Прикладная математика и механика. Том 36, 1972

УДК 539.3

О ДАВЛЕНИИ НА УПРУГОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО ШТАМПА КЛИНОВИДНОЙ ФОРМЫ В ПЛАНЕ

В. М. Александров, В. А. Бабешко

(Ростов-на-Дону)

Рассмаривается задача о действии на упругое пространство абсолютно жесткого штампа, имеющего в плане форму клина. Трение в области контакта штампа с полупространством предполагается отсутствующим.

Впервые эта задача рассматривалась Л. А. Галиным в работе [1]. В этой работе действие штампа на полупространство сопровождалось также и действием некоторой пригрузки вне его.

Характерной особенностью этого решения является то, что в вершине клина контактные давления p (τ, φ) имеют особенность r^{-1}.

В дальнейшем В. Л. Рвачев предпринял попытку решить указанную задачу при отсутствии пригрузки [2]. Он свел ее к задаче на собственные значения для некоторого дифференциального уравнения на сфере и использовал метод Галеркина. Решение В. Л. Рвачева в вершине клина имеет особенность $r^{\gamma-1}$, где $0 < \gamma$ $(\alpha) < 1$, 2α — угол раствора клина.

В данной работе, по-видимому, впервые удалось, используя асимптотический «метод больших λ» [3], аналитически решить задачу о клиновидном штампе с произвольным основанием и точно выделить при достаточно малых α особенность у контактного давления в вершине клина. При этом оказалось, что в общем случае функция p (r, φ) в окрестности точки $r = 0$ ведет себя, как $r^{-3/2} \cos (\theta \ln r)$, где $\theta = \theta(\alpha)$. Особенности r^{-1} и $r^{\gamma-1}$ также имеют место, но содержатся в следующих членах асимптотики функции p (r, φ) при $r \to 0$.

В данной работе также ставится вопрос о построении асимптотического решения рассматриваемой задачи при углах растворах клина, близких к 2π.

1. Как известно [4], задача о вдавливании штампа, клиновидного в плане сводится к решению интегрального уравнения вида

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} d\psi \int_{0}^{\infty} \frac{p(\rho, \psi)\, \rho d\rho}{\sqrt{\rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos(\varphi - \psi)}} = 2\pi\Delta f(r, \varphi) \qquad \begin{pmatrix} 0 \leqslant r < \infty \\ |\varphi| \leqslant \alpha \end{pmatrix} \qquad (1.1)$$

Здесь 2α — угол раствора клина, $f(r, \varphi)$ — функция, определяемая формой основания штампа и степенью его внедрения в полупространство $p(\rho, \psi)$ — контактные напряжения под штампом, G и ν — соответственно модуль сдвига и коэффициент Пуассона материала полупространства.

Заметим, что постановка задачи о плоском клиновидном в плане штампе, а именно этот случай рассматривался в работах [1, 2], не вполне корректна, ибо при $f(r, \varphi) \equiv f = \text{const}$ может существовать лишь решение с бесконечной энергией. С учетом этого, далее будем рассматривать лишь случай, когда к функции $f(r, \varphi)$ применимо преобразование Меллина [5] по переменной r и

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} d\psi \int_0^\infty |f(\rho, \psi)| \rho d\rho < \infty \tag{1.2}$$

Выполнения этих же условий будем требовать и от решения $p(r, \varphi)$.

Применяя теперь к обеим частям уравнения (1.1) преобразование Меллина по r, получим [5]

$$\int_{-1}^{1} p_s(\xi) K_s\left(\frac{\xi - x}{\lambda}\right) d\xi = \pi f_s(x) \quad (|x| \leqslant 1) \tag{1.3}$$

$$p_s(\xi) = p_s^*(\psi), \quad f_s(x) = \alpha^{-1} f_s^*(\varphi), \quad \xi = \psi\alpha^{-1}, \quad x = \varphi\alpha^{-1}, \quad \lambda = \alpha^{-1} \tag{1.4}$$

$$p_s^*(\psi) = \int_0^\infty p(\rho, \psi) \rho^{s+1/2} d\rho, \quad p(\rho, \psi) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma p_s^*(\psi) \rho^{-s-3/2} ds \tag{1.5}$$

$$f_s^*(\varphi) = \Delta \int_0^\infty f(r, \varphi) r^{s-1/2} dr, \quad \Delta f(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f_s^*(\varphi) r^{-s-1/2} ds \tag{1.6}$$

$$K_s(\theta) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{t^{s-1/2} dt}{\sqrt{1 + 2t\cos(\pi - \theta) + t^2}} = \frac{\pi}{2\cos \pi s} P_{s-1/2}(-\cos\theta) \left(\begin{array}{c} |\operatorname{Re} s| < 1/2 \\ \theta = (\xi - x)/\lambda \end{array}\right) \tag{1.7}$$

Здесь Γ—прямая в плоскости комплексного переменного $s = \sigma + i\tau$, параллельная мнимой оси, $P_\nu(x)$—функция Лежандра на разрезе [6].

Для ядра (1.7) имеет место следующее асимптотическое разложение [6]:

$$K_s(\theta) = \frac{\pi}{2\cos \pi s} F\left(\frac{1}{2} + s, \frac{1}{2} - s, 1, \cos^2 \frac{\theta}{2}\right) \tag{1.8}$$

$$F\left(\frac{1}{2} + s, \frac{1}{2} - s, 1, \cos^2 \frac{\theta}{2}\right) = \left(\frac{\cos \pi s}{\pi}\right)^2 \sum_{n=0}^\infty \frac{\Gamma(1/2 + s + n)\Gamma(1/2 - s + n)}{(n!)^2} \times$$

$$\times \left(h_n - 2\ln\sin\frac{\theta}{2}\right) \sin^2 \frac{n\theta}{2}, \quad h_n = 2\psi(n+1) - \psi(n + 1/2 + s) - \psi(n + 1/2 - s),$$

$$\psi(z) = \Gamma'(z) / \Gamma(z)$$

Окончательно для $K_s(\theta)$ получим

$$K_s(\theta) = -\ln|\theta| + a_0 + \sum_{i=1}^\infty (a_i + b_i \ln|\theta|)\theta^{2i} \tag{1.9}$$

причем разложение (1.9) равномерно сходится при всех $|\theta| \leqslant \pi - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

Несколько первых коэффициентов ряда (1.9) имеют вид

$$a_0 = \psi(1) - 0.5\psi(0.5 + s) - 0{,}5\psi(0.5 - s) + \ln 2$$

$$a_1 = 0.125(0.25 - s^2) \times$$

$$\times [2\psi(2) - \psi(1.5 + s) - \psi(1.5 - s) + 2\ln 2] + 0.041(6)$$

$$a_2 = 0.000347(2) + 0.0078125(0.25 - s^2)(2.25 - s^2) \times$$

$$\times [2\psi(3) - \psi(2.5 + s) - \tag{1.10}$$

$$-\psi(2.5-s)+2\ln 2]+0.01041(6)(0.25-s^2)[1-2\psi(2)+\psi(1.5+s)+ +\psi(1.5-s)-2\ln 2],\ b_1=-0.25(0.25-s^2)$$

$$b_2=0.0208(3)(025-s^2)-0.015625(0.25-s^2)(2.25-s^2)$$

Асимптотическое при малых α решение интегрального уравнения (1.3) с ядром (1.9) можно получить методом больших λ [3]. Далее для определенности ограничимся случаем

$$f(r,\varphi)=fr^{\mu}e^{-\varkappa r}\qquad(\mu\geqslant\delta-1,\ \delta>0,\ \varkappa>0)\tag{1.11}$$

При $\mu=0$ и $\varkappa\to 0$ такой штамп вырождается в плоский. Используя таблицы [5], находим

$$f_s(x)=\Delta f\alpha^{-1}\varkappa^{-(s+1/2+\mu)}\Gamma(s+1/2+\mu),\qquad \operatorname{Re}s>-0.5-\mu\tag{1.12}$$

Для случая $f_s(x)\equiv\gamma(s)$ асимптотическое решение уравнения (1.3), (1.9) с точностью до членов порядка $\lambda^{-6}\ln^3\lambda$ получено в работе [3] и определяется формулами (12) — (14). С учетом этого для функции $p_s^*(\varphi)$ будем иметь

$$p_s^*(\varphi)=(\alpha^2-\varphi^2)^{-1/2}D^{-1}(s,\lambda)\sum_{m=0}^{3}\lambda^{-2m}\sum_{k=0}^{m}[c_{mk}(s)+d_{mk}(s)\ln\lambda](\varphi/\alpha)^{2k}+$$

$$+O(\lambda^{-6}\ln^3\lambda),\quad c_{00}(s)=\Delta f\varkappa^{-(s+1/2+\mu)}\Gamma(s+1/2+\mu),\quad d_{00}(s)\equiv 0\tag{1.13}$$

$$D(s,\lambda)=a_0+\ln 2\lambda+(\delta_1-b_1\ln 2\lambda)\lambda^{-2}+(\delta_2+\delta_s\ln 2\lambda-$$

$$-0.25b_1^2\ln^2 2\lambda)\lambda^{-4}+O(\lambda^{-6}\ln^3\lambda),\ \delta_1=a_1+b_1,\ \delta_2=-0.25a_1^2-0.75a_1b_1-$$

$$-0.5625b_1^2+2.25a_2+2.625b_2,\quad \delta_s=0.5a_1b_1+0.75b_1^2-2.25\,b_2$$

Выражения для остальных коэффициентов $c_{mk}(s)$ и $d_{mk}(s)$ дальше не понадобятся.

По формуле (1.5) при помощи теории вычетов можно получить приближенное решение задачи при малых α, лишь только известны нули функции $D(s,\lambda)$. Положение прямой Γ выбирается из условий сходимости первого интеграла (1.5) и абсолютной интегрируемости функции $p(\rho,\psi)$ по области клина.

2. Пусть α настолько мало, что с достаточной степенью точности в соотношениях (1.13), (1.14) можно пренебречь членами порядка λ^{-2} и выше. Тогда в соответствии со второй формулой (1.5) решение задачи можно представить в виде

$$p(r,\varphi)=\frac{\Delta f\varkappa^{-\mu+1}}{2\pi i\sqrt{\alpha^2-\varphi^2}}\int_{\Gamma}\frac{(r\varkappa)^{-s-3/2}\Gamma(s+1/2+\mu)\,ds}{\ln 4\lambda-C-1/2\psi(1/2+s)-1/2\psi(1/2-s)}\tag{2.1}$$

где C — постоянная Эйлера.

Изучим в полосе $|\operatorname{Re}s|\leqslant 3/2$ нули функции

$$g(s)=\psi(1/2+s)+\psi(1/2-s)-\varkappa,\quad \varkappa=2\ln 4\lambda-2C\tag{2.2}$$

Теорема. При $\lambda > 1$ в полосе $|\operatorname{Re} s| \leqslant {}^3/_2$ функция $g(s)$ имеет только четыре однократных нуля

$$s_{1,2} = \pm [{}^1/_2 + \gamma(\alpha)],\ \gamma(\alpha) = O(\varkappa^{-1}) > 0,\ s_{3,4} = \pm i\theta(\alpha),\ \theta(\alpha) = O(\alpha^{-1}) \tag{2.3}$$

Для доказательства заметим, что

$$g({}^3/_2 - 0) = -\infty,\ g({}^1/_2 \pm 0) = \pm\infty,\ g(0) < 0,\ g(i\infty) = +\infty \tag{2.4}$$

Асимптотические формулы (2.3) для $\gamma(\alpha)$ и $\theta(\alpha)$ можно установить, если воспользоваться представлением (6) ([6], § 1.7) для функции $\psi(s)$. Единственность и однократность нулей s_k ($k = 1, 2, 3, 4$) можно доказать, если воспользоваться принципом аргумента.

Надо только принять во внимание, что в прямоугольнике $|\sigma| \leqslant {}^3/_2 - 0$, $|\tau| \leqslant A < \infty$ функция $g(s)$ имеет два однократных полюса в точках $s = \pm {}^1/_2$.

Пусть Γ—прямая $\sigma = {}^1/_2 - \varepsilon, -\infty < \tau < \infty$, $0 < \varepsilon < \operatorname{Inf}({}^1/_2,\ 1 + \mu)$. Тогда при помощи теории вычетов находим, что при $r \to 0$

$$p(r, \varphi) = \frac{\Delta f}{\sqrt{\alpha^2 - \varphi^2}} \{r^{\mu-1}A(\mu) - \varkappa r^{\mu}A(\mu + 1) + \varkappa^{\gamma-\mu}r^{\gamma-1}B(\mu, \gamma) -$$

$$- \varkappa^{-\mu-1/2}r^{-3/2}[\cos(\theta \ln r\varkappa)C(\mu, \theta) - \sin(\theta \ln r\varkappa)D^*(\mu, \theta)] + \varkappa^{1-\mu}o(1)\}$$

$$A(\mu) = \frac{1}{\ln 4\lambda - C - {}^1/_2\psi(-\mu) - {}^1/_2\psi(1 + \mu)},\quad B(\mu, \gamma) = \frac{2\Gamma(\mu - \gamma)}{\psi'(1 + \gamma) - \psi'(-\gamma)} \tag{2.5}$$

$$C(\mu, \theta) = 2\operatorname{Im}\left[\frac{\Gamma({}^1/_2 + \mu + i\theta)}{\psi'({}^1/_2 + i\theta)}\right],\quad D^*(\mu, \theta) = 2\frac{\operatorname{Re}\Gamma({}^1/_2 + \mu + i\theta)}{\operatorname{Im}\psi'({}^1/_2 + i\theta)}$$

Аналогичным образом находим, что при $r \to \infty$

$$p(r, \varphi) = \frac{\Delta f}{\sqrt{\alpha^2 - \varphi^2}}\left\{- r^{-2-\gamma}\varkappa^{-1-\mu-\gamma}\frac{2\Gamma(1 + \gamma + \mu)}{[\psi'(1 + \gamma) - \psi'(-\gamma)]} + \varkappa^{-\mu-2}O(r^{-3})\right\} \tag{2.6}$$

Из формулы (2.5) следует, что в худшем случае при $r \to 0$

$$p(r, \varphi) \sim O(r^{\delta-2}) \tag{2.7}$$

Подставляя (2.6), (2.7) в первую формулу (1.5), убедимся, что интеграл сходится, если

$${}^1/_2 - \delta < \operatorname{Re} s < {}^1/_2 + \gamma \tag{2.8}$$

Также убедимся, что функция $p(r, \varphi)$ абсолютно суммируема по области клина. Прямая Γ расположена таким образом, что все ограничения, наложенные на $\operatorname{Re} s$, одновременно выполняются.

Исследование полученного решения показывает, что если $\delta - 1 \leqslant \mu < -{}^1/_2$, то главной особенностью функции $p(r, \varphi)$ в окрестности $r = 0$ будет $r^{\mu-1}$, на втором месте будут осциллирующие особенности $r^{-3/2}\cos(\theta \ln r\varkappa)$ и $r^{-3/2}\sin(\theta \ln r\varkappa)$, на третьем — особенность r^{μ} или $r^{\gamma-1}$. Если $-{}^1/_2 \leqslant \mu < \gamma$, то осциллирующие особенности становятся главными.

Следовательно, контактное давление $p\ (r,\ \varphi)$ будет бесчисленное число раз менять знак при $r \to 0$, как это имеет место в контактных задачах с полным сцеплением. Таким образом, упругая среда уже не может плотно прилегать к поверхности штампа в окрестности вершины клина. На втором месте оказывается особенность $r^{\mu-1}$, на третьем — $r^{\gamma-1}$ или r^{μ}. Наконец, если $\gamma \leqslant \mu$, то по-прежнему осциллирующие особенности будут главными, но на второе место выходит особенность $r^{\gamma-1}$, на третье — $r^{\mu-1}$.

При помощи теоремы Руше можно показать, что описанная качественная картина не изменится, если в формулах (1.13) сохранить все указанные слагаемые.

3. Представляет интерес построение асимптотики решения задачи при малых $\beta = \pi - \alpha$. Здесь необходимо обратить внимание на то, что ядро (1.7) интегрального уравнения (1.3) имеет период 2π. Подобного типа уравнение изучено в работе [7], где оно сведено к некоторой бесконечной алгебраической системе, наиболее обусловленной при малых β. Анализ этой системы позволил построить главный член асимптотики решения в форме (11) [7].

Здесь дадим другой способ сведения интегрального уравнения типа (1.3), (1.7) к бесконечной алгебраической системе.

Пусть дано интегральное уравнение

$$\int_{-\pi+\beta}^{\pi-\beta} q(\psi)\, K(\varphi-\psi)\, d\psi = 2\pi f(\varphi) \qquad (|\varphi| \leqslant \pi-\beta) \tag{3.1}$$

ядро которого $K(t)$ имеет период 2π.

Перепишем (3.1) в виде

$$\int_{-\pi}^{\pi} q^*(\varphi)\, K(\varphi-\psi)\, d\psi = 2\pi f(\varphi) \qquad (|\varphi| \leqslant \pi-\beta)$$

$$q^*(\psi) = q(\psi) \text{ при } |\psi| \leqslant \pi-\beta, \quad q^*(\psi) = 0 \quad \text{при } \pi-\beta < |\psi| \leqslant \pi \tag{3.2}$$

Функции $q^*(\psi)$, $K(\theta)$ и $f(\varphi)$ разложим в ряды Фурье

$$K(\theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} k_m e^{im\theta}, \quad q^*(\psi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q_n e^{in\psi}, \quad f(\varphi) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} f_s \exp\left(\frac{i\pi s\varphi}{\pi-\beta}\right) \tag{3.3}$$

Подставляя разложения (3.3) в (3.2) и интегрируя, получим

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} q_n k_n e^{\,n\varphi} = \sum_{s=-\infty}^{\infty} f_s \exp\left(\frac{i\pi s\varphi}{\pi-\beta}\right) \tag{3.4}$$

Учитывая формулу

$$e^{in\varphi} = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\pi n-\beta n-\pi s)}{\pi n-\beta n-\pi s} \exp\left(\frac{i\pi s\varphi}{\pi-\beta}\right) \tag{3.5}$$

получим относительно неизвестных коэффициентов q_n следующую бесконечную алгебраическую систему:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} q_n k_n \frac{\sin(\pi n-\beta n-\pi s)}{\pi n-\beta n-\pi s} = f_s \qquad (s = \ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots) \tag{3.6}$$

При достаточно малых β систему (3.6) можно записать в виде

$$q_s k_s - \frac{\beta}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{n q_n k_n}{n-s} (-1)^{n-s} = f_s \qquad (s = \ldots -1, 0, 1, \ldots) \tag{3.7}$$

где штрих в сумме означает, что пропущено слагаемое, соответствующее $n = s$.

Приближенное решение системы (3.7) при малых β можно получить методом последовательных приближений.

Представляет также интерес построение асимптотики решения задачи при малых $\eta = \pm (\pi / 2 - \alpha)$. В этом случае следует воспользоваться тем, что решение интегрального уравнения (1.1) при $\alpha = \pi/2$ (штамп в плане представляет собой полуплоскость) может быть найдено в замкнутом виде. Его естественно принять за нулевое приближение.

Заметим, что формулы (1.5), (1.13), (2.1), (2.5), (2.6) решают также задачу о вдавливании в упругое полупространство штампа, очерченного в плане дугами двух пересекающихся под малым углом $2d$ окружностей. Необходимо только подвергнуть их преобразованию инверсии Кельвина.

Поступила 21 V 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Галин Л. А. Давление штампа с плоским основанием в виде бесконечного клина на упругое полупространство. Докл. АН СССР, 1947, т. 58, № 2.
2. Рвачев В. Л. О давлении на упругое полупространство штампа, имеющего в плане форму клина. ПММ, 1959, т. 23, вып. 1.
3. Александров В. М. Асимптотические методы в смешанных задачах теории упругости для неклассических областей. В сб.: Концентрация напряжений, вып. 2. Киев, «Наукова думка», 1968.
4. Штаерман И. Я. Контактная задача теории упругости. М.—Л., Гостехиздат, 1949.
5. Диткин В. А., Прудников А. П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. М., Физматгиз, 1961.
6. Бейтман Г., Эрдейн А. Высшие трансцендентные функции, т. 1. М., «Наука», 1965.
7 Бабешко В. А. Периодические уравнения свертки и свойства их решений. Докл. АН СССР, 1970, т. 192, № 1.