Прикладная математика и механика. Том 36, 1972

УДК 532.5.031

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛОСКОГО ПОЛОГО ВИХРЯ

Н. С. Козин

(Москва)

Доказывается нейтральная устойчивость по отношению к малым возмущениям двух плоских течений: полого вихря, ограниченного снаружи кольцевой стенкой, и свободного полого вихря.

В работе [1] был предложен подход к изучению устойчивости по отношению к малым возмущениям плоских потенциальных течений несжимаемой идеальной жидкости, который позволяет обойти трудности, возникающие при нахождении собственных функций двумерных гидродинамических течений. Способ исследования устойчивости предполагает линеаризацию уравнений гидродинамики при помощи конформного отображения области невозмущенного течения на область возмущенного. Такой подход требует, чтобы область невозмущенного течения была не слишком сложной, иначе вопрос о существовании конформного отображения остается открытым. В работе [1] этот вопрос не затронут; некоторые течения, для которых авторы проводят исследования, формально не могут быть таким способом изучены — конформного отображения построить нельзя. Не рассмотрен также вопрос о полноте системы собственных функций в тех случаях, когда ее удается найти. Поэтому представляет интерес изучение уравнений, которые возникают при исследовании малых возмущений стационарных течений методом конформного отображения, границ его применимости, а также решение задачи Коши для уравнений на возмущения.

1. Полый вихрь, ограниченный снаружи кольцевой стенкой. Рассматривается потенциальное течение несжимаемой жидкости, представляющее собой полый плоский вихрь, ограниченный снаружи кольцевой стенкой. Если обозначить через $z_0 = x_0 + iy_0$ комплексную переменную в физической плоскости течения, а через $\zeta = u_0 - iv_0$ — комплексную скорость, то поле скоростей течения задается формулой

$$\zeta = -i\zeta^{-1}, \quad 1 \leqslant |z_0| \leqslant r^{-1}, \quad 0 < r < 1 \tag{1.1}$$

Граница течения $|z_0| = 1$ — свободная, давление на ней постоянно: $p = \mathrm{const}$. Линия $|z_0| = r^{-1}$ — жесткая стенка. Годограф течения — кольцо

$$r \leqslant |\zeta| \leqslant 1 \tag{1.2}$$

Комплексный потенциал течения $f_0 = \varphi_0 + i\psi_0$ задается формулой

$$f_0 = -i \ln z_0 \tag{1.3}$$

Пусть в начальный момент времени $t = 0$ течение подвергается действию возмущающих сил [1], а потенциал возмущенного течения $f(z_0, 0)$

[1] Возможной физической реализацией возмущения может служить действие импульса мгновенных сил или возмущение свободной поверхности.

допускает представление

$$f(z_0,\ 0) = -i\ \ln z_0 + \varepsilon f_1(z_0,\ 0) + O(\varepsilon^2) \tag{1.4}$$

Здесь ε — малый вещественный параметр, $f_1(z_0, 0)$ предполагается аналитической и ограниченной в области течения.

Возмущение считается потенциальным, поэтому уравнения возмущенного течения будут иметь вид

$$\operatorname{Re}\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{w\bar{w}}{2} + \frac{p}{\rho_0} = 0, \qquad w = \frac{\partial f}{\partial z} \tag{1.5}$$

Здесь $f(z,\ t)$ — комплексный потенциал, w — комплексная скорость, z — физическая переменная в области возмущенного течения, ρ_0 — постоянная плотность жидкости.

В начальный момент времени поле скоростей возмущенного течения мало отличается от поля скоростей невозмущенного течения, поэтому разумно предположить, что в последующие моменты времени область D_t возмущенного течения будет мало отличаться от области D_0 невозмущенного течения, т. е. граница D_t будет иметь вид

$$1 + \delta(\theta) \leqslant |\ z_0\ | \leqslant r^{-1}, \qquad \delta(\theta) \in C^2[0,\ 2\pi] \tag{1.6}$$

причем $\delta(\theta) \sim \varepsilon$, $\delta'(\theta) \sim \varepsilon$ и $\delta''(\theta) \sim \varepsilon$. Так как жидкость предполагается несжимаемой, то площади D_0 и D_t равны, т. е.

$$\int_0^{2\pi} \delta(\theta)\, d\theta = 0 \tag{1.7}$$

Соотношение (1.7) позволяет утверждать, что в первом приближении существует конформное отображение $D_0 \to D_t$, т. е. функция

$$z = z(z_0,\ \bar{z}_0,\ t) = z_0 + \varepsilon z_1(z_0,\ t) + O(\varepsilon^2) \tag{1.8}$$

аналитична с точностью до членов порядка ε^2.

Зная форму свободной границы $\delta(\theta)$, можно явно построить $z_1(z_0,\ t)$.

В самом деле, будем искать $z(z_0, \bar{z}_0, t)$ в виде $z_0 + \Delta z$. Тогда в первом приближении

$$\operatorname{Re}(\Delta z \bar{z}_0) = \begin{cases} 0, & |\,z_0\,| = r^{-1} \\ \delta(\theta), & |\,z_0\,| = 1 \end{cases}$$

Если $\delta(\theta)$ задана рядом Фурье с коэффициентами a_k, то

$$\Delta z = \sum_{k=-\infty,\, k\neq 1}^{k=+\infty} 2a_{k-1} z_0^k \left(r^{k+1} - r^{3-k}\right)^{-1}$$

Используя (1.8), будем искать неизвестные функции в виде

$$\begin{aligned} p(z,\ t) &= p_0(z_0) + \varepsilon\, p_1(z_0,\ t) \\ w(z,t) &= \zeta(z_0) + \varepsilon w_1(z_0,\ t) \\ f(z,\ t) &= f_0(z_0) + \varepsilon[f_1(z_0,\ t) + \zeta z_1(z_0,\ t)] \end{aligned} \tag{1.9}$$

и линеаризуем (1.5)

$$p_1 = -\rho_0 \operatorname{Re}\left(\frac{\partial f_1}{\partial t} + \bar{\zeta} w_1\right), \quad w_1 = -i\zeta^2\left(\frac{\partial f_1}{\partial \zeta} + z_1\right) \tag{1.10}$$

К этим уравнениям, справедливым всюду в области D_0, следует добавить еще соотношения, выполненные на свободной границе возмущенного течения

$$p = \mathrm{const}, \qquad (dz\,/\,dt)_n = (\bar{w})_n \tag{1.11}$$

Линеаризуя соотношения (1.11) при помощи (1.9) и используя (1.10), получим

$$\operatorname{Re}\left(\frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{w_1}{\zeta}\right) = 0, \quad \operatorname{Im}\left(\zeta\frac{\partial z_1}{\partial t} - i\zeta^2\frac{\partial z_1}{\partial \zeta} + \frac{w_1}{\zeta}\right) = 0 \tag{1.12}$$

Соотношения (1.12) выполнены на границе возмущенного течения, т. е. в силу (1.8), на окружности $|\zeta| = 1$.

К соотношениям (1.12) следует еще добавить условия на стенке

$$\operatorname{Im} f_1 = 0, \qquad \operatorname{Im}(\zeta z_1) = 0 \text{ при } |\zeta| = r \tag{1.13}$$

Из (1.13) следует, что при $|\zeta| = r$ справедливо второе соотношение (1.12). Тогда

$$\zeta\frac{\partial z_1}{\partial t} - i\zeta^2\frac{\partial z_1}{\partial \zeta} + \frac{w_1}{\zeta} = b(t) \tag{1.14}$$

где $b(t)$ — вещественная функция времени.

Наличие произвола в выборе правой части (1.14) связано с тем, что (1.14) допускает частное решение

$$z_1 = \frac{1}{\zeta}\int_0^t b(\tau)\,d\tau$$

которое представляет собой поворот всей области D_0 вокруг $z_0 = 0$. Оно появляется в силу того, что отображение $D_0 \to D_t$ определено в (1.8) с точностью до поворота D_0. Поэтому, чтобы нормировать отображение, положим $b(t) = 0$. Тогда из (1.10), (1.12) и (1.14) при $b(t) = 0$ получаем

$$\operatorname{Im}\left(i\frac{\partial^2 f_1}{\partial t^2} + 2\zeta\frac{\partial^2 f_1}{\partial t\partial \zeta} - i\zeta^2\frac{\partial^2 f_1}{\partial \zeta^2}\right) = 0, \quad \text{при } |\zeta| = 1 \tag{1.15}$$

Последнее условие вместе с соотношениями (1.12) при $|\zeta| = 1$ и соотношением

$$\operatorname{Im} f_1 = 0 \quad \text{при } |\zeta| = r \tag{1.16}$$

полностью определяет решение задачи.

Пусть в начальный момент времени $t = 0$ известны функции $f_1(\zeta, 0)$ и $z_1(\zeta, 0)$, заданные своим разложением в ряд Лорана в области годографа (1.2)

$$f_1(\zeta, 0) = \sum_{n\neq 0} s_n\zeta^n, \qquad s_{-n} = \bar{s}_n r^{2n} \tag{1.17}$$

$$z_1(\zeta, 0) = \sum_{n\neq 0} q_n\zeta^{n-1}, \qquad q_{-n} = \bar{q}_n r^{2n}$$

Начальные возмущения удовлетворяют условиям (1.13) и (1.7). Решение задачи будем искать в виде разложения в ряды Лорана в кольце (1.2). Удовлетворяя соотношениям (1.12), (1.15) — (1.17) и (1.14) при $b(t) = 0$ получаем

$$\begin{pmatrix} f_1(\zeta, t) \\ z_1(\zeta, t) \end{pmatrix} = \sum_{n\neq 0} \left\{ P_n \begin{pmatrix} \zeta^n \\ \varkappa_n^{-1}\zeta^{n-1} \end{pmatrix} e^{\lambda_n t} + Q_n \begin{pmatrix} \zeta^n \\ -\varkappa_n^{-1}\zeta^{n-1} \end{pmatrix} e^{\mu_n t} \right\} \tag{1.18}$$

$$P_n = {}^1/_2 (s_n + q_n\varkappa_n), \qquad Q_n = {}^1/_2 (s_n - q_n\varkappa_n)$$

$$\lambda_n = in(1 + \varkappa_n), \qquad \mu_n = in(1 - \varkappa_n)$$

$$\varkappa_n = n^{-1/2} \left(\frac{1 - r^{2n}}{1 + r^{2n}} \right)^{1/2}$$

Полученные формулы позволяют решить вопрос, какую гладкость нужно потребовать от начальных данных для того, чтобы сходились ряды (1.18), чтобы на границах D_0 существовали и были непрерывны производные

$$dz_1/dt, \ d^2f_1/dt^2, \ dz_1/d\zeta, \ d^2f_1/d\zeta^2$$

а смещение $\delta(\theta)$ имело малую кривизну. Именно, достаточно, чтобы $f_1(z_0, 0) \in C^4(D_0)$, $z_1(z_0, 0) \in C^3(D_0)$. Используя лемму Привалова [2], можно ослабить требования на гладкость начальных данных, т. е. можно показать, что достаточно потребовать, чтобы

$$\frac{\partial^3 f_1(e^{i\theta}, 0)}{\partial\theta^3}, \qquad \frac{\partial^2 z_1(e^{i\theta}, 0)}{\partial\theta^2}$$

удовлетворяли условию Гельдера равномерно на окружности $|z_0| = 1$.

Разложение (1.18) дает решение вопроса об устойчивости к малым потенциальным возмущениям рассмотренного выше течения. Это течение нейтрально устойчиво, имеет дискретный спектр чисто мнимых собственных значений λ_n и μ_n. Система собственных функций (в скобках правой части (1.18)) полна в пространстве начальных данных (1.17).

Устойчивость течения связана со стабилизирующим влиянием центробежной силы, которая снимает линейный по t рост возмущений на свободной поверхности. В самом деле, если кольцевую стенку поместить внутри, а свободную границу снаружи ($r > 1$), то течение будет абсолютно неустойчивым.

2. Свободный полый вихрь. Рассмотрим случай бесконечно удаленных стенок, являющийся предельным при $r \to 0$ для течения, описанного в п.1. В этом случае область D_0 — внешность единичного круга $|z_0| \geqslant 1$, область годографа — единичный круг с выколотой точкой $\zeta = 0$. Функция $f_1(z_0, 0)$ считается ограниченной в бесконечно удаленной точке, а для $z_1(z_0, 0)$ предполагается выполненным условие (1.7), что эквивалентно требованию $p_1(z_0, 0) \to 0$ при $|z_0| \to \infty$.

В данном случае существует конформное отображение $D_0 \to D_t$ (не обязательно в первом приближении), а уравнения на возмущения выписываются особенно просто. Именно, уравнение (1.15) продолжается (поскольку входящие в него функции ограничены) внутрь единичного круга и принимает вид

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial t^2} - 2i\,\frac{\partial^2 f_1}{\partial t \partial \zeta} + \zeta^2\,\frac{\partial^2 f_1}{\partial \zeta^2} = 0 \quad \text{при } |\zeta| \leqslant 1 \qquad (2.1)$$

Из соотношений (1.12) находим, что

$$\partial f_1 / \partial t = -w_1 \zeta^{-1} \quad \text{при } |\zeta| \leqslant 1$$

Отсюда

$$\left.\frac{\partial f_1}{\partial t}\right|_{t=0} = i\zeta\left(\frac{\partial f_1(\zeta, 0)}{\partial \zeta} + z_1(\zeta, 0)\right)$$

Зная $f_1(\zeta, 0)$ и $\partial f_1(\zeta, 0)/\partial t$, из уравнения (2.1) можно найти $f_1(\zeta, t)$, а затем, интегрируя (1.14) при $b(t) = 0$, найти $z_1(\zeta, t)$.

Неизвестные функции в этом случае ищутся в виде разложений в ряды Тейлора. Формулы, дающие решение задачи, получаются предельным переходом при $r \to 0$ из (1.18).

Следует заметить, что все утверждения п.1 справедливы и в этом предельном случае.

Автор благодарит С. К. Годунова и Э. Э. Шноля за обсуждение результатов работы.

Поступила 22 VII 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Fox J. L., Morgan G. W. On the stability of some flows of ideal fluid with free surfaces. Quart. Appl. Math. 1954, vol. 11, No. 4.
2. Курант Р. Уравнение с частными производными. М., «Мир»., 1964.