Прикладная математика и механика. Том 36, 1972

УДК 532.5

ОБ ОДНОМ ТОЧНОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ ПЛОСКОГО НЕСТАЦИОНАРНОГО ДВИЖЕНИЯ ГАЗА

О. Ф. Меньших

(Куйбышев)

Получено точное решение уравнений плоского нестационарного потенциального изэнтропического движения газа, зависящее от двух произвольных функций, в случае показателя адиабаты Пуассона, равного двум. Оно интерпретировано как движение «мелкой воды» со свободной поверхностью, которая должна быть линейчатой. Рассмотрены общие вопросы движения мелкой воды и частный случай, когда свободная поверхность цилиндрическая, а движение неодномерное.

1. Уравнение, описывающее плоское нестационарное потенциальное изэнтропическое движение газа, возьмем в виде [1]

$$(\Phi_H)^2+\Phi_{uu}\Phi_{vv}-(\Phi_{uv})^2-\Phi_H(\Phi_{uu}+\Phi_{vv})+ \\ +(\gamma-1)H\,[(\Phi_{uH})^2+(\Phi_{vH})^2+2\Phi_H\Phi_{HH}-\Phi_{HH}(\Phi_{uu}+\Phi_{vv})]=0 \tag{1.1}$$

Здесь u, v — проекции вектора скорости $\mathbf{v}$ на оси декартовой системы координат x, y, H — энтальпия, t — время, γ — показатель адиабаты Пуассона, Φ — сопряженный потенциал, связанный с потенциалом скоростей φ формулой

$$\Phi=\varphi-xu-yv+t\,[{}^1\!/_2\,(u^2+v^2)+H] \tag{1.2}$$

Переход к переменным t, x, y происходит по формулам

$$t=\Phi_H,\qquad x=u\Phi_H-\Phi_u,\qquad y=v\Phi_H-\Phi_v \tag{1.3}$$

При выводе уравнения (1.1) предполагалось, что переменные u, v, H функционально независимы. Для однозначного перехода в пространство переменных t, x, y необходимо чтобы соответствующий якобиан был отличен от нуля.

Уравнение (1.1) в случае $\gamma=2$ после замены $\sqrt{H}=s$ примет вид

$$\Phi_s\,[\Phi_{ss}-\Phi_{uu}-\Phi_{vv}]+s\,\{4\,[\Phi_{uu}\Phi_{vv}-(\Phi_{uv})^2]+ \\ +(\Phi_{us})^2+(\Phi_{vs})^2-(\Phi_{uu}+\Phi_{vv})(\Phi_{ss})\}=0 \tag{1.4}$$

Формулы (1.3) перепишутся в виде

$$t={}^1\!/_2 s^{-1}\Phi_s,\quad x={}^1\!/_2 s^{-1}\Phi_s-\Phi_u,\quad y={}^1\!/_2 s^{-1}\Phi_s-\Phi_v \tag{1.5}$$

2. Будем искать частные решения уравнения (1.4), на которых равен единице общий ранг матрицы

$$M=\begin{Vmatrix}\Phi_{ss} & \Phi_{su} & \Phi_{sv}\\ \Phi_{us} & \Phi_{uu} & \Phi_{uv}\\ \Phi_{vs} & \Phi_{vu} & \Phi_{vv}\end{Vmatrix}$$

Для определенности считаем, что имеют место следующие зависимости между первыми производными функциями Φ:

$$\Phi_u = P_1(\Phi_s), \qquad \Phi_v = P_2(\Phi_s) \tag{2.1}$$

Частные решения (1.4) при условии (2.1) будут решениями с дифференциальными связями[2]. Для выделения всех таких решений применим следующее касательное преобразование [3]:

$$T(\xi, u, v) = -\Phi + s\Phi_s, \qquad s = T_\xi, \qquad \Phi_u = -T_u$$
$$\Phi_v = -T_v, \qquad \xi = \Phi_s (s_\xi \neq 0) \tag{2.2}$$

После действия касательного преобразования (2.2) на уравнение (1.4) и последующего представления T в форме

$$T = \psi(\xi) - P_1(\xi)u - P_2(\xi)v$$

выделяются все решения уравнения (1.4) при условии (2.1). С учетом (1.2), (1.5) получим искомое решение

$$u = t^{-1}[x + P_1(\xi)], \quad v = t^{-1}[y + P_2(\xi)] \tag{2.3}$$
$$\Gamma = P_1'x + P_2'y - \psi't + P_1P_1' + P_2P_2' + {}^1/_2\xi = 0 \tag{2.4}$$
$$\varphi = \xi\psi'(\xi) - \psi + {}^1/_2 t^{-1}[(x + P_1)^2 + (y + P_2)^2] -$$
$$- {}^1/_4 \xi^2 t^{-1} - \xi t^{-1}[(x + P_1)P_1' + (y + P_2)P_2'] \tag{2.5}$$
$$\xi = 2ts \tag{2.6}$$

Функции P_1 и P_2 связаны уравнением Монжа

$$(P_1')^2 + (P_2')^2 = 1 \tag{2.7}$$

решение которого выписывается в конечном виде [4]

$$P_1 = \int \cos\theta(\xi)\, d\xi, \qquad P_2 = \int \sin\theta(\xi)\, d\xi \tag{2.8}$$

Таким образом, получено частное решение уравнения (1.4), содержащее две произвольные функции $\theta(\xi)$ и $\psi(\xi)$.

Уравнение (2.4) при фиксированном значении t определяет частный случай линейчатой поверхности, образованной движением прямой линии параллельно заданной плоскости,— цилиндроид [5]. Эта поверхность будет развертывающейся (а именно цилиндрической) лишь в случае $\theta = \text{const}$.

3. Будем интерпретировать найденный класс решений (2.3)—(2.6) как движение «мелкой воды» над горизонтальным дном. Тогда энтальпию можно представить в виде

$$H = gZ \tag{3.1}$$

где g — ускорение силы тяжести, Z — высота свободной поверхности жидкости.

В приближении мелкой воды давление p меняется вдоль вертикального столба жидкости гидростатически [6]. Среднее давление $\langle p \rangle$ и «плотность» жидкости $\langle \rho \rangle$ связаны с высотой свободной поверхности формулами

$$\langle p \rangle = {}^1/_2 g\rho Z^2 = \int_0^Z p\,dz, \quad \langle \rho \rangle = \rho Z, \qquad H = 2\frac{p}{\rho} \tag{3.2}$$

Из изложенного следует, что в любой момент времени свободная поверхность жидкости будет линейчатой, причем размещение прямых линий на поверхности будет определяться функциями $\theta(\xi)$ и $\psi(\xi)$. Линейчатая поверхность (2.4) будет регулярной, так как частные производные по x, y, ξ левой части уравнения (2.4) не могут одновременно обращаться в нуль в силу (2.7).

Найдем условия, при которых возможны разрывы свободной поверхности мелкой воды. Из (2.6) и (3.1) следует, что переменная ξ определяется формулой $\xi = 2t\sqrt{gZ}$. Поэтому достаточно найти условия неограниченности $\partial\xi/\partial x$, $\partial\xi/\partial y$.

Из (2.4) следует

$$\partial\xi/\partial x = -P_1'/\Gamma_\xi', \qquad \partial\xi/\partial y = -P_2'/\Gamma_\xi' \tag{3.3}$$

В силу ограниченности P_1' и P_2' необходимо приравнять нулю знаменатель в последних формулах, что совместно с (2.4) приведет к системе двух уравнений (при фиксированном t)

$$\begin{gathered}\Gamma = (\xi)x + \beta(\xi)y + \omega(\xi) = 0\\ \Gamma_\xi' = \alpha'(\xi)\,x + \beta'(\xi)y + \omega'(\xi) = 0\\ \alpha(\xi) = \cos\theta, \quad \beta(\xi) = \sin\theta\\ \omega(\xi) = \cos\theta\int\cos\theta d\xi + \sin\theta\int\sin\theta d\xi - \psi' t + {}^1/_2\xi\end{gathered} \tag{3.4}$$

Система (3.4) определяет огибающую семейства прямых, зависящих от одного параметра ξ.

Возможны два случая.

Первый случай

$$\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \alpha' & \beta'\end{vmatrix} = \frac{d\theta}{d\xi} \neq 0 \tag{3.5}$$

Тогда из системы (3.4) при фиксированных ξ и t можно найти координаты точки, принадлежащие огибающей

$$\begin{gathered}x = -P_1 + r_1, \quad y = -P_2 + r_2\\ r_1 = \frac{1}{\theta'}(\alpha_{11}t + \alpha_{12}), \qquad r_2 = \frac{1}{\theta'}(\alpha_{21}t + \alpha_{22})\\ \alpha_{11} = \psi'(\xi)\theta'\cos\theta = \psi''(\xi)\sin\theta, \ \alpha_{12} = {}^3/_2\sin\theta - {}^1/_2\,\xi\,\theta'\cos\theta\\ \alpha_{21} = \psi'(\xi)\theta'\sin\theta + \psi''(\xi)\cos\theta, \ \alpha_{22} = -[{}^3/_2\cos\theta + {}^1/_2\,\xi\,\theta'\sin\theta]\end{gathered} \tag{3.6}$$

При заданных функциях θ и ψ уравнения (3.6) в параметрическом виде определяют огибающую семейства прямых, причем эту огибающую можно заранее построить. Таким образом, вдоль прямой (3.6) происходит разрушение свободной поверхности мелкой воды.

Второй случай при исследовании системы (3.4) будет иметь место, если одновременно выполнены условия

$$\theta' = 0, \qquad \psi'(\xi)t = {}^3/_2 \tag{3.7}$$

Тогда второе уравнение (3.4) тождественно удовлетворяется, и разрушение свободной поверхности мелкой воды происходит вдоль образующей линейчатой поверхности при некоторых значениях ξ и t, которые должны определяться из системы (3.7).

Линии тока рассматриваемого движения мелкой воды (t — параметр) будут определяться системой двух уравнений

$$[x + P_1(\xi)]\frac{dy_1}{d\xi} - [y + P_2(\xi)]\frac{dx_1}{d\xi} = 0 \qquad (3.8)$$

$$\alpha(\xi)x_1 + \beta(\xi)y_1 + \omega(\xi) = 0$$

Допуская, что в рассматриваемой области не имеет место второе уравнение (3.4), из (3.8) получим систему

$$\frac{dx_1}{d\xi} = \frac{x_1 + p_1}{{}^1/_2\xi - \psi' t}\Gamma'_\xi, \qquad \frac{dy_1}{d\xi} = \frac{y_1 + P_2}{{}^1/_2\xi - \psi' t}\Gamma'_\xi \qquad (3.9)$$

Уравнение (2.4) с учетом (2.3) записывается в виде

$$P_1'(\xi)u + P_2'(\xi)v + t^{-1}({}^1/_2\xi - \psi' t) = 0 \qquad (3.10)$$

Отсюда видно, что если

$$ {}^1/_2\xi - \psi' t \neq 0 \qquad (3.11)$$

то в силу (2.7) u и v одновременно не могут обращаться в нуль. Следовательно, если имеет место (3.11) и $\Gamma_\xi' \neq 0$, то система (3.9) не имеет особых точек.

Для системы (3.9) можно поставить задачу Коши

$$\xi = \xi_0, \quad x_1 = x_1(\xi_0), \quad y_1 = y_1(\xi_0) \qquad (3.12)$$

причем начальные данные не должны лежать на прямой (3.6), что всегда можно предполагать.

Обратим внимание на одну особенность формул (2.3) — (2.8) при $\xi = 0$. Непосредственной проверкой можно установить, что при $\xi = 0$ вдоль прямой

$$l = \alpha(0)x + \beta(0)y + \omega(0) = 0 \qquad (3.13)$$

будет выполняться условие обтекания

$$\frac{\partial l}{\partial t} + u\frac{\partial l}{\partial x} + v\frac{\partial l}{\partial y} = 0$$

Отсюда следует, что возможны движения мелкой воды, которая растекается вдоль прямой (3.13) по сухому дну.

Из формул (3.9) следует, что движение мелкой воды будет со стационарными линиями тока, если $\psi'(\xi) \equiv 0$. Поэтому возможна постановка задачи о движении мелкой воды в некотором криволинейном канале, стенки которого должны определяться интегрированием системы (3.9) при $\psi'(\xi) = 0$.

4. Остановимся на частном случае, когда $\theta = \text{const}$.

После поворота системы координат решение (2.3) — (2.8) можно записать в форме

$$u = t^{-1}(x + \xi), \qquad v = t^{-1}y, \qquad x + {}^3/_2\xi - t\psi'(\xi) = 0 \qquad (4.1)$$

$$\varphi = \xi\psi' - \psi + {}^1/_2 t^{-1}[(x+\xi)^2 + y^2] - {}^1/_4\xi^2 t^{-1} - \xi t^{-1}(x + \xi) \qquad (4.2)$$

Свободная поверхность жидкости для этого случая, как это видно из (4.1), будет цилиндрической.

Решение зависит от одной произвольной функции. Следует заметить, что в случае одномерного движения газа ($v = 0$) при $\gamma = 2$ система уравнений газовой динамики при указанных выше предположениях не допускает решения (4.1), (4.2), которое зависело бы от произвольной функции.

Течение жидкости будет симметричным относительно оси $y = 0$.

Решение (4.1), (4.2) имеет физический смысл в окрестности плоскости $y = 0$, так как при $y \to \infty$ модуль вектора скорости будет неограниченно возрастать.

Поставим следующую задачу. Пусть при $t = t_0$ задана свободная поверхность жидкости как функция от x

$$t = t_0, \qquad \xi = \varepsilon_1(x) \qquad (t_0 > 0) \tag{4.3}$$

Для простоты рассуждений предположим, что ε_1 — монотонная функция, имеющая первую и вторую производные при $-\infty < x < \infty$.

В таком случае зависимость (4.3) можно обратить. Пусть результат этого обращения будет следующий:

$$t = t_0, \qquad x = \Omega(\xi) \tag{4.4}$$

По заданной свободной поверхности однозначно определяется поле скоростей по формулам (4.1) при $t = t_0$. Из (4.1) и последнего соотношения найдем значение произвольной функции $\psi'(\xi)$.

Подставляя $\psi'(\xi)$ в (4.1), получаем

$$x + {}^3/_2\, \xi = tt_0^{-1}\, [\Omega(\xi) + {}^3/_2\, \xi] \tag{4.5}$$

Найдем условие, при котором возможно разрушение свободной поверхности мелкой воды.

Второе уравнение (3.4) запишется в форме

$${}^3/_2 = tt_0^{-1}\, [\Omega'(\xi) + {}^3/_2] \tag{4.6}$$

Отсюда следует возможность определения значения $t > t_0$, если будет выполнено условие

$$-{}^3/_2 < \Omega'(\xi) < 0 \tag{4.7}$$

Тогда из (4.6) найдем

$$tt_0^{-1} = [1 + {}^2/_3\, \Omega'(\xi)]^{-1} \tag{4.8}$$

Необходимо взять минимальное значение величины в правой части (4.8) (тем самым определяется значение ξ в момент наступления разрыва). Подставляя (4.8) в (4.5), найдем значение x, при котором возникает разрыв

$$x = [\Omega - \xi\Omega']\, [1 + {}^2/_3\, \Omega']^{-1} \tag{4.9}$$

Из (4.1) и (4.7) следует вывод, что если свободная поверхность жидкости возрастает при $x > 0$ $(x + \xi > 0)$, то образование разрывов невозможно. В противном случае возможны разрывы. Условие (4.7) накладывает ограничение на направление касательной к свободной поверхности жидкости. Качественно эти выводы согласуются с известными результатами по одномерному движению мелкой воды [6].

Система уравнений (3.9) интегрируется, и уравнения линий тока будут следующие:

$$x_1 = -\,[{}^3/_2\xi + tt_0^{-1}\, [\Omega(\xi) + {}^3/_2\xi]\} \tag{4.10}$$

$$y_1 = cA(\xi)$$

$$A(\xi) = \exp \int \frac{{}^3/_2 - tt_0^{-1}(\Omega' + {}^3/_2)}{{}^1/_2\xi - tt_0^{-1}(\Omega + {}^3/_2\xi)}\, d\xi \qquad (c = \mathrm{const}$$

5. Отметим, что с точки зрения групповой классификации решение (2.3) — (2.8) будет частично инвариантным [7], причем построено на подгруппе, имеющей инварианты

$$J_1 = u - xt^{-1}, \quad J_2 = v - yt^{-1}, \quad J_3 = \sqrt{H}t$$

и имеют место зависимости

$$J_1 = J_1(J_3), \qquad J_2 = J_2(J_3)$$

При этом «лишней» функцией будет H.

Частный случай (2.3) — (2.8) — $\theta = \text{const}$ соответствует простейшему функционально-инвариантному решению уравнения (1.4) вида

$$\Phi = \Phi(h), \qquad h = \alpha_1 u + \alpha_2 v \pm \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}\, s \qquad (\alpha_1, \alpha_2 = \text{const})$$

что можно проверить прямым вычислением.

Групповые свойства системы уравнений, описывающей движение мелкой воды, были рассмотрены в [8], однако там не было получено приведенного выше решения (2.3) — (2.8).

Автор выражает искреннюю благодарность С. В. Фальковичу за внимание к работе и полезные замечания.

Поступила 28 VI 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Меньших О. Ф. О плоских нестационарных околозвуковых течениях газа, Изв. высш. учебн. заведений, Математика, 1970, № 2.
2. Яненко Н. Н. Теория совместности и методы интегрирования систем нелинейных уравнений в частных производных. Тр. 4 Всес. матем. съезда, т. 2, Л., «Наука», 1964.
3. Беленький И. М. Введение в аналитическую механику. М., «Высшая школа», 1964.
4. Яненко Н. Н. Бегущие волны систем квазилинейных уравнений. Докл. АН СССР, 1956, т. 109, № 1.
5. Плужников И. С. Линейчатые поверхности и методы их исследования. М., Изд-во Моск. инструмент. ин-та, 1964.
6. Стокер Дж. Дж. Волны на воде. М., Изд-во иностр. лит., 1959.
7. Овсянников Л. В. Групповые свойства дифференциальных уравнений, Новосибирск, Изд-во СО АН СССР, 1962.
8. Гладышев М. Т. Некоторые семейства точных решений уравнений двумерной теории мелкой воды. ПМТФ, 1969, № 6.