегралу

$$\int_0^T h(t)\,dt \tag{4.1}$$

такую, что

$$q' D(T, D_0, h)\, q = q' D(T, D_0, \gamma)\, q \leqslant \alpha \tag{4.2}$$

При этом равенство $h(t) = 0$ означает, что в момент времени t наблюдения не производятся (в силу независимости распределения $x(0)$ от распределений процесса $\xi(t)$).

Всюду в этом параграфе $h(t)$ означает функцию, удовлетворяющую только что сформулированным ограничениям, а через $N(q, \alpha)$ обозначено множество всех положительно определенных матриц D таких, что $q' Dq > \alpha$.

Теорема 4.1. Пусть существует неотрицательная непрерывная функция $\omega(D)$ матричного аргумента D, у которой полная производная по времени $\dot\omega(D)$, составленная в силу уравнений (3.2) при $h(t) \equiv 1$, кусочно непрерывна и удовлетворяет при некотором числе $\varepsilon < 0$ оценке

$$\dot\omega(D) \leqslant \varepsilon, \qquad D \in N(q, \alpha)$$

Тогда задача 2 разрешима при любом начальном условии D_0.

Доказательство. Подобно § 2 назовем функцию $h(t)$ допустимым наблюдением, если интеграл (4.1) конечен и справедливо неравенство (4.2) при этом $h(t)$. Далее аналогично доказательству леммы 2.1 нетрудно установить, что из существования допустимого наблюдения вытекает существование функции $u_0(t)$, разрешающей задачу: найти функцию $u(t)$ такую, что $0 \leqslant u(t) \leqslant 1$, доставляющую минимум интегралу (4.1), причем выполнено неравенство (4.2) при $\gamma(t) = u(t)$.

Отсюда и из принципа максимума следует, что для любого t функция $u_0(t)$ равна либо нулю, либо единице, т. е. $u_0(t)$ — оптимальный закон наблюдения и для задачи 2.

Заметим еще, что на основании (2.4), (2.13) при любом T и наблюдении $h(t)$

$$q' D(T, D_0, 1)\, q \leqslant q' D(T, D_0, h)\, q$$

Таким образом, задача 2 имеет решение, если при некотором T

$$q'D(T, D_0, 1)\, q \leqslant \alpha \tag{4.3}$$

Ясно, что оценку (4.3) достаточно установить лишь при дополнительном предположении $D_0 \in N(q, \alpha)$.

Предположим теперь, что при всех $t > 0$ дисперсия

$$D(t, D_0, 1) \in N(q, \alpha)$$

Тогда при некотором конечном s функция $\omega(D(s, D_0, 1)) < 0$, что невозможно, так как противоречит требованию $\omega(D) \geqslant 0$. Теорема 4.1 доказана.

Пример 2. Рассмотрим скалярные уравнения наблюдения и движения (3.1). Найдем условия в терминах коэффициентов этих уравнений, при выполнении которых задача 2 разрешима. В этом примере множество $N(q, \alpha)$ — полупрямая $D > \alpha q^{-2}$. Отсюда, из положительности дисперсии $D(t)$ при любом конечном t и (1.4) следует, что в качестве функции $\omega(D)$ можно взять $D(t)$. Следовательно, на основании теоремы 4.1 задача 2 для системы (3.1) разрешима при $a < {}^1/_2\, H^2 \alpha q^{-2}$. Последнее условие разрешимости задачи 2 можно получить и непосредственно из анализа уравнений (1.4).

Замечание. Для системы (1.1), (1.2) задача 2 разрешима, если все собственные значения матрицы A имеют отрицательные действительные части. Это немедленно следует из формулы

$$q'D\ (T,\ D_0,\ h)q \leqslant q'D\ (T,\ D_0,\ 0)q$$

и уравнений (1.4), (2.4). Однако, как показывает пример 2, устойчивость матрицы A не является необходимым условием разрешимости задачи 2. Проиллюстрируем сказанное на простом примере. Пусть в уравнении (1.1) матрица A — симметрическая, матрица H — невырожденная. Обозначим через λ_0 максимальное собственное значение матрицы A, а через $\lambda_1 > 0$ минимальное собственное значение матрицы $V = H'(\sigma\sigma')^{-1}H$. Приведем далее с помощью невырожденного действительного преобразования матрицу A — к диагональному, а матрицу V — к нормальному виду. Тогда, используя еще выражения (2.4), (2.13), получаем, что задача 3 для системы (1.1), (1.2) разрешима при $2nq'q\lambda_0 < \alpha\lambda_1$. Отметим, наконец, что если все собственные значения матрицы A действительны, и задача 2 для системы (1.1), (1.2) разрешима при $h_0(t)$, то аналогично доказательству теоремы Фельдбаума ([5], стр. 134) нетрудно установить при помощи (1.4), что $h_0(t)$ имеет не более n точек переключения.

Поступила 3 VI 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Черноусько Ф. Л. Об оптимизации процесса наблюдения. ПММ, 1969, т. 33, вып. 1.
2. Солянник А. И., Черноусько Ф. Л. Оптимизация процесса наблюдения при случайных возмущениях. ПММ, 1969, т. 33. вып. 4.
3. Красовский Н. Н. Теория управления движением. М., «Наука», 1968.
4. Кац И. Я., Куржанский А. Б. О двойственности статистических задач оптимального управления и наблюдения. Автоматика и телемеханика, 1971, № 3.
5. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М., Физматгиз, 1969.
6. Люстерник Л. А., Соболев В. И. Элементы функционального анализа. М., «Наука», 1965.