Прикладная математика и механика. Том 36, 1972

УДК 539.384

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ОБ ИЗГИБЕ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ БАЛКИ НА ЛИНЕЙНО-ДЕФОРМИРУЕМОМ ОСНОВАНИИ

А. А. Паскаленко, Г. Я. Попов

(Одесса)

Получено точное решение задачи об изгибе полубесконечной балки, лежащей на упругом неоднородном полупространстве $E = E_0 z^\nu$ $(0 \leqslant \nu < 1)$. Дана численная реализация этого решения применительно к случаю загружения балки на конце силой или моментом, и выявлен неожиданный факт возрастания по абсолютной величне максимального приведенного изгибающего момента с увеличением параметра ν.

Точное решение пространственной задачи об изгибе полубесконечной пластинки, лежащей на линейно-деформируемом основании общего типа, получено в работе [1]. Там уже указано, что решение соответствующей плоской задачи можно получить путем предельного перехода в трансформанте Фурье решения пространственной задачи. Однако этот путь удалось осуществить только для случая основания в виде однородного упругого полупространства и то лишь в результате сложных преобразований, неприменимых для общего случая. Это побудило автора работы [2] дать решение плоской задачи, не привязываясь к соответствующей пространственной. Однако примененный им метод не позволяет получить решение для случая основания в виде полупространства с переменным по степенному закону модулем упругости, не говоря уже о затруднениях при его численной реализации.

В данной работе преодолеваются трудности, связанные с получением решения плоской задачи, путем предельного перехода из пространственной задачи.

1. Пусть полубесконечная пластинка $(0 \leqslant x < \infty, -\infty < y < \infty)$ с постоянной цилиндрической жесткостью D лежит без трения на линейно-деформируемом основании, для которого осадки поверхностных точек (ядро основания) от единичной силы, приложенной в начале координат, определяются формулой

$$w_0(r) = \frac{\theta}{2\pi} \int_0^\infty \varphi_0(t) J_0(rt)\, dt, \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{1.1}$$

Здесь θ — некоторый положительный параметр, $J_0(x)$ — функция Бесселя первого рода, а функция $\varphi_0(t)$ обладает следующим асимптотическим поведением:

$$\varphi_0(t) = o(1), \quad t \to 0; \quad \varphi_0(t) = t^\nu [1 + o(1)], \quad t \to \infty \quad (0 \leqslant \nu < 1)$$

Предположим, что на пластинку действует вертикальная нагрузка $q^+(x, y)$ $(q^+(x, y) \equiv 0,\ x < 0)$, а к свободной поверхности основания приложена пригрузка $q^-(x, y)$ $(q^-(x, y) \equiv 0,\ x > 0)$ вида

$$q^\pm(x, y) = q^\pm(x) \cos \lambda y, \qquad \lambda > 0 \quad (-\infty < y < \infty)$$

Тогда прогибы пластинки $w(x, y)$, равные в зоне контакта осадкам поверхностных точек основания, и контактные напряжения $p(x, y)$ будут иметь вид

$$w(x, y);\; p(x, y) = [w_\lambda(x);\; p_\lambda(x)]\cos\lambda y \tag{1.2}$$

Задача определения функций $w_\lambda(x)$, $p_\lambda(x)$ решена в работе [1]. Там показано, что между ними имеет место такая связь:

$$\begin{gathered} Dw_\lambda(x) = (a_0 + a_1\lambda x)e^{-\lambda x} + y_\lambda(x) \\ y_\lambda(x) = \int\limits_0^\infty g(x-\xi)\,[q^+(\xi) - p_\lambda(\xi)]\,d\xi \\ g(t) = \frac{1}{4\lambda^3}(1 + \lambda|t|)\,e^{-\lambda|t|} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{\pm iut}}{(u^2+\lambda^2)^2}\,du \end{gathered} \tag{1.3}$$

Через a_0 и a_1 обозначены произвольные вещественные постоянные, подлежащие определению из условий свободного края для пластинки

$$w_\lambda^{(2)}(+0) - \lambda^2\mu w_\lambda(+0) = 0, \qquad w_\lambda^{(\xi)}(+0) - (2-\mu)\lambda^2 w_\lambda^{(1)}(+0) = 0 \tag{1.4}$$

где μ—коэффициент Пуассона материала пластинки.

Как видно из соотношения (1.3), задача сводится к отысканию одной функции $p_\lambda(x)$. Полученную в работе [1] формулу для $p_\lambda(x)$ представим здесь в следующем виде:

$$\begin{gathered} p_\lambda(x) = c^{2\omega}\,[A_0\Phi_\lambda^{(0)}(x) + A_1\Phi_\lambda^{(1)}(x)] + p_\lambda^*(x), \qquad 2\omega = 3 + \nu \\ \Phi_\lambda^{(n)}(x) = \frac{i}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\Psi_\lambda(u)(-iu)^n}{(u+i\lambda)^2}\,e^{-iux}\,du \qquad (n = 0, 1) \\ p_\lambda^*(x) = -\frac{c^{2\omega}}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} I_\lambda(-u)\,\Psi_\lambda(u)\,e^{-iux}\,du \\ Q^\pm(u) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} q^\pm(x)\,e^{iux}\,dx, \qquad c^{-2\omega} = \theta D \\ I_\lambda(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{Q^+(-u)}{(u^2+\lambda^2)^2} - \frac{\varphi_0(\sqrt{u^2+\lambda^2})}{c^{2\omega}\sqrt{u^2+\lambda^2}}\,Q^-(-u)\right]\frac{\Psi_\lambda(u)}{u-z}\,du \\ A_0 = a_0 i\lambda\Psi_\lambda(i\lambda) + a_1\lambda\,[i\Psi_\lambda(i\lambda) + \lambda\Psi_\lambda^{(1)}(i\lambda)] \\ A_1 = ia_0\Psi_\lambda(i\lambda) + a_1\lambda\Psi_\lambda^{(1)}(i\lambda) \end{gathered} \tag{1.5}$$

Фигурирующая в этих формулах функция $\Psi_\lambda(u)$ регулярна и отлична от нуля в верхней полуплоскости ($\operatorname{Im} u > 0$) с выколотой бесконечно удаленной точкой и удовлетворяет функциональному уравнению

$$[\varphi_0(\sqrt{u^2+\lambda^2})(u^2+\lambda^2)^{-1/2} + c^{2\omega}(u^2+\lambda^2)^{-2}]^{-1} = \Psi_\lambda(u)\,\Psi_\lambda(-u) \tag{1.6}$$

Решение этого уравнения, приведенное в [1], для дальнейшего удобно представить в виде

$$\Psi_\lambda(u) = (\lambda - iu)^{1/2(1-\nu)}\chi_1(\lambda, u)\chi_2(\lambda, u)$$

$$-\ln \chi_k(c\lambda, cu) = G_k^+(\lambda, u) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln G_k(\lambda, x)}{x-u}dx \qquad (\operatorname{Im} u > 0,\ k = 1, 2)$$

$$G_1(\lambda, u) = 1 + (u^2 + \lambda^2)^{-\omega} \tag{1.7}$$

$$G_2(\lambda, u) = [1 + c^{-\nu}(u^2 + \lambda^2)^{\nu/2}\varphi_0(c\sqrt{u^2+\lambda^2})]\,[1 + (u^2 + \lambda^2)^{\omega}]^{-1}$$

Во второй формуле (1.7) для логарифмической функции выбирается та ветвь, для которой в окрестности единицы справедливо часто используемое в дальнейшем разложение

$$\ln(1 + z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{k+1}}{k+1} \tag{1.8}$$

Для получения $w_\lambda(x)$ следует подставить записанное выше выражение для $p_\lambda(x)$ в (1.3) либо в эквивалентное ему соотношение [1].

В результате будем иметь

$$Dw_\lambda^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n}[A_0 F_\lambda^{(0)}(x) + A_1 F_\lambda^{(1)}(x)] + u^{(n)}(x, \lambda) \qquad (n = 0, 1, 2, 3, 4)$$

$$F_\lambda^{(m)}(x) = \frac{i}{2\pi}\int\frac{\Psi_\lambda(u)(-iu)^m\varphi_0(\sqrt{u^2+\lambda^2})}{(u + i\lambda)^2\sqrt{u^2+\lambda^2}}e^{-iux}du \qquad (m = 0, 1) \tag{1.9}$$

$$u^{(n)}(x, \lambda) = \frac{1}{2\pi}\frac{d^n}{dx^n}\int_{-\infty}^{\infty}[Q^-(u) - I_\lambda(-u)\Psi_\lambda(u)]\frac{\varphi_0(\sqrt{u^2+\lambda^2})}{\sqrt{u^2+\lambda^2}}e^{-iux}du$$

Для получения решения соответствующей плоской задачи об изгибе балки следует в этих формулах выполнить, согласно (1.2), предельный переход $\lambda \to 0$. После чего определить произвольные постоянные A_0 и A_1 из условий свободного края (1.4), которые можно представить в виде

$$w^{(n)}(x) = \lim_{\lambda\to 0} w_\lambda^{(n)}(x) = 0 \qquad \text{при } x = 0 \quad (n = 2, 3) \tag{1.10}$$

Определение этих постоянных существенно облегчается следующим свойством [1] функции $y_\lambda(x)$, содержащейся в (1.3):

$$\left(\frac{d}{dx} - \lambda\right)^2 y_\lambda(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx} - \lambda\right)^2 y_\lambda(x) = 0 \qquad \text{при } x = 0 \tag{1.11}$$

---

[1] На это свойство функции $y_\lambda(x)$, представляющей собой частное решение дифференциального уравнения изгиба пластинки, преобразованного по Фурье, натолкнул одного из авторов неопубликованный результат М. Г. Крейна, изложенный на семинаре в Одесском инженерно-строительном институте в 1955 г.

Чтобы убедиться в этом, представим функцию $g(t)$, определяемую формулой из (1.3), в виде

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \oint\limits_{C\pm} (u^2 + \lambda^2)^{-2} e^{iut}\, du \qquad (t \gtrless 0)$$

Контур C^+ (C^-) представляет собой замкнутую кривую, охватывающую все полюса подынтегральной функции, лежащие в верхней (нижней) полуплоскости. Используя это представление, можно обнаружить, что

$$\left(\frac{d}{dt} - \lambda\right)^2 g(t) = \frac{1}{2\pi} \oint\limits_{C-} (u - i\lambda)^{-2} e^{iut}\, du = 0 \qquad (t < 0)$$

Аналогично

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt} - \lambda\right)^2 g(t) = \frac{1}{2\pi} \oint\limits_{C-} (u - i\lambda)^{-2}\, iue^{iut}\, du = 0 \qquad (t < 0)$$

Следствием последних двух соотношений является равенство (1.11).

Доказанное свойство (1.11) позволяет утверждать, что условия свободного края (1.10) будут выполнены, если $a_0 = a_1 = 0$, или в силу формул из (1.5) $A_0 = A_1 = 0$.

В самом деле, для этого достаточно, чтобы

$$u^n(x, 0) = 0 \qquad \text{при } x = 0 \quad (n = 2, 3)$$

В справедливости последнего можно убедиться путем сравнения правых частей формул из (1.3) и (1.9) для функции $w_\lambda(x)$ при $a_0 = a_1 = 0$ с учетом свойства (1.11) при $\lambda \to 0$.

Принимая во внимание изложенное, для прогибов $w(x)$ и контактных напряжений $p(x)$ получим

$$Dw(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} [Q^-(u) - I_0(-u)\, \Psi_0(u)]\, u^{-1} \varphi_0(u)\, e^{-iux}\, du$$

$$p(x) = -\frac{c^{2\omega}}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} I_0(-u)\, \Psi_0(u)\, e^{-iux}\, du$$

$$\Psi_0(u);\ I_0(u) = \lim_{\lambda \to 0} [\Psi_\lambda(u);\ I_\lambda(u)]$$

Как видно задача сводится к отысканию функций $\Psi_0(u)$ и $I_0(u)$. Для нахождения, например, первой из них следует, очевидно, выполнить предельный переход $\lambda \to 0$ в правой части второй формулы (1.7), что при $k = 2$ затруднений не вызывает, а при $k = 1$ наталкивается на почти непреодолимые трудности. Только в случае $\nu = 0$ их удалось преодолеть в [1] после сложных преобразований интеграла (1.7).

Ниже указывается некоторый способ преобразования интеграла типа (1.7) к виду, удобному для осуществления указанного предельного перехода и для проведения численной реализации полученных результатов.

Что же касается предельного перехода $\lambda \to 0$ в (1.5) для отыскания $I_0(u)$, то он существенно связан с наличием дополнительной информации об основании и нагрузке и поэтому его осуществление будет проведено ниже для конкретного вида основания.

2. Можно проверить, что в нашем случае имеет место

$$G_k(\lambda, \pm\infty) = 1, \quad G_k(\lambda, -x) = G_k(\lambda, x)$$

$$\ln G_k(\lambda, x) = O(|x|^{-\alpha}) \quad |x| \to \infty \ (k = 1, 2;\ \alpha \geqslant 1) \tag{2.1}$$

Кроме того, логарифмические производные функций $G_k(\lambda, x)$ — интегрируемые всюду в промежутке $(-\infty < x < \infty)$. Интегрирование по частям в (1.7) с использованием свойств (2.1) функций $G_k(\lambda, x)$ и последующее приведение к полубесконечному интервалу приводит к формуле

$$G_k^+(\lambda, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty \ln \frac{z+x}{z-x} \frac{dG_k}{G_k(\lambda, x)} \qquad (k = 1, 2) \tag{2.2}$$

Отобразим теперь при помощи дробно-линейного преобразования $z = -i(\zeta+1)(\zeta-1)^{-1}$ верхнюю полуплоскость переменного z на единичный круг переменного ζ. Тогда формула (2.2) будет иметь вид

$$g_k(\lambda, \zeta) = G_k^+\left(\lambda, -i\frac{\zeta+1}{\zeta-1}\right) = \tag{2.3}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty \ln\left(1 + \zeta\frac{i-x}{i+x}\right) \frac{dG_k}{G_k(\lambda, x)} - \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty \ln\left(1 + \zeta\frac{i+x}{i-x}\right) \frac{dG_k}{G_k(\lambda, x)} + g_{k,0}(\lambda)$$

$$g_{k,0}(\lambda) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{arctg} x \frac{dG_k}{G_k(\lambda, x)} \tag{2.4}$$

Объединив в формуле (2.3) два интеграла в один, заданный на всей вещественной оси, и воспользовавшись (1.8), получим

$$g_k(\lambda, \zeta) = \sum_{n=0}^\infty g_{k,n}(\lambda)\zeta^n,$$

$$g_{k,n}(\lambda) = -\frac{1}{2\pi i n} \int_{-\infty}^\infty \left(\frac{x-i}{x+i}\right)^n \frac{dG_k}{G_k(\lambda, x)} \qquad \left(\begin{matrix} k = 1, 2 \\ n = 1, 2, \ldots \end{matrix}\right) \tag{2.5}$$

Для случая $k = 1$ коэффициенты $g_{1,n}(\lambda)$ последнего разложения в силу (1.7) будут иметь вид

$$g_{1,0}(\lambda) = \frac{2\omega}{\pi} \int_0^\infty r_\lambda(x)\, x \operatorname{arctg} x\, dx$$

$$g_{1,n}(\lambda) = \frac{\omega}{\pi i n} \int_{-\infty}^\infty \left(\frac{x-i}{x+i}\right)^n x r_\lambda(x)\, dx$$

$$r_\lambda^{-1}(x) = [1 + (x^2 + \lambda^2)^\omega](x^2 + \lambda^2)$$

Последнюю формулу преобразуем методом контурного интегрирования подобно тому, как это сделано в работе [3]. Опуская аналогичные выкладки, приводим окончательный результат

$$g_{1,n}\lambda/c = \frac{1}{n}\left[\omega\left(\frac{\lambda-c}{\lambda+c}\right)^n + c^{2\omega}\sum_{i=0}^{1}\left(\frac{\alpha_j - ic}{\alpha_j+ic}\right)b_j^{-2\omega}\right] + h_n(\lambda) \quad (n=1, 2, \ldots)$$

$$h_n(\lambda) = \frac{2\omega c^2}{n\pi}\int_{\lambda/c}^{\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^n \frac{R_\lambda(x)\,x}{c^2x^2-\lambda^2}\,dx$$

$$R_\lambda(x) = \frac{(x^2-c^{-2}\lambda^2)^\omega \cos{}^1/_2\pi\nu}{1+2(x^2-c^{-2}\lambda^2)^\omega \sin{}^1/_2\pi\nu + (x^2-c^{-2}\lambda^2)^{2\omega}} \tag{2.6}$$

$$\alpha_j = \sqrt{b_j^2-\lambda^2}, \qquad \operatorname{Im}\alpha_j > 0 \quad (j=1, 2); \qquad b_{1,2} = c\exp(\pm i\gamma)\left(\gamma = \frac{\pi}{3+\nu}\right)$$

В случае $k=2$ в интегралах (2.4) и (2.5) сделаем замену $x=\operatorname{tg}{}^1/_2\varphi$. В результате получаем

$$g_{2,0}(\lambda) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \varphi\,dg_\lambda^*(\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi g_\lambda^*(\varphi)\,d\varphi$$

$$g_{2,n}(\lambda) = \frac{(-1)^{n+d}}{n\pi}\int_0^\pi \sin n\varphi\,dg_\lambda^*(\varphi) = \frac{(-1)^n}{\pi}\int_0^\pi g_\lambda^*(\varphi)\cos n\varphi\,d\varphi \quad (n=1, 2, \ldots)$$

$$g_\lambda^*(\varphi) = \ln G_2(\lambda, \operatorname{tg}{}^1/_2\varphi)$$

Используя формулы (2.5), устремим $\lambda \to 0$ в формуле (1.7) для $\Psi_\lambda(u)$. После суммирования получающегося при этом слабосходящегося ряда путем использования (1.8) получим

$$\Psi_0(icu) = \frac{2^\omega c^{1/_2(1-\nu)}}{(1+u)^\omega}u^2\left[1+\left(\frac{1-u}{1+u}\right)^2\operatorname{tg}^2\frac{\gamma(1+\nu)}{4}\right]^{-1}\exp\left[-H(u)-H_1(u)\right]$$

$$H(u);\ H_1(u) = \sum_{n=0}^{\infty}[h_n;\ g_n]\left(\frac{u-1}{u+1}\right)^n \tag{2.7}$$

Коэффициенты последнего разложения определяются формулами

$$g_0 = -\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \varphi\,dg_0^*(\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi g_0^*(\varphi)\,d\varphi$$

$$g_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}\int_0^\pi \sin n\varphi\,dg_0^*(\varphi) = \frac{(-1)^n}{\pi}\int_0^\pi g_0^*(\varphi)\cos n\varphi\,d\varphi \tag{2.8}$$

$$g_0^*(\varphi) = \ln\left[1+c^{-\nu}\operatorname{tg}^3{}^1/_2\varphi\varphi_0(\operatorname{tg}{}^1/_2\varphi c)\right] - \ln(1+\operatorname{tg}^\omega{}^1/_2\varphi)$$

$$h_0 = \frac{2\omega}{\pi}\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} x\,dx}{x(1+x^{2\omega})}, \qquad h_n = \frac{2\omega}{n\pi}\int_0^\infty\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^n\frac{R_0(x)}{x}\,dx \quad (n=1, 2, \ldots)$$

Последние две формулы можно представить в виде

$$h_0 = \frac{2\omega}{\pi}\int_0^1 \left[\frac{\operatorname{arctg} x}{x} + x^{2+\nu}\operatorname{arctg} x\right]\frac{dx}{1+x^{2\omega}}$$

$$h_{2m} = \frac{2\omega}{m\pi}\int_0^1 \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{2m}\frac{R_0(x)}{x}\,dx, \qquad h_{2m-1}\equiv 0 \quad (m=1, 2, \ldots)$$

более удобном для вычислений [1], если разбить интервал интегрирования на два: (0,1) и (1, ∞). Из равенства $h_{2m-1}\equiv 0$ ($m = 1, 2,\ldots$) вытекает важное для вычислений свойство

$$H(u) = H(1/u) \tag{2.9}$$

которое будет использовано в дальнейшем.

Как видно из формул (2.8), коэффициенты g_n представляют коэффициенты Фурье функции $g_0^*(\varphi)$ либо ее производной и поэтому для их вычисления удобно применить метод тригонометрической интерполяции [4].

3. Конкретизируем приведенные выше построения на примере основания в виде упругого полупространства $z \geqslant 0$ с переменным по глубине модулем упругости $E = E_0 z^\nu$ $(0\leqslant \nu < 1)$, ядро для которого получается из (1.1), если положить [5]

$$\theta = \frac{(1-\mu_0^2)\,\Gamma(1/2 - 1/2\nu)\,qC}{2\sqrt{\pi}\,E_0\Gamma(1+1/2\nu)(1+\nu)}\sin\frac{\pi q}{2}, \qquad \varphi_0(t) = t^\nu \tag{3.1}$$

$$\frac{q^2}{1+\nu} = 1 - \frac{\nu\mu_0}{1-\mu_0}, \qquad \frac{C}{\Gamma[1+1/2(1+\nu+q)]} = \frac{2\Gamma[1+1/2(1+\nu-q)]}{\Gamma(2+\nu)}$$

где μ_0—коэффициент Пуассона материала основания.

Кроме того, будем считать, что пригрузка отсутствует ($q^-(x)\equiv 0$), а нагрузку на пластинку зададим формулой

$$q(x, y) = \delta(x-b)\cos\lambda y, \quad b>0$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака. Тогда интеграл $I_\lambda(z)$ из (1.5) примет вид

$$I_\lambda(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ibu}\Psi_\lambda(u)}{(u^2+\lambda^2)^2(u-z)}\,du \tag{3.2}$$

Поскольку берется конкретный тип основания, то эту формулу, а также (1.5) и (1.9) можно подвергнуть дальнейшим преобразованиям методами контурного интегрирования. Для этого надлежит выяснить особые точки функции $\Psi_\lambda(u)$ в нижней полуплоскости. С этой целью, пользуясь

[1] Проделанные ниже вычисления показали быструю сходимость ряда, определяющего $H(u)$: для получения ее значения с тремя точными значащими цифрами достаточно взять $m = 5$.

(1.6) и (3.1), представим ее в виде

$$\Psi_\lambda(u) = (u^2+\lambda^2)^2 f_\lambda(u)\Psi_\lambda^{-1}(-u), \qquad f_\lambda(u) = [c^{2\omega}+(x^2+\lambda^2)^\omega]^{-1}$$

Отсюда следует, что функция $\Psi_\lambda(u)$ в нижней полуплоскости имеет точку ветвления $u=-i\lambda$ и полюсы $u=-\alpha_j$ $(j=1, 2)$ [3], определяемые формулой, содержащейся в (2.6). Вычеты, а также разность ее значений на берегах разреза $(-i\lambda, -i\infty)$ будут определяться следующими формулами:

$$\operatorname{Res}[\Psi_\lambda(u)]_{u=-\alpha_j} = -b_j^{3-\nu}[2\omega\alpha_j\Psi_\lambda(\alpha_j)]^{-1} \qquad (j=1, 2)$$

$$\Psi_\lambda(-is+0)-\Psi_\lambda(-is-0) = -2i(s^2-\lambda^2)^2 c^{-2\omega}R_\lambda(s/c)\Psi^{\lambda-1}(is) \tag{3.3}$$

Используя (3.3), преобразуем формулу (3.2) посредством деформирования пути интегрирования в петлю [6,7], охватывающую луч $(-i\lambda, -i\infty)$. В результате получим

$$I_\lambda(z) = I_\lambda^*(z) - \Psi_\lambda(z)e^{-ibz}(z^2+\lambda^2)^{-2} \tag{3.4}$$

$$\frac{I_\lambda^*(z)}{c^{-2-\nu}} = -\frac{i}{\pi}\int\limits_{\lambda/c}^{\infty}\frac{R_\lambda(t)e^{-bct}}{\Psi_\lambda(ict)(z+ict)}dt - \frac{c^{2+\nu}}{2\omega}\sum_{j=1}^{2}\frac{b_j^{-(1+\nu)}e^{i\alpha_j b}}{\alpha_j\Psi_\lambda(\alpha_j)(\alpha_j+z)}$$

Подстановка (3.4) в (1.5) и (1.9), изменение порядка интегрирования и выполнение преобразований над внутренним интегралом, аналогичным проделанным выше, приводит к формулам

$$u^{(n)}(x,\lambda) = -\frac{c}{\pi}\int\limits_{\lambda/c}^{\infty}\frac{I_\lambda^*(ict)}{\Psi_\lambda(ict)}R_\lambda(t)(-ct)^n e^{-ctx}dt - \tag{3.5}$$

$$-i(2\omega)^{-1}\sum_{j=1}^{2}b_i^2\frac{(i\alpha_j)^n e^{i\alpha_j x}I_\lambda^*(\alpha_j)}{\alpha_j\Psi_\lambda(\alpha_j)} + Du_\infty^{(n)}(x-b,\lambda) \qquad (n=0, 1, 2, 3)$$

$$u_\infty(x,\lambda) = \frac{c}{\pi}\int\limits_{\lambda/c}^{\infty}R_\lambda(t)(c^2t^2-\lambda^2)^{-2}e^{-ct|x|}dt + \frac{i}{2\omega}\sum_{j=1}^{2}\frac{e^{i\alpha_j|x|}}{\alpha_j b_j^2}$$

$$p_\lambda^*(x) = \frac{c}{\pi}\int\limits_{\lambda/c}^{\infty}(c^2t^2-\lambda^2)R_\lambda(t)\Psi_\lambda^{-1}(ict)I_\lambda^*(ict)e^{-ctx}dt -$$

$$-\frac{ic^{2\omega}}{2\omega}\sum_{j=1}^{2}\frac{b_j^{3-\nu}e^{i\alpha_j x}}{\alpha_j\Psi_\lambda(\alpha_j)}I_\lambda^*(\alpha_j) + p_\infty(x-b,\lambda)$$

$$p_\infty(x,\lambda) = -\frac{c}{\pi}\int\limits_{\lambda/c}^{\infty}R_\lambda(t)e^{-ct|x|}dt + \frac{i}{2\omega}\sum_{j=1}^{2}\frac{e^{i\alpha_j|x|}}{\alpha_j b_j^{1+\nu}}$$

Полагая $\lambda = 0$ в формулах (3.4), (3.5) и учитывая (2.7), получим

$$cM(cx) = M^*(\xi) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty S(t)\,[e^{-\beta t} f_1(t, \xi) - I(t; \beta)\, t^2 e^{-\xi t}]\, dt -$$

$$- f_2(\xi, \beta) + M_\infty(\xi - \beta)$$

$$I(t; \beta) = (2^\omega \pi)^{-1}\int_0^\infty S(z)\, e^{-\beta z}(t + z)^{-1} dz - f_3(t; \beta)$$

$$S(t) = R_0(t)\, t^{-2}(1 + t)^\omega \left[1 + \left(\frac{1-t}{1+t}\right)^2 \operatorname{tg}^2 ({}^1/_4\gamma\,(1 + \nu))\right] \exp H(t)$$

$$f_1(t; \xi) = 2^{1-\omega} a\, \frac{\cos(\delta - \gamma + \xi\cos\gamma) + t\sin(\delta + \xi\cos\gamma)}{(1 + 2t\sin\gamma + t^2)\exp(\xi\sin\gamma)} \tag{3.6}$$

$$f_2(\xi, \beta) = \{\sin[{}^1/_4\gamma\,(5 - \nu^2) + (\beta + \xi)\cos\gamma] +$$

$$+ \sin^{-1}\gamma\cos[(1 + \nu)\gamma + (\beta - \xi)\cos\gamma]\}\, a^2 \exp[-(\xi + \beta)\sin\gamma]$$

$$f_3(t; \gamma) = 2a\,\frac{\cos(\gamma + \varepsilon - \beta\cos\gamma) - t\sin(\varepsilon - \beta\cos\gamma)}{(1 + 2t\sin\gamma + t^2)\exp(\beta\sin\gamma)}, \qquad \varepsilon = {}^1/_8\gamma\,(11 + 4\nu + \nu^2)$$

$$a = (2\omega)^{-1}\cos^{1/2(\nu-5)}\, {}^1/_4\gamma\,(1 + \nu)\cos{}^1/_2\gamma\,(1 + \nu)\exp H(\alpha_1 / c),$$

$$\delta = {}^1/_8\gamma\,(1 - \nu)(5 - \nu)$$

Здесь введены безразмерная абсцисса $\xi = cx$ и безразмерное расстояние точки приложения силы до конца балки $\beta = cb$. Величину $M^*(\xi)$ будем называть, следуя [1], приведенным изгибающим моментом. Соответственно $p^*(\xi)$, $Q^*(\xi)$ назовем приведенным контактным напряжением, приведенной поперечной силой, связанными с истинными $p(x)$, $Q(x)$ и с $M^*(\xi)$ формулами

$$Q^*(\xi) = Q\left(\frac{\xi}{c}\right), \quad p^*(\xi) = \frac{1}{c}\, p\left(\frac{\xi}{c}\right), \qquad Q^*(\xi) = \frac{dM^*}{d\xi}, \qquad p^*(\xi) = \frac{d^2M^*}{d\xi^2}$$

Содержащийся в (3.6) символ $M_\infty(\xi)$ означает приведенный изгибающий момент в бесконечной балке, загруженной единичной силой при $x = 0$ и который определяется формулой (3.7)

$$M_\infty(\xi) = \frac{\sin\pi\omega}{\pi}\int_0^1 \frac{t^{1+\nu}e^{-|\xi| t} + t^{3+\nu}e^{-|\xi|/t}}{1 + 2t^{3+\nu}\cos\pi\omega + t^{6+2\nu}}\, dt - \omega^{-1}\exp(-|\xi|\sin\gamma)\sin(|\xi|\cos\gamma - \gamma)$$

совпадающей с приведенной в работе [3].

Как известно, при расчете полубесконечных балок наибольший интерес представляет случай загружения конца балки силой или моментом. К случаю загружения силой придем, полагая в (3.6) $\beta = 0$, а в случае загружения моментом следует продифференцировать по β формулу (3.6) и вновь положить $\beta = 0$.

Однако можно избрать и другой путь получения формул для расчетных усилий при нагружении конца балки, который с вычислительной точки зрения оказывается проще. Для этого следует в формуле (1.9) положить $u(x, \lambda) = 0$, после чего совершить предельный переход $\lambda \to 0$.

Иными словами, приведенный изгибающий момент в полубесконечной балке, нагруженной только на конце, можно вычислять по формуле

$$M^*(\xi) = -c \lim_{\lambda \to 0} [A_0 F_\lambda^{(2)}(\xi / c) + A_1 F_\lambda^{(3)}(\xi / c)] \tag{3.8}$$

С целью получить формулы, удобные для вычислений, прежде чем устремлять $\lambda \to 0$ в выражении $F_\lambda^{(n)}(x)$, даваемом формулой (1.9), преобразуем ее методами контурного интегрирования. В результате будем иметь

$$F_\lambda^{(n)}(x) = -\frac{ic}{\pi} \int\limits_{\lambda/c}^{\infty} \frac{(-ct)^n e^{-ctx} R_\lambda(t)}{(ct-\lambda)^2 \Psi_\lambda(ict)} dt -$$

$$-(2\omega)^{-1} \sum_{j=1}^{2} \frac{b_j^2 (i\alpha_j)^n e^{i\alpha_j x}}{\alpha_j \Psi_\lambda(\alpha_j)(i\lambda - \alpha_j)^2} \qquad (n = 0, 1, 2, 3, 4)$$

Полагая в этой формуле $\lambda = 0$, на основании (3.8) и используя (2.9), получим

$$M^*(\xi) = -\sum_{j=0}^{1} B_j [(-1)^j J^{(j)}(\xi) + \varphi^{(j)}(\xi)] \tag{3.9}$$

$$\varphi^{(j)}(\xi) = 2a \frac{d^j}{d\xi^j} \{\cos [{}^1/{}_8\gamma(1-\nu^2) + \xi \cos\gamma] \exp(-\xi \sin\gamma)\}$$

$$B_0 = ic^\omega A_0, \qquad B_1 = c^{1+\omega} A_1 i$$

$$J^{(j)}(\xi) = \frac{-1}{2^\omega \pi} \int\limits_0^1 [t^j e^{-\xi t} + t^{2-\omega-j} e^{-\xi/t}] S(t) dt$$

При этом имеет место следующее свойство:

$$dJ^{(j)} / d\xi = -J^{(j+1)}(\xi) \qquad (j = 0, 1, 2, 3)$$

Нетрудно убедиться, что содержащиеся в (3.9) произвольные постоянные следует находить из уравнений

$$\sum_{n=0}^{1} B_n [(-1)^{(n)} J^{(n)}(0) + \varphi^{(n)}(0)] = 1 - m$$

$$\sum_{n=0}^{1} B_n [(-1)^{n+1} J^{(n+1)}(0) + \varphi^{(n+1)}(0)] = 2 - m \qquad (m = 1, 2)$$

Случай $m = 1$ соответствует загружению балки единичной силой, $m = 2$ — единичным моментом.

По полученной формуле (3.9) были вычислены значения приведенного изгибающего момента, а также поперечной силы $Q^* = dM^* / d\xi$ и контактного напряжения $p^* = d^2M^* / d\xi^2$ как в случае загружения конца балки единичной силой (табл. 1), так и единичным моментом, вращающим по часовой стрелке (тал. 2). При этом следует учитывать, что приведенные там числа представляют дробную часть, а целая часть всюду равна нулю, за исключением чисел, помеченных звездочкой, где целая часть равна единице. Отрицательные числа снабжены чертой сверху.

Приведенный числовой материал для трех значений ν ($\nu = 0.1, 0.5, 0.9$) показывает, что при $\nu = 0.1$ результаты близки, как и следовало ожидать, к соответствующим числовым данным работы [1]. Однако основным результатом проделанных вычислений является обнаружение неожиданного, с первого взгляда, факта, заключающегося в росте абсолютной величины максимального изгибающего момента с увеличением параметра ν жесткости основания (табл. 1). Это обстоятельство побудило авторов выяснить наличие

Таблица 1

	$-M^*$			Q^*			P^*		
ξ \ ν	0.1	0.5	0.9	0.1	0.5	0.9	0.1	0.5	0.9
0.0	0	0	0	$\bar{0}^*$	$\bar{0}^*$	$\bar{0}^*$	∞	∞	∞
0.2	131	154	170	$\overline{478}$	$\overline{608}$	$\overline{714}$	309*	348*	253*
0.4	205	252	289	$\overline{273}$	$\overline{382}$	$\overline{488}$	805	953	019*
0.6	245	311	368	$\overline{141}$	$\overline{217}$	$\overline{304}$	546	705	822
0.8	264	342	414	$\overline{049}$	$\overline{096}$	$\overline{158}$	377	521	650
1.0	267	351	433	013	$\overline{006}$	$\overline{043}$	257	378	501
1.2	260	346	433	056	058	044	169	265	373
1.4	246	330	417	082	101	108	104	176	264
1.6	228	268	391	098	145	151	056	106	174
1.8	207	259	358	106	159	178	021	052	101
2.0	186	249	321	107	151	193	$\overline{004}$	012	043
3.0	091	112	137	075	111	153	$\overline{044}$	$\overline{065}$	$\overline{085}$
4.0	037	032	027	036	051	069	$\overline{031}$	$\overline{050}$	$\overline{073}$

Таблица 2

	M^*			$-Q^*$			P^*		
ξ \ ν	0.1	0.5	0.9	0.1	0.5	0.9	0.1	0.5	0.9
0.0	0*	0*	0*	0	0	0	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
0.2	945	966	979	397	280	191	$\overline{774}$	$\overline{835}$	$\overline{766}$
0.4	855	897	928	493	403	317	$\overline{265}$	$\overline{431}$	$\overline{506}$
0.6	753	809	856	520	463	398	$\overline{022}$	$\overline{189}$	$\overline{306}$
0.8	649	714	771	509	484	443	112	$\overline{029}$	$\overline{150}$
1.0	550	618	680	479	478	460	188	078	$\overline{029}$
1.2	459	524	588	436	455	456	227	148	060
1.4	376	436	499	389	420	437	242	191	125
1.6	303	326	414	341	380	408	242	214	168
1.8	240	285	336	293	336	371	231	222	195
2.0	186	222	266	249	292	331	214	219	208
3.0	027	029	037	087	109	137	111	136	160
4.0	$\overline{018}$	$\overline{028}$	$\overline{036}$	015	018	024	039	053	070

Таблица 3

	M_∞								
ν \ ξ	0.0	0.2	0.4	0.8	1.0	1.4	2.0	3.0	4.0
0.1	380	288	210	093	051	$\overline{006}$	$\overline{046}$	$\overline{051}$	$\overline{034}$
0.5	365	273	194	076	034	$\overline{023}$	$\overline{060}$	$\overline{056}$	$\overline{032}$
0.9	356	263	184	064	022	$\overline{035}$	$\overline{070}$	$\overline{058}$	$\overline{027}$

подобного факта на примере бесконечной балки, для которой справедлива более простая формула (3.7), определяющая приведенный изгибающий момент при действии единичной сосредоточенной силы. Значения этого момента приведены в табл. 3 (данные табл. 3 взяты из дипломной работы В. В. Воротынцева), из которой можно видеть, что максимальный положительный (растянуто нижнее волокно) приведенный момент с увеличением ν убывает, а максимальный по абсолютной величине отрицательный момент растет, как и в рассмотренном выше случае полубесконечной балки.

Поступила 4 V 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Попов Г. Я. Изгиб полубесконечной плиты, лежащей на линейно-деформируемом основании. ПММ, 1961, т. 25, вып. 2.
2. Попов Г. Я. Об одной плоской контактной задаче теории упругости. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1961, № 3.
3. Попов Г. Я. Изгиб неограниченной плиты на упругом полупространстве с переменным по глубине модулем упругости. ПММ, 1959, т. 23, вып. 6.
4. Ланцош К. Практические методы прикладного анализа. М. Физматгиз, 1961.
5. Ростовцев Н. А. К теории упругости неоднородной среды. ПММ, 1964, т. 28, вып. 4.
6. Попов Г. Я. Изгиб полубесконечной плиты на упругом полупространстве. Научн. докл. высш. школы, Строительство, 1958, № 4.
7. Попов Г. Я. Об одном интегро-дифференциальном уравнении. Укр. матем. ж., 1960, № 1.