

О НЕЛИНЕЙНЫХ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ПРИ РЕЗОНАНСЕ В УПРУГОМ СЛОЕ И СЛОЕ ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ

Н. Р. Сибгатуллин

(Москва)

Показана эквивалентность уравнений одномерных плоских движений изотропно-го нелинейно-упругого тела и идеально проводящей сжимаемой жидкости, движущейся вдоль внешнего магнитного поля, причем магнитная проницаемость жидкости — произвольная функция плотности и модуля напряженности магнитного поля. Для этих моделей сплошной среды рассмотрена существенно нелинейная задача о поперечных колебаниях, возбуждаемых в бесконечном слое периодическим действием внешней касательной силы на одной из плоских границ, на другой предполагается идеальное отражение волн. Выявлены особенности поведения вынужденных колебаний при резонансе в случае, когда в упругом теле скорость продольных волн много больше скорости поперечных, а в жидкости скорость звука намного превышает скорость альфвеновских волн. Установлены соотношения между амплитудой вынуждающей силы и степенью близости ее частоты к резонансной, когда в слое возникают слабые ударные волны.

1. Нелинейно-упругий слой. Уравнения динамики изотропного упругого тела для одномерных движений с плоской симметрией записываются в виде

$$\rho_0 \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial \xi} P_{\parallel}, \quad \rho_0 \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial \xi} P_{\perp i} \quad (i = 2, 3) \quad (1.1)$$

$$P_{\parallel} = \rho_0 \partial F / \partial s, \quad P_{\perp i} = \rho_0 h_i \partial F / \partial (h^2 / 2), \quad s \equiv \partial w_1 / \partial \xi, \quad h_i \equiv \partial w_i / \partial \xi$$

Здесь w_1, w_2, w_3 — компоненты вектора перемещения лагранжевой частицы в декартовой системе координат наблюдателя x^1, x^2, x^3 ; ξ — лагранжева координата, которая в начальном разгруженном состоянии $P_{\parallel} = P_i = 0$ при $s = h = 0$ совпадает с декартовой координатой; ρ_0 — начальная плотность; $F(s, h^2 / 2)$ — изотермическая плотность свободной энергии.

Уравнения (1.1) получаются из общих уравнений динамики упругого тела [1], которые в декартовой системе отсчета принимают вид

$$\frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial \xi^j} \left[\left(\delta_{ik} + \frac{\partial w_i}{\partial \xi^k} \right) \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{jk}} \right]$$

где ξ^1, ξ^2, ξ^3 — лагранжевы координаты, ε_{jk} — компоненты тензора деформаций. При выводе (1.1) учтено, что инварианты тензора деформаций в плоском случае выражаются через s и h^2 , а отличные от нуля компоненты ε_{jk} имеют вид

$$\varepsilon_{11} = s + (s^2 + h^2) / 2, \quad \varepsilon_{1k} = h_k / 2 \quad (k = 2, 3)$$

В дальнейшем ограничимся случаем $h_3 = 0, h_2 = h$. Тогда из системы (1.1) для перемещений получаем следующие уравнения для продоль-

ного p_{\parallel} и сдвигового p_{\perp} напряжений:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{F_{hh}}{F_{ss} a_{\perp}^2} \frac{\partial p_{\parallel}}{\partial t} - \frac{F_{sh}}{F_{ss} a_{\perp}^2} \frac{\partial p_{\perp}}{\partial t} \right] = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} P_{\parallel} \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[-\frac{F_{sh}}{F_{ss} a_{\perp}^2} \frac{\partial p_{\parallel}}{\partial t} + \frac{1}{a_{\perp}^2} \frac{\partial p_{\perp}}{\partial t} \right] = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} P_{\perp}$$

$$F_{hh} \equiv \partial^2 F / (\partial h)^2, \quad F_{hs} \equiv \partial^2 F / (\partial s \partial h), \quad a_{\perp}^2 = F_{hh} - (F_{hs})^2 / F_{ss}$$

Уравнения характеристик систем (1.2), (1.1) (при $h_3 = 0$)

$$\left(\frac{d\xi}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} \left[F_{ss} + F_{hh} \pm \sqrt{(F_{ss} - F_{hh})^2 + 4F_{sh}^2} \right] \quad (1.3)$$

Здесь $d\xi / dt$ — скорость распространения фронтов волн деформаций и напряжений.

Пусть упругое тело таково, что в нем $F_{ss} \gg F_{sh} \gg F_{hh}$ в области значений s и h , характерных для исследуемых задач. Тогда из (1.3) следует, что скорость распространения «быстрых» продольных волн равна $\sqrt{F_{ss}}$, а скорость медленных «поперечных» волн определяется последним соотношением (1.2), причем $a_{\perp}^2 = dF(s, h) / dh$ вдоль кривой $\partial F / \partial s = \text{const}$.

Рассмотрим слой такого упругого материала толщиной L , без отрыва опирающийся на абсолютно твердый фундамент без касательных сил трения; на верхней границе слоя действуют периодическая касательная сила $A \sin \omega t$ и постоянная нормальная нагрузка q_0 . Это соответствует граничным условиям для системы (1.1) или (1.2)

$$\begin{aligned} p_{\perp} &= 0, & w_1 &= 0 & \text{при } \xi &= 0 \\ p_{\parallel} &= q_0, & p_{\perp} &= A \sin \omega t & \text{при } \xi &= L \end{aligned} \quad (1.4)$$

Будем искать периодическое решение поставленной задачи, для реализации которого необходимо, чтобы слой не накапливал энергии, т. е. чтобы работа внешней касательной силы за период равнялась нулю

$$\int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} A \sin \omega t \frac{\partial w_{\perp}}{\partial t} dt = 0 \quad (1.5)$$

Если амплитуда вынуждающей силы достаточно мала, то искомое решение можно получить из решения линейной задачи с линеаризованными граничными условиями. Это — стоячая поперечная волна

$$p_{\perp} = A \sin \omega t \frac{\sin(\omega \xi / a)}{\sin(\omega L / a)}, \quad p_{\parallel} = q_0, \quad a = a_{\perp}(h = 0) \quad (1.6)$$

Однако при приближении частоты ω к резонансной $\omega_* = n\pi a / L$ ($n = 1, 2, \dots$) внутри слоя получаются бесконечные напряжения. Отсюда следует существенная нелинейность поставленной краевой задачи вблизи резонанса даже при малой амплитуде вынуждающей силы.

Ввиду того, что задача имеет характерную длину L и характерное время $T = 2\pi / \omega$, причем $L / T \sim a_{\perp} \ll a_{\parallel}$, решение можно искать в виде разложения по двум малым параметрам F_{hs} / F_{ss} и F_{hh} / F_{ss} .

В первом приближении продольное напряжение оказывается постоянным, что соответствует отсутствию излучения продольных волн. Связь продольной и поперечной деформаций оказывается конечной в силу равенства $p_{\parallel}(s; h) = q_0 = \text{const}$. Выразив s через h , находим $a_{\perp}^2 = a_{\perp}^2(h)$.

Из (1.1) получаем уравнение для сдвигового перемещения

$$\frac{\partial^2 w_{\perp}}{\partial t^2} - a_{\perp}^2 \frac{\partial^2 w_{\perp}}{\partial \xi^2} = 0 \quad (1.7)$$

Из (1.2) — уравнение для сдвигового напряжения

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{a_{\perp}^2} \frac{\partial}{\partial t} p_{\perp} \right] = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} p_{\perp}$$

Уравнение (1.7) можно записать в двух эквивалентных формах

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \pm a_{\perp} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \left[\frac{\partial w_{\perp}}{\partial t} \mp \int_0^h a_{\perp}(h) dh \right] = 0$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\partial w_{\perp}}{\partial t} \mp \int_0^h a_{\perp}(h) dh = 2a\varphi^{\pm}(c_{\pm}) \quad (1.8)$$

где c_{\pm} находится из уравнения $\xi = \xi(t, c_{\pm})$, которое определяет семейство интегральных кривых уравнения $d\xi/dt = \pm a_{\perp}(h)$.

Ввиду периодичности искомого решения, функции φ^{-} и φ^{+} должны быть также периодическими, если параметрам семейств характеристик придать смысл момента пересечения соответствующих характеристик прямой $\xi = 0$. Из условий (1.4) при $\xi = 0$ следует, что

$$\varphi^{-}(c) = \varphi^{+}(c) = \varphi(c) \quad (1.9)$$

Изучим теперь случай слабонелинейного материала, у которого свободная энергия является аналитической функцией инвариантов J_1, J_2, J_3 [1] в точке $J_1 = J_2 = J_3 = 0$. Можно показать, что тогда функция $a_{\perp}(h)$ разлагается в ряд по четным степеням. Ограничимся первыми двумя приближениями

$$a_{\perp}(h) \approx a(1 + 3\alpha h^2) \quad (1.10)$$

С точностью до членов $\sim h^4$ из уравнений характеристик имеем

$$\begin{aligned} c_+ &= \lambda + 3\alpha \int_{\lambda}^{(\lambda+\mu)/2} [\varphi(\lambda) - \varphi(2\tau - \lambda)]^2 d\tau \\ c_- &= \mu - 3\alpha \int_{(\lambda+\mu)/2}^{\mu} [\varphi(\mu) - \varphi(2\tau - \mu)]^2 d\tau \\ \lambda &= t - \xi/a, \quad \mu = t + \xi/a \end{aligned} \quad (1.11)$$

Из (1.8) с учетом (1.9), получаем

$$h + \alpha h^3 = \varphi(c_-) - \varphi(c_+) \quad (1.12)$$

Функцию φ находим из условий (1.4) при $\xi = L$

$$\rho_0 a^2 (h + 2\alpha h^3) = A \sin \omega t$$

Подставляя сюда решение (1.12) при $\xi = L$, для φ получаем функциональное уравнение

$$\rho_0 a^2 [\varphi(c_-) - \varphi(c_+) + \alpha (\varphi(\lambda) - \varphi(\mu))^3] = A \sin \omega t \quad (1.13)$$

При малом отклонении частоты вынуждающей силы от резонансной в нелинейных членах (1.13) положим $\omega = \omega_*$, $\lambda = t - n\pi / \omega$, $\mu = t + h\pi / \omega$; разность $\varphi(c_-) - \varphi(c_+)$ заменим выражением

$$-\omega^{-1} 2n\pi d\varphi(t - n\pi(\omega)/dt [3\alpha\varphi^2(t - n\pi/\omega) + 3\alpha\Omega - (\omega - \omega_*) / \omega_*] \quad (1.14)$$

Здесь использовано условие

$$\int_{-\pi/\omega}^{+\pi/\omega} \varphi(t) dt = 0 \quad \left(\Omega = \frac{\omega}{\pi} \int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} \varphi^2(t) dt \right) \quad (1.15)$$

и учтена периодичность $\varphi(t)$.

Последним членом в левой части (1.13) пренебрежем, так как он пропорционален $(\omega - \omega_*)^3$. Проинтегрировав (1.13) по времени, окончательно получаем

$$\varphi^3(t) + \varphi(t) [3\Omega + \vartheta] + \nu \cos \omega t = 0$$

$$\vartheta = -(\alpha\omega_*)^{-1} (\omega - \omega_*), \quad \nu = (2n\pi\alpha\rho_0 a^2)^{-1} (-1)^n A \quad (1.16)$$

Если на границе $\vartheta = L$ вместо условия $p_{11} = q_0$ поставить $w_1 = 0$, то вместо (1.16) получим уравнение

$$\varphi^3(t) + \varphi(t) [\Omega + \vartheta] + \nu \cos \omega t = 0 \quad (1.17)$$

Итак, учет малой нелинейности при резонансе приводит к решению (1.8), где функции c_+ и c_- даются формулами (1.11).

Пусть функция φ имеет конечный разрыв в некоторой точке ($\varphi(t)$ — разрывная функция в некотором диапазоне частот вблизи резонанса, см. п. 3). Для устойчивости (эволюционности) разрыва необходимо, чтобы он догонял возмущения, идущие перед ним, и его догоняли возмущения за разрывом. На таких разрывах из условия сохранения импульса следует

$$D^2 = a^2 [1 + \alpha (h_{(1)}^2 + h_{(2)} h_1 + h_{(2)}^2)]$$

где D — скорость ударной волны по частицам, $h_{(1)}$ — значение h перед скачком, $h_{(2)}$ — значение после скачка.

Ввиду того, что на эволюционных разрывах $a_{\perp(1)}^2 < D^2 < a_{\perp(2)}^2$ на слабых ударных волнах должно выполняться либо $h_{(1)}/h_{(2)} > 1$, либо $h_{(1)}/h_{(2)} \leq -2$. На таких разрывах продольное напряжение остается непрерывным, поэтому излучением продольных волн на слабых ударных сдвиговых волнах пренебрежем.

В нулевом приближении можно линеаризовать выражения (1.8), а функцию $\varphi(t)$ по-прежнему разыскивать из уравнений (1.16), (1.17). Однако в линейном пределе дадут разрывы в решении и ударные волны и волны разрежения нелинейного решения (1.8). Чтобы в линейном приближении отличить волну разрежения от ударной волны, необходимо проверить критерий эволюционности: если критерий не выполнен, то разрыв представляет собой предельную форму волны разрежения, непрерывную при нелинейном подходе (1.8) — (1.11). Нелинейное решение (1.8) неоднозначно вблизи эволюционного разрыва. В этом случае конструирование однозначного разрывного решения проводится при помощи образования лишних ветвей.

2. Слой идеально проводящей жидкости [2]. Пондермоторная сила в намагничивающихся средах в отсутствие поляризации и объемного заряда равна [1]

$$\frac{1}{c} (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) \frac{1}{8\pi} (B_\alpha \nabla H^\alpha - H_\alpha \nabla B^\alpha)$$

Исходя из этого, можно показать, что одномерные плоские движения намагничивающейся сжимаемой, идеально проводящей жидкости во внешнем магнитном поле B_0 , приложенном ортогонально плоскости симметрии, в лагранжевых координатах описываются уравнениями

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} &= - \frac{\partial}{\partial \xi} \left(p + \frac{H_i B^i}{8\pi} \right) \quad (i = 2, 3) \\ \rho_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[B_i \left(1 + \frac{\partial w_1}{\partial \xi} \right) \right] &= \frac{B_0^2}{4\pi \rho_0} \frac{\partial^2 H_i}{\partial \xi^2} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Из уравнения притока тепла в обратимом адиабатическом случае следует

$$du = \frac{H}{4\pi} d \frac{B}{\rho} - \left(p + \frac{HB}{8\pi} \right) d \frac{1}{\rho} \quad (2.2)$$

где u — функция внутренней энергии жидкости, включающей в себя энергию магнитного поля на единицу массы.

Из (2.2), (2.1) следует, что если ввести потенциалы w_i ($i = 2, 3$) для новых искомым функций $h_i \equiv B_i (1 + s) / B_0$: $h_i = dw_i / d\xi$, то уравнения (2.1) для w_1, w_2, w_3 будут иметь вид (1.1), если функция u зависит от компонент вектора \mathbf{B} через его модуль.

При отсутствии намагничивания жидкости система (2.1) превращается в систему уравнений одномерной магнитной гидродинамики [3]. В этом частном случае функция u принимает вид

$$u(s, h^2 / 2) = U(s) + h^2 B_0^2 (8\pi \rho_0 + 8\pi \rho_0 s)^{-1}$$

где $U(s)$ — внутренняя энергия баротропной жидкости.

Уравнения характеристик системы (2.1) во введенных обозначениях будут (1.3). Пусть скорость звука в слабосжимаемой жидкости намного превосходит скорость альфвеновских поперечных волн a_\perp^2 (при наличии намагничивания $a_\perp^2 \neq B^2 / 4\pi \rho_0$).

Граничные условия (1.5) в данном случае приобретают другую интерпретацию: слой описанной жидкости заключен между двумя бесконечно проводящими плоскостями. Одна из плоскостей закреплена и обесточена, а на другую подается периодический ток и приложена постоянная нормальная нагрузка. Если частота тока приближается к резонансной, то и при малых амплитудах тока, задача, тем не менее, становится нелинейной. Благодаря методу, изложенному в п. I, в случае слабой нелинейности нахождение решения вновь сводится к анализу алгебраического уравнения (1.16).]

Если вместо поперечных колебаний на границе $\xi = L$ возбуждаются только продольные по гармоническому закону, то в случае слабой нелинейности нахождение периодического решения этой газодинамической задачи ($B_i = 0$) при резонансе сводится, как показал Честер [4], к анализу квадратного уравнения.

3. Исследование уравнения (1.16). Уравнение (1.16) удобно переписать в виде

$$y^2 + 3 \operatorname{sign} (3 \Omega + \zeta) y + 2y \cos \omega t = 0 \quad (3.1)$$

$$y \equiv |3\Omega + \zeta|^{-1/2} \sqrt{3}\varphi, \quad \gamma = 2 |\Omega + \zeta / 3|^{-3/2} \nu$$

Необходимо различать три случая

1°. $3\Omega + \zeta < 0, |\gamma| \leq 1$; 2°. $3\Omega + \zeta < 0, |\gamma| > 1$; 3°. $3\Omega + \zeta > 0$

Случай 1°. Уравнение (3.1) при $|\gamma| < 1$ определяет три непрерывные функции

$$y_k(t) = -2 \operatorname{sign} \gamma \cos [^{1/3} \arccos (|\gamma| \cos \omega t) + 2\pi k / 3] \quad (k = 1, 2, 3)$$

Из трех решений только $y_2(t)$ удовлетворяет условию (1.15). Для отыскания Ω в этом случае имеем конечное соотношение

$$\Omega = (3\pi)^{-1} (4\zeta + 12\Omega) \int_0^\pi \cos^2 [^{1/3} \arccos (|\gamma| \cos \theta) + 4\pi/3] d\theta$$

Из гладких кусков непрерывных решений $y_1(t)$ и $y_3(t)$ можно однозначно конструировать разрывные решения, удовлетворяющие условию (1.15) и имеющие минимальное число разрывов, при привлечении дополнительного условия четности разрывного решения (тогда условие (1.6) равенства нулю энергии, подводимой к системе за период, выполнится автоматически)

$$y_a = \begin{cases} y_1(t) \\ y_3(t) \end{cases} \quad \text{или} \quad y_b = \begin{cases} y_3(t) \\ y_1(t) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{при } -\pi/2 < \omega t < \pi/2 \\ \text{при } \pi/2 < \omega t < 3\pi/2 \end{array} \quad (3.2)$$

Для первого разрывного решения Ω удовлетворяет соотношению

$$3\pi\Omega = -(\zeta + 3\Omega) \int_{-\pi/2\omega}^{\pi/2\omega} y_1^2(t) dt$$

Для второго

$$3\pi\Omega = -(\zeta + 3\Omega) \int_{-\pi/2\omega}^{\pi/2\omega} y_3^2(t) dt$$

При $|\gamma| \leq 1$ функции $y_k(t)$ имеют асимптотику

$$y_1(t) = \sqrt{3} - \gamma \cos \frac{\omega t}{6}, \quad y_2(t) = \gamma \cos \frac{\omega t}{3}, \quad y_3(t) = -\sqrt{3} - \gamma \cos \frac{\omega t}{6}$$

Это означает, что решение $y_2(t)$ стремится к обычному линейному решению. Разрывные решения стремятся к периодическим решениям прямоугольной формы. Разрывы перемещаются со скоростью a .

Если $|\gamma| = 1$, получим

$$y_k(t) = -2 \operatorname{sign} \gamma \cos [^{1/3}(\omega t + 2\pi k)] \quad (k = 1, 2, 3) \quad (3.3)$$

Непрерывное решение при этом конструируется из разных функций $y_k(t)$ и обладает разрывом производной при $\omega t = \pi m$ (фиг. 1, кривая y_b).

Для непрерывного решения

$$v = 2 [(9\pi - 9\sqrt{3})^{-1} \pi |\zeta|]^{3/2}$$

$$\Omega = \frac{3\sqrt{3} - 2\pi}{9(\pi - \sqrt{3})} \zeta$$

Для одного из разрывных решений (фиг. 1, кривая y_a) связь между амплитудой внешнего возмущения и отклонением частоты от резонансной имеет вид

$$v = 2 [(9\pi + 9\sqrt{3})^{-1} \pi |\zeta|]^{3/2}$$

Другое разрывное решение, кроме конечных разрывов, при $\omega t = \pi/2 + \pi m$ имеет слабые разрывы при $\omega t = \pi m$ ($m = 0, \pm 1, \dots$) (фиг. 1, кривая y_c).

Случай 2°. Уравнение (3.1) определяет одну периодическую действительную неоднозначную функцию $y(t)$. Ее вид изображен на фиг. 2.

Ввиду неоднозначности $y(t)$ непрерывного решения не существует, а разрывное решение дается формулами

$$y(t) = \begin{cases} -2 \operatorname{sign} \gamma \operatorname{ch} \sigma_1, & -\sigma_0 < \omega t \leq \sigma_0 \\ -2 \operatorname{sign} \gamma \cos \sigma_2, & \sigma_0 < \omega t < \pi/2 \\ -2 \operatorname{sign} \gamma \cos(\sigma_2 + 2\pi/3), & -\pi/2 < \omega t \leq \pi - \sigma_0 \\ 2 \operatorname{sign} \gamma \operatorname{ch} \sigma_1, & \pi - \sigma_0 < \omega t \leq \pi + \sigma_0 \end{cases} \quad (3.4)$$

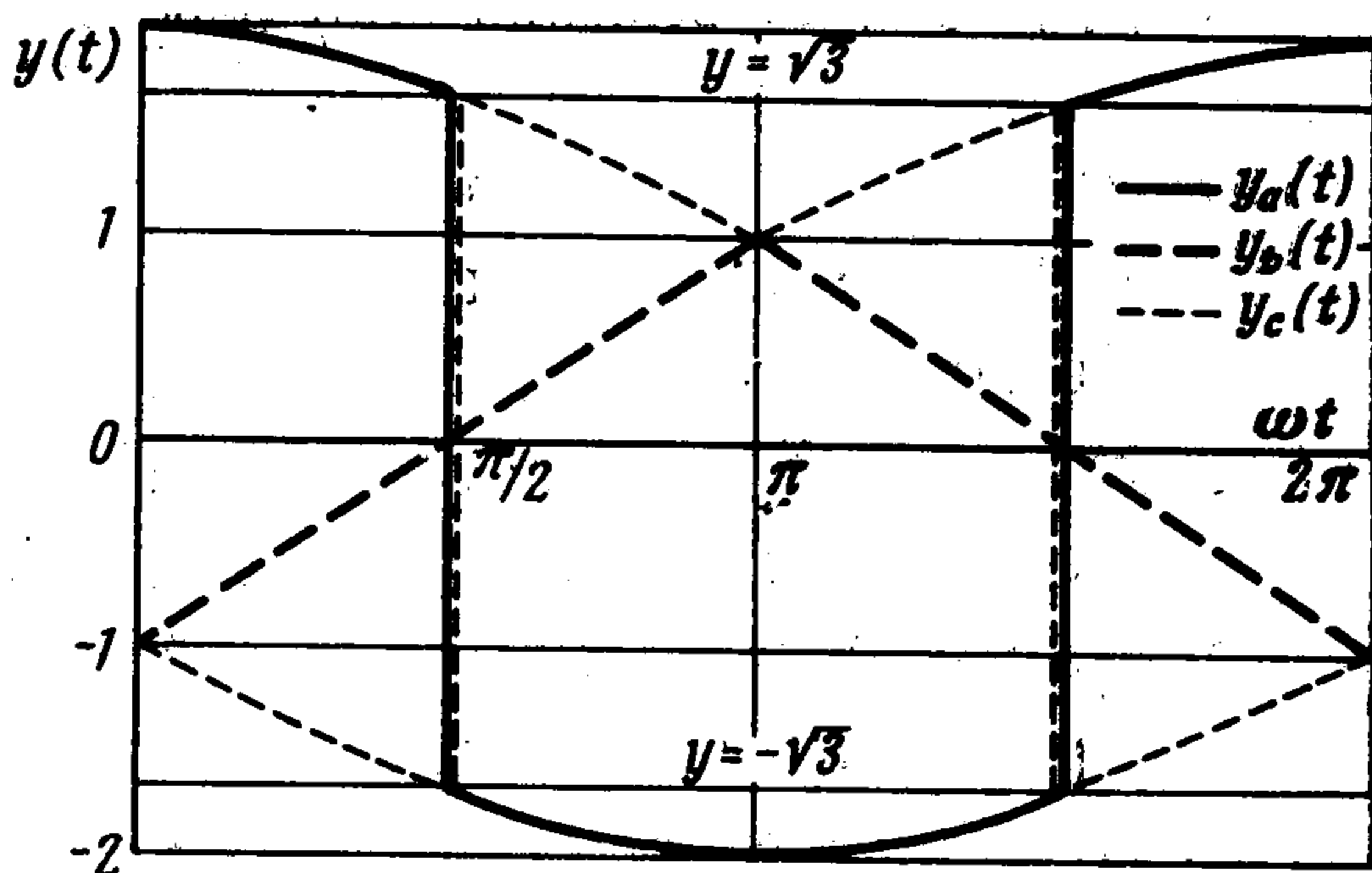
$$\delta_0 = \arccos(\gamma)^{-1}, \quad \delta_1 = ^{1/3} \operatorname{arcch}(\gamma \cos \omega t) \quad \delta_2 = ^{1/3} \arccos(\gamma \cos \omega t)$$

Случай 3°. Решение (3.1) единственно, однозначно и непрерывно

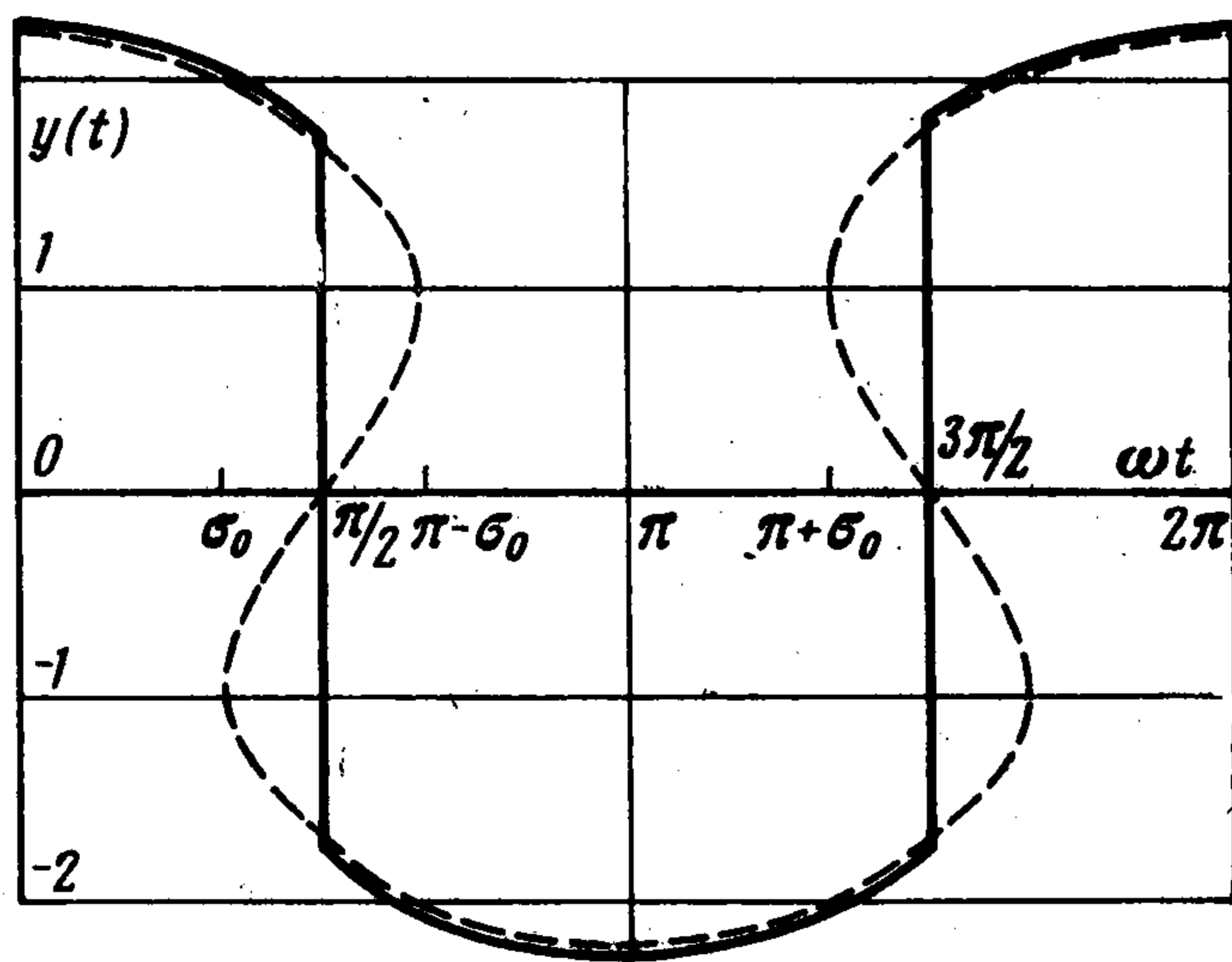
$$y(t) = -2 \operatorname{sh} [^{1/3} \operatorname{arcsh}(\gamma \cos \omega t)] \quad (3.5)$$

В частности, при $|\gamma| \rightarrow \infty$ из (1.16) получим

$$\varphi(t) = -\sqrt[3]{v \cos \omega t} \quad (3.6)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

В этом случае

$$\Omega = \pi^{-1} \nu^{2/3} \int_0^{\pi} \cos^{2/3} \theta d\theta, \quad \zeta = -3\Omega$$

При резонансе $\zeta = 0$, и для γ получаем уравнение

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^{\pi} \operatorname{sh}^2 \left\{ \frac{1}{3} [\operatorname{arcsch}(\gamma \cos \theta)] \right\} d\theta$$

Если $|\gamma| \ll 1$, то решение (3.5) переходит в линейное решение.

4. Физическая интерпретация результатов. Амплитуды колебаний сдвиговых деформаций и напряженности магнитного поля, отнесенной к величине внешнего поля B_0 , по нелинейной теории вблизи резонанса имеют порядок $\nu^{1/3} = \operatorname{const} [A (\alpha \rho_0 a^2)^{-1}]^{1/3}$. Поперечные колебания вызывают появление продольных колебаний.

Пусть амплитуда вынуждающей силы фиксирована. Проследим эволюцию формы колебаний с изменением частоты. Пусть ω монотонно уменьшается. При $\omega > \omega_*$ в слое происходят нелинейные гладкие колебания, описываемые (3.5). Колебания без разрывов будут и при самом резонансе $\omega = \omega_*$ и при $\omega < \omega_*$ вплоть до частоты ω^a

$$\omega^a = \omega_* - \beta^a l \quad (l = [\alpha \pi n A^2 (\rho_0^2 a L^3)^{-1}]^{1/3})$$

Значения констант β даны ниже для разных граничных условий при $\xi = L$: в верхней строчке при условии $p_{11} = q_0$; в нижней — при $w_1 = 0$. Выписанные формулы справедливы при условии $l \ll 1$

β^a	β^c	β^d	β^b
$3 \cdot 2^{-1/3} \pi^{-1} \int_0^{\pi} \cos^{2/3} \theta d\theta$	$9(4\pi)^{-1} (\pi - \sqrt{3})$	$9/4$	$9(4\pi)^{-1} (\pi + \sqrt{3})$
$2^{-1/3} \pi^{-1} \int_0^{\pi} \cos^{2/3} \theta d\theta$	$(5\pi - 3\sqrt{3})(4\pi)^{-1}$	$5/4$	$5(4\pi)^{-1} (\pi + 3\sqrt{3})$

При частоте ω^a (см. (3.6)) профиль волны имеет вертикальную касательную в моменты $\omega^a t = \pi/2 + \pi m$ ($m = 0, \pm 1, \dots$). При частотах $\omega \leq \omega^a$ движение в слое может осуществляться со слабыми ударными волнами. Такие колебания описываются решением (3.4) (фиг. 2) до частоты $\omega^b = \omega_* - \beta^b l$ и формулой (3.2) для y_a при $\omega < \omega^b$. При $\omega = \omega^b$ вид этого решения изображен на фиг. 1 (кривая y_a).

При частоте $\omega^c = \omega_* - \beta^c l$ ($\omega^c < \omega^a$), кроме описанного решения, появляется непрерывное решение со слабыми разрывами при $\omega^c t = \pi m$ (фиг. 1, кривая y_b), т. е. происходит своеобразная бифуркация решения. При $\omega < \omega^c$ непрерывное решение описывается аналитической функцией $y_2(t)$. Кроме этих двух решений при частоте $\omega^d = \omega_* - \beta^d l$ появляется третье разрывное решение, обладающее скачками при $\omega^d t = \pi/2 + \pi m$ (фиг. 1, кривая y_c). При частотах, меньших ω^d , слабые разрывы у этого решения пропадают и оно описывается формулой (3.2) для y_b .

Итак, периодическое решение уравнения (1.7) при граничных условиях (1.5) единственно для $\omega > \omega^c$; имеется два решения при $\omega^c \geq \omega > \omega^d$ (одно разрывное, другое непрерывное); три решения (одно непрерывное два разрывных) возможны при $\omega < \omega^d$.

Автор благодарит А. Г. Куликовского за ценные указания и обсуждение результатов.

Поступила 14 IV 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Механика сплошной среды, т. 1, 2. М., «Наука», 1970.
2. Chester W. Resonant oscillations in closed tubes. J. Fluid. Mech., 1964, vol. 18, p. 1.
3. Сибгатуллин Н. Р. О резонансных волнах Альфвена в бесконечном слое слабосжимаемой жидкости. Тезисы докл. научн. конференции НИИ механики МГУ. М., 1970.
4. Куликовский А. Г., Любимов Г. А. Магнитная гидродинамика, М., Физматгиз, 1962.