Прикладная математика и механика. Том 36, 1972

УДК 532.59

МЕТОД УСРЕДНЕНИЯ И ОБОБЩЕННЫЙ ВАРИАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП ДЛЯ НЕСИНУСОИДАЛЬНЫХ ВОЛН

Л. А. Островский, Е. Н. Пелиновский

(Горький)

Предложен метод асимптотического разложения для волновых процессов, близких к стационарным периодическим волнам произвольной формы. Показано, что уравнения первого приближения можно записать в форме уравнений Лагранжа второго рода для усредненных функций Лагранжа и Релея.

В настоящее время наибольшее число аналитических результатов в теории нелинейных волновых процессов получено при помощи приближенных методов, основанных на малости того или иного параметра в исходных уравнениях или в граничных (начальных) условиях. Сравнительно полно были исследованы волновые процессы в средах с малой нелинейностью и сильной дисперсией, когда решение близко к одной или суперпозиции нескольких квазигармонических волн [1-4]. Вместе с тем, как известно, во многих задачах, относящихся к волнам на поверхности жидкости, в плазме [5], линиях передачи электромагнитных волн [6], а также в задачах нелинейной теории поля [7] возникает необходимость рассматривать существенно несинусоидальные волны при произвольном соотношении параметров нелинейности и дисперсии. Здесь также существуют некоторые методы получения приближенных решений, основанные на локальной близости процесса к стационарной бегущей волне [5,8,9]. Из них наибольший интерес, с точки зрения общности и физической наглядности, представляет, по-видимому, вариационный принцип Гамильтона в усредненной форме, предложенный Уитэмом [8]. Уравнения для огибающих (амплитуды, частоты и т. д.) квазистационарной волны при этом получаются в виде дифференциальных уравнений Эйлера в соответствующей вариационной задаче с усредненным лагранжианом. Такой подход, однако, непосредственно применим только к строго консервативным системам, для которых известен лагранжиан (определение последнего часто представляет достаточно сложную задачу [10]). Кроме того, самостоятельное значение имеет построение схемы асимптотического разложения, позволяющей получить усредненные уравнения в любом приближении по малому параметру, как это уже было сделано для одного нелинейного уравнения второго порядка [11] и произвольной системы уравнений первого порядка [12].

В данной работе рассматриваются процессы, описываемые уравнениями в частных производных лагранжева типа, включающими, в частности, диссипативную функцию Релея. Асимптотический метод позволяет рассмотреть процессы, локально близкие к плоской стационарной волне. Удается показать, что уравнения первого приближения могут быть выведены из обобщенного вариационного принципа Гамильтона в усредненной форме.

Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial u_t} + \nabla \frac{\partial L}{\partial \nabla u} - \frac{\partial L}{\partial u} = \Phi, \qquad \Phi = \Phi^{(0)} + \varepsilon\Phi^{(1)} + O(\varepsilon^2) \tag{1}$$

где $u(\mathbf{r}, t)$ — N-мерная вектор-функция, L — лагранжиан (плотность функции Лагранжа), Φ — плотность непотенциальных сил, ε — малый параметр.

Будем считать, что L и Φ функции u, u_t и ∇u, а также «медленных» времени $\tau = \varepsilon t$ и координаты $\rho = \varepsilon \mathbf{r}$. Относительно L и Φ предполагаем лишь, что это достаточно гладкие функции своих аргументов.

Как известно, система (1) может быть получена из обобщенного вариационного принципа Гамильтона [13]

$$\int (\delta L + \delta W)\, d\mathbf{r}\, dt = 0, \qquad \delta W = \Phi \delta u \tag{2}$$

Отметим, что для неконсервативной системы нельзя в общем случае сформулировать вариационную задачу, соответствующую (2), так как не существует функционала, вариация которого совпадает с $\delta L + \delta W$ [13].

Наряду с (1) рассмотрим порождающую систему уравнений

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial u_t} + \nabla \frac{\partial L}{\partial \nabla u} - \frac{\partial L}{\partial u} = \Phi^{(0)} \qquad (\tau,\ \rho = \mathrm{const}) \tag{3}$$

Будем считать, что порядок системы (1) по $\mathbf{r}$ и t совпадает с порядком порождающей системы (3).

Если при переходе от (3) к (1) порядок системы повышается, то полученные ниже результаты применимы лишь для частных классов стационарных волн («медленных» движений в фазовом пространстве системы (3)). Пример усреднения по «быстрым» стационарным волнам рассмотрен в [14].

Предположим, что (3) имеет решения в виде стационарных плоских волн вида $u = U(\theta)$, $\theta = \omega t - \mathbf{kr} + \theta_0$, которые определяются из системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{d\theta}\frac{\partial L}{\partial U_\theta} - \frac{\partial L}{\partial U} = \Phi^{(0)} \qquad (\tau,\ \rho = \mathrm{const}) \tag{4}$$

и зависят от двух произвольных констант интегрирования θ_0, A и от параметров τ, ρ, ω, $\mathbf{k}$. Частота ω и волновое число $\mathbf{k}$ связаны с A дисперсионным соотношением $\omega = \omega(\mathbf{k}, A)$ и выбраны таким образом, что U—периодическая функция θ с периодом 2π.

При заданном периодическим решениям отвечают замкнутые траектории в фазовом пространстве системы (4). Если порождающая система консервативна ($\Phi^{(0)} \equiv 0$), то траектории заполняют некоторое подпространство в фазовом пространстве. Для неконсервативной системы периодическое решение U, если оно существует, представлено изолированной траекторией в фазовом пространстве; для него все A фиксированы. Профиль волны определяется конкретным видом (3) и может сильно отличаться от синусоидального. Определение условий существования периодических решений для произвольной системы уравнений вида (4) само по себе является сложной задачей, которая решена лишь в некоторых частных случаях [15, 16].

Решение исходной системы уравнений (1), близкое к $U(\theta)$, будем искать в виде асимптотического ряда по малому параметру ε

$$u = U(\theta, A, \tau, \rho) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n u^{(n)}(\theta, \tau, \rho)$$

$$\omega(\tau, \rho) = \theta_t, \qquad \mathbf{k}(\tau, \rho) = -\nabla\theta$$

$$A(\tau, \rho) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n A^{(n)}(\tau, \rho), \qquad \theta = \theta^{(0)}(t, \mathbf{r}, \tau, \rho) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \theta^{(n)}(\tau, \rho) \tag{5}$$

Разложим L и Φ в ряды по ε с учетом (5)

$$\frac{\partial L}{\partial u}=\frac{\partial L}{\partial U}+\varepsilon\left\{\frac{\partial^2 L}{\partial U^2}u^{(1)}+\frac{\partial^2 L}{\partial U\partial U_t}(U_\tau+u_t^{(1)})+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial^2 L}{\partial U\partial\nabla U}(\nabla_\rho U+\nabla u^{(1)})\right\}+O(\varepsilon^2)$$
$$\frac{\partial L}{\partial u_t}=\frac{\partial L}{\partial U_t}+\varepsilon\left\{\frac{\partial^2 L}{\partial U_t\partial U}u^{(1)}+\frac{\partial^2 L}{\partial U_t^2}(U_\tau+u_t^{(1)})+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial^2 L}{\partial U_t\partial\nabla U}(\nabla_\rho U+\nabla u^{(1)})\right\}+O(\varepsilon^2)$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial u_t}=\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial U_t}+\varepsilon\left\{\frac{\partial}{\partial\tau}\frac{\partial L}{\partial U_t}+\omega\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{\partial^2 L}{\partial U_t\partial U}u^{(1)}+\frac{\partial^2 L}{\partial U_t^2}(U_\tau+u_t^{(1)})+\right.\right. \tag{6}$$
$$\left.\left.+\frac{\partial^2 L}{\partial U_t\partial\nabla U}(\nabla_\rho U+\nabla u^{(1)})\right]\right\}+O(\varepsilon^2)$$
$$\Phi=\Phi^{(0)}+\varepsilon\left\{\Phi^{(1)}+\frac{\partial\Phi^{(0)}}{\partial U_t}(U_\tau+u_t^{(1)})+\frac{\partial\Phi^{(0)}}{\partial\nabla U}(\nabla_\rho U+\nabla u^{(1)})+\frac{\partial\Phi^{(0)}}{\partial U}u^{(1)}\right\}+$$
$$+O(\varepsilon^2)$$

Аналогичные разложения можно записать для функций $\partial L/\partial\nabla u$ и $\nabla(\partial L/\partial\nabla u)$.

В правых частях формул (6) лагранжиан определяется главным членом ряда (5), т. е. $L=L[\tau,\rho,U,\omega U_\theta,-\mathbf{k}U_\theta]$, $\nabla_\rho U=\partial U/\partial\rho$, переменные θ и τ, ρ рассматриваются как независимые, и члены типа $(\partial^2 L/\partial U^2)U$ означают произведение матрицы $\partial^2 L/\partial U^2$ на столбец U.

Подставляя (5), (6) в (1) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим с учетом (4)

$$T\left(\tau,\rho,\theta,\frac{\partial}{\partial\theta},\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)u^{(n)}=H^{(n)}(\tau,\rho,\theta)\qquad(n=1,2,\ldots) \tag{7}$$
$$Tu^{(n)}=\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{\partial^2 L}{\partial U_\theta^2}u_\theta^{(n)}+\frac{\partial^2 L}{\partial U_\theta\partial U}u^{(n)}\right]-\frac{\partial^2 L}{\partial U^2}u^{(n)}-\frac{\partial^2 L}{\partial U\partial U_\theta}u_\theta^{(n)}-$$
$$-\frac{\partial\Phi^{(0)}}{\partial U}u^{(n)}-\frac{\partial\Phi^{(0)}}{\partial U_\theta}u_\theta^{(n)} \tag{8}$$

$$H^{(1)}=\Phi^{(1)}+\frac{\partial\Phi^{(0)}}{\partial U_t}U_\tau+\frac{\partial\Phi^{(0)}}{\partial\nabla U}\nabla_\rho U+\frac{\partial^2 L}{\partial U\partial U_t}U_\tau+$$
$$+\frac{\partial^2 L}{\partial U\partial\nabla U}\nabla_\rho U-\frac{\partial}{\partial\tau}\frac{\partial L}{\partial U_t}-\nabla_\rho\frac{\partial L}{\partial\nabla U}-\omega\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{\partial^2 L}{\partial U_t^2}U_\tau+\frac{\partial^2 L}{\partial U_t\partial\nabla U}\nabla_\rho U\right]+$$
$$+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{\partial^2 L}{\partial\nabla U\partial U_t}U_\tau+\frac{\partial^2 L}{\partial(\nabla U)^2}\nabla_\rho U\right] \tag{9}$$

Выражения для $H^{(n)}$ при $n\geqslant 2$ громоздки и здесь не приводятся.

Таким образом, определение функций A, θ, $u^{(n)}$ в любом приближении связано с нахождением решения линейной системы (7) с периодическими коэффициентами и периодической по θ правой частью; это решение можно представить в виде

$$u^{(n)}=YC^{(n)}+Y\int_0^\theta Y^*H^{(n)}\,d\theta' \tag{10}$$

Здесь $C^{(n)}$ — постоянный вектор, Y—матрица, составленная из векторов фундаментальной системы решений уравнений в вариациях $T\psi=0$,

Y^*—аналогичная матрица для сопряженной ей системы, связанная с Y соотношениями

$$\frac{dY}{d\theta}Y^* = \left[\frac{\partial^2 L}{\partial U_\theta{}^2}\right]^{-1}, \qquad YY^* = 0 \tag{11}$$

Два частных решения уравнений в вариациях непосредственно определяются через U [12,16]

$$Y_1 = U_\theta, \qquad Y_2 = v + \alpha\theta U_\theta \tag{12}$$

где U_θ и v — периодические функции θ, а α — постоянная, определяемая зависимостью ω и $\mathbf{k}$ от A. Остальные $2N-2$ векторов матрицы Y можно в силу теоремы Флоке записать в виде

$$Y_i = e^{\lambda_i\theta} f_i(\theta) + \text{компл. сопр.} \qquad (i = 3, 4, \ldots, 2N) \tag{13}$$

причем $f(\theta + 2\pi) \equiv f(\theta)$ и все λ_i считаются различными. Предположим, что если для какого-либо характеристического показателя λ_l $\operatorname{Re}\lambda_l = 0$, то $\operatorname{Im}\lambda_l \neq \pm n$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$). Это условие обычно используется в теории квазилинейных колебаний как условие отсутствия внутреннего резонанса [17].

Согласно (11) — (13), матрицы Y и Y^* имеют вид [18]

$$\begin{aligned} Y_{ij} &= y_{ij}e^{\lambda_j\theta} + \alpha\theta y_{i1}\delta_{j2} + \text{компл. сопр.} \\ Y_{jk}{}^* &= y_{jk}{}^* e^{-\lambda_j\theta} - \alpha\theta y_{2k}{}^*\delta_{j1} + \text{компл. сопр.} \end{aligned} \tag{14}$$

где y_{ij} и y^*_{ik} — периодические функции θ и $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Подставляя Y и Y^* в (10), получим после преобразований

$$\begin{aligned} u_i{}^{(n)} = {} & y_{ij}e^{\lambda_j\theta} C_j^{(n)} + \alpha\theta y_{i1} C_2^{(n)} + y_{ij}e^{\lambda_j\theta}\int_0^\theta y^*_{jk} e^{-\lambda_j\theta'} H_k^{(n)} d\theta' + \\ & + \alpha y_{i1}\int_0^\theta d\theta' \int_0^{\theta'} y^*_{2k} H_k^{(n)} d\theta'' + \text{компл. сопр.} \end{aligned} \tag{15}$$

Отсюда следует, что $u^{(n)}$ будет ограниченной функцией θ при выполнении следующих необходимых условий:

$$C_j^{(n)} = \begin{cases} -\displaystyle\int_0^\infty y^*_{jk} H_k^{(n)} e^{-\lambda_j\theta} d\theta, & \operatorname{Re}\lambda_j > 0 \\ \displaystyle\int_{-\infty}^0 y^*_{jk} H_k^{(n)} e^{-\lambda_j\theta} d\theta, & \operatorname{Re}\lambda_j < 0 \end{cases} \tag{16}$$

$$2\pi\alpha C_2^{(n)} + \int_0^{2\pi} y^*_{1k} H_k^{(n)} d\theta + \alpha\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\theta y^*_{2k} H_k^{(n)} d\theta' = 0 \tag{17}$$

$$\int_0^{2\pi} y^*_{2k} H_k^{(n)} d\theta = 0 \tag{18}$$

Следовательно, имеется только одно независимое уравнение (18) для двух неизвестных функций $A^{(n)}$ и $\theta^{(n)}$. Такая ситуация характерна для неизохронных колебательных систем и связана с тем, что для них амплитуда и фаза находятся из уравнений разных приближений [17]. В некоторых случаях для нахождения $A^{(n)}$ и $\theta^{(n)}$ удобно использовать наряду с (18) уравнение

$$\int_0^{2\pi} y_{1k}^* H_k^{(n)} d\theta = 0 \tag{19}$$

чтобы иметь возможность осуществлять предельный переход к квазигармонической волне. Действительно, в квазилинейном случае ($\partial\omega / \partial A = 0$) в (17) $\alpha = 0$, и условие (19) становится необходимым. При этом неоднозначности в выборе уравнений для $A^{(n)}$ и $\theta^{(n)}$ не возникает.

Уравнения (15) — (19) позволяют последовательно находить неизвестные $A^{(n)}$, $\theta^{(n)}$ и $u^{(n)}$. Следует отметить, что ряды (5) отвечают частному классу граничных условий, а именно, заданию волны, распространяющейся только в одном направлении. Аналогичная ситуация имеет место и для линейных уравнений в частных производных, содержащих малый параметр [19].

Так как в (18) θ явно не входит, то можно рассматривать в качестве неизвестных функций $A^{(n)}$, $\omega^{(n)}$, $\mathbf{k}^{(n)}$. В этом случае (18) необходимо дополнить уравнениями

$$\partial\mathbf{k}/\partial t + \nabla\omega = 0, \qquad \operatorname{rot}\mathbf{k} = 0 \tag{20}$$

Рассмотрим более подробно уравнения первого приближения.

Видно, что уравнения (18), (20) для $n = 1$ квазилинейны относительно A, ω, $\mathbf{k}$ и принадлежат либо к гиперболическому, либо к эллиптическому типу (последнее возможно только для нелинейных систем [9]). В гиперболическом случае существует семейство действительных характеристик — лучей в пространстве $\mathbf{r}$, t. В этом смысле данный метод можно рассматривать как обобщение пространственно-временной геометрической оптики на нелинейные среды.

Подчеркнем, что полученные уравнения справедливы для систем с произвольной (не обязательно малой) нелинейностью. Результаты некоторых работ [9, 20, 21], приводившиеся для случая малой нелинейности без конкретизации параметров дисперсии и, следовательно, формы стационарной волны, фактически справедливы только при сильной дисперсии, когда стационарная волна близка к гармонической.

Можно показать, что в отсутствие неконсервативных сил $\Phi^{(0)}$ оператор T будет самосопряженным. Это справедливо и для $\Phi^{(0)} \neq 0$, если $\Phi^{(0)}$ удовлетворяет условиям

$$\frac{\partial\Phi_i^{(0)}}{\partial U_{j\theta}} \equiv -\frac{\partial\Phi_j^{(0)}}{\partial U_{i\theta}}, \qquad \frac{\partial\Phi_i^{(0)}}{\partial U_j} \equiv \frac{\partial\Phi_j^{(0)}}{\partial U_i} - \frac{d}{d\theta}\frac{\partial\Phi_j^{(0)}}{\partial U_{i\theta}}$$

В этом случае в качестве функций y_{1k}^* и y_{2k}^* можно взять соответственно U_A и U_θ.

Покажем, что уравнения первого приближения можно записать в лагранжевой форме. Для этого подставим (9) в (18)

$$\int_0^{\pi} U_\theta \left\{\omega\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{\partial^2 L}{\partial U_t^2} U_\tau + \frac{\partial^2 L}{\partial U_t \partial\nabla U}\nabla_\rho U\right] - \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{\partial^2 L}{\partial\nabla U\,\partial U_t} U_\tau + \frac{\partial^2 L}{\partial(\nabla U)^2}\nabla_\rho U\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 L}{\partial U\,\partial U_t} U_\tau + \frac{\partial^2 L}{\partial U \partial\nabla U}\nabla_\rho U + \frac{\partial}{\partial\tau}\frac{\partial L}{\partial U_t} + \nabla_\rho \frac{\partial L}{\partial\nabla U}\right\} d\theta = \tag{21}$$

$$= \int_0^{2\pi} U_\theta \left\{\Phi^{(1)} + \frac{\partial\Phi^{(0)}}{\partial U_t} U_\tau + \frac{\partial\Phi^{(0)}}{\partial\nabla U}\nabla_\rho U\right\} d\theta$$

Проинтегрируем по частям интеграл, содержащий квадратные скобки, учитывая периодичность всех функций по θ. Тогда левую часть (21) после несложных преобразований можно записать в виде

$$\int_0^{2\pi}\left\{\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial U_t}U_\theta\right)+\nabla_\rho\left(\frac{\partial L}{\partial\nabla U}U_\theta\right)\right\}d\theta$$

Таким образом (18) можно представить в виде

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\frac{\partial\langle L\rangle}{\partial\omega}-\nabla_\rho\frac{\partial\langle L\rangle}{\partial\mathbf{k}}=\frac{\langle\delta W\rangle}{\partial\theta}\tag{22}$$

Дисперсионное соотношение также удобно записать в виде

$$\frac{\partial\langle L\rangle}{\partial A}=-\frac{\langle\delta W\rangle}{\delta A}\tag{23}$$

Здесь $\langle L\rangle$ — среднее за период значение лагранжиана, $\langle\delta W\rangle$ —средняя виртуальная работа, а символами $\langle\delta W\rangle\,/\,\delta\theta$ и $\langle\delta W\rangle\,/\,\delta A$ обозначены коэффициенты при вариациях $\delta\theta$ и δA в выражении

$$\langle\delta W\rangle=\langle\Phi U_\theta\rangle\,\delta\theta+\langle\Phi U_A\rangle\,\delta A\tag{24}$$

Таким образом, в первом приближении приходим к уравнениям Лагранжа второго рода для некоторой системы, описываемой обобщенными функциями A и θ. Следовательно, можно сформулировать обобщенный вариационный принцип Гамильтона в усредненной форме

$$\int(\delta\langle L\rangle+\langle\delta W\rangle)\,d\mathbf{r}dt=0\tag{25}$$

Отсюда ясен метод составления уравнений первого приближения: следует усреднить лагранжиан и виртуальную работу за период волны и записать соответствующие уравнения Лагранжа второго рода для функций A и θ. Именно такой подход был предложен в [8] для консервативных систем, и приведенный выше метод дает некоторое обоснование этого подхода.

Как и в механике, неконсервативные (к ним относим также и активные системы, для которых диссипация может быть как отрицательной, так и положительной) распределенные системы можно описывать плотностью $\Phi=-\partial R\,/\,\partial U_t$ функции Релея R. Если ввести среднее значение функции Релея $\langle R\rangle$, то можно показать, что (22) записывается в виде

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\frac{\partial\langle L\rangle}{\partial\omega}-\nabla_\rho\frac{\partial\langle L\rangle}{\partial\mathbf{k}}=-\frac{\partial\langle R\rangle}{\partial\omega}\tag{26}$$

При помощи (26) можно получить уравнение переноса для средних значений плотности энергии $\langle E\rangle$ и потока энергии $\langle \mathrm{S}\rangle$ в диссипативных средах

$$\frac{\partial\langle E\rangle}{\partial\tau}+\operatorname{div}_\rho\langle\mathrm{S}\rangle=-\omega\frac{\partial\langle R\rangle}{\partial\omega}-\frac{\partial\langle L\rangle}{\partial\tau}\tag{27}$$

$$\left(\langle E\rangle=\omega\frac{\partial\langle L\rangle}{\partial\omega}-\langle L\rangle,\qquad \langle\mathrm{S}\rangle=-\omega\frac{\partial\langle L\rangle}{\partial\mathbf{k}}\right)$$

Здесь $\omega\partial\langle R\rangle\,/\,\partial\omega$ — плотность диссипируемой мощности, а $\partial\langle L\rangle\,/\,\partial\tau$ характеризует изменение энергии, связанное с нестационарностью параметров среды.

Отметим здесь случай, когда $\partial \langle R \rangle / \partial\omega = \beta\partial\langle L\rangle / \partial\omega$, где β — постоянная. Тогда (26) записывается в виде уравнения Лагранжа «приведенной» консервативной системы

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\frac{\partial\langle L^*\rangle}{\partial\omega} - \nabla_\rho \frac{\partial\langle L^*\rangle}{\partial\mathbf{k}} = 0 \qquad (L^* = Le^{\beta\tau}) \tag{28}$$

В этом случае можно сформулировать вариационную задачу для функционала «приведенного» действия $\int L^* d\mathbf{r}dt$ (и аналогично для $\int \langle L^*\rangle\, d\mathbf{r}dt$). Общий вид L^* для диссипативных систем с сосредоточенными параметрами обсуждается в [22, 23].

Для волнового пакета, локализованного в пространстве, из (28) следует, что

$$\int \frac{\partial\langle L^*\rangle}{\partial\omega} d\mathbf{r} = \mathrm{const} \tag{29}$$

и величина интеграла в левой части (29) может быть названа «приведенным» адиабатическим инвариантом по аналогии с адиабатическим инвариантом в консервативной системе.

Для сосредоточенной системы с одной степенью свободы соотношение, аналогичное (29), было получено в [17].

Отметим в заключение, что все полученные уравнения справедливы и непосредственно для колебательных систем с сосредоточенными параметрами при любом числе степеней свободы, если положить $\nabla \equiv 0$ и понимать под L и R соответственно функции Лагранжа и Релея системы. Соответствующие результаты, конечно, совпадают с известными [17]. Однако и здесь использованный выше подход обладает некоторыми преимуществами, так как лагранжева формулировка метода позволяет получить ряд результатов в более простой форме, особенно для сильно нелинейных колебаний в системах со многими степенями свободы.

Поступила 25 VI 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Митропольский Ю. А., Мосеенков Б. М. Лекции по применению асимптотических методов к решению уравнений в частных производных. Киев, Ин-т математики АН УССР, 1968.
2. Taniuti T., Yajma N. A perturbation method for nonlinear wave modulation I. J. Math. Phys., 1969, vol. 10, No. 8.
3. Рабинович М. И. Об асимптотическом методе в теории нелинейных колебаний распределенных систем. Докл. АН СССР, 1970, т. 191, № 6.
4. Гапонов А. В., Островский Л. А., Рабинович М. И. Одномерные волны в нелинейных системах с дисперсией. Изв. высш. учебн. заведений, Радиофизика, 1970, т. 13, № 2.
5. Whitham G. B. Nonlinear dispersive waves. Proc. Roy. Soc., Ser. A, 1965, 283, N 1393, p. 238.
6. Филиппов Ю. Ф. К теории распространения стационарных волн конечной амплитуды в ферритах. Изв. высш. учебн. заведений, Радиофизика, 1965, т. 8, № 2.
7. Курдгелаидзе Д. Ф. Теория нелинейного поля ($\Box - \alpha\varphi^2)\varphi = 0$. ЖЭТФ, 1959, т. 36, № 4.
8. Whitham G. B. A general approach to linear and nonlinear dispersive waves using a Lagrangian. J. Fluid. Mech., 1965, vol. 22, No. 2, p. 273.
9. A discussion on nonlinear theory of wave propagation in dispersive systems (organized by M. J. Lighthill). Proc. Roy. Soc., 1967, Ser. A299, No. 1456.
10. Seliger R. L., Whitham G. B. Variational principle in continium mechanics. Proc. Roy. Soc., 1968, Ser. A305, N 1480.
11. Luke J. C. A perturbation method for nonlinear dispersive wave problems. Proc. Roy. Soc., 1966, Ser. A292, No. 1430, p. 403.

12. Островский Л. А., Пелиновский Е. Н. Метод усреднения для несинусоидальных волн. Докл. АН СССР, 1970, т. 195, № 4.
13. Лурье А. И. Аналитическая механика. М., Физматгиз, 1961.
14. Рабинович М. И. О методе усреднения по стационарным волнам. Изв. высш. учебн. заведений, Радиофизика, 1967, т. 10, № 2.
15. Куликов Н. К. Условия существования и нахождения параметров периодических движений автономных систем. Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1959, N 4.
16. Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М., Гостехиздат, 1956.
17. Митропольский Ю. А. Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний, изд. 2. М., «Наука», 1964.
18. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц, изд. 2. М., «Наука», 1966.
19. Курант Р. Уравнения в частных производных. М., «Мир», 1964.
20. Карпман В. И., Крушкаль Е. М. О модулированных волнах в нелинейных диспергирующих средах. ЖЭТФ, 1968, т. 55, № 2.
21. Tam G. K. W. Nonlinear dispersion of cold plasma waves. J. Plasma Phys., 1970, vol. 4, No. 1, p. 109.
22. Vaast R. Variational principle for certain nonconservative systems. Amer. J. Phys., 1967, vol. 35, No. 5, p. 419.
23. Касьянов В. А., Ткаченко Н. Е. Описание диссипативных систем с помощью формализма Гамильтона. Прикл. механ., 1970, т. 6, № 2.