Прикладная математика и механика. Том 36, 1972

УДК 531.35+531.37

# ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕКОТОРЫХ ДВИЖЕНИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА С УПРУГИМИ СТЕРЖНЯМИ И ЖИДКОСТЬЮ

В. Н. Рубановский

(Москва)

Рассматривается движение свободного твердого тела с тремя парами упругих стержней и полостью, содержащей жидкость, в двух случаях: в центральном ньютоновом поле сил и при отсутствии внешних сил. Применением теоремы В. В. Румянцева [1] получены достаточные условия устойчивости относительного равновесия на круговой орбите и равномерных вращений этой системы. Показано, что наличие в полости жидкости со свободной поверхностью и присоединение к телу упругих стержней оказывает дестабилизирующее влияние на устойчивость соответствующих невозмущенных движений неизменяемой системы. Указаны также достаточные условия устойчивости в случаях, когда к телу присоединено меньше, чем три пары стержней. Полученные условия устойчивости при большом модуле Юнга переходят (в случае отсутствия жидкости) в известные достаточные условия устойчивости твердого тела.

Условия устойчивости для случая, когда к телу присоединена одна пара стержней, а жидкость отсутствует, сопоставлены с полученными в [2, 3] условиями устойчивости. В связи с утверждением в [2, 3] о новизне использованного метода отметим, что этот метод был ранее разработан В. В. Румянцевым и применен для решения ряда задач об устойчивости стационарных движений твердого тела с жидким наполнением [4].

1. Рассмотрим в центральном ньютоновом поле сил движение твердого тела, имеющего полость произвольной формы, целиком или частично заполненную однородной несжимаемой идеальной жидкостью, и несущего на себе некоторое число упругих тонких нерастяжимых стержней, каждый из которых имеет постоянное поперечное сечение и две плоскости симметрии. Пренебрегая влиянием относительного движения системы на движение ее центра масс, будем считать, что последний равномерно движется по кеплеровой круговой орбите с угловой скоростью $\Omega$.

Введем правые прямоугольные системы осей координат: орбитальную $Cxyz$ с началом в центре $C$ масс системы и осями, направленными по касательной, бинормали и радиус-вектору орбиты, соответственно, и связанную $Ox_1x_2x_3$, имеющую начало в центре $O$ масс твердого тела и оси, направленные по осям его центрального эллипсоида инерции. Пусть $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$ — единичные векторы, направленные по осям $x_1$, $x_2$, $x_3$. Орты осей $y$ и $z$ обозначим через $\boldsymbol{\beta}$ и $\boldsymbol{\gamma}$, а их проекции на оси $x_1$, $x_2$, $x_3$ — через $\beta_1$, $\beta_2$, $\beta_3$ и $\gamma_1$, $\gamma_2$, $\gamma_3$. Эти величины связаны равенствами

$$\chi_1 \equiv \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 - 1 = 0, \qquad \chi_2 \equiv \gamma_1\beta_1 + \gamma_2\beta_2 + \gamma_3\beta_3 = 0$$
$$\chi_3 \equiv \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 - 1 = 0 \tag{1.1}$$

Будем считать, что одна, две или три пары упругих стержней длины $l$ защемлены в теле на одинаковых расстояниях $a$ от точки $O$ и в недеформированном состоянии расположены по осям $x_1$, $x_2$, $x_3$. При этом координатные плоскости служат плоскостями симметрии стержней. Отнесем индексы 1—3 и 4—6 стержням, расположенным вдоль положительных и отрицательных направлений осей $x_1$, $x_2$, $x_3$ соответственно. Обозначим через

$$\mathbf{u}_j(s, t) = u_{1j}\mathbf{i}_1 + u_{2j}\mathbf{i}_2 + u_{3j}\mathbf{i}_3, \qquad 0 \leqslant s \leqslant l, \quad t \geqslant t_0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, 6)$$

вектор упругого перемещения точек оси $j$-го стержня.

Условие нерастяжимости стержней приводит к соотношениям [5]

$$u'_{11} = -{}^1/_2(u'^2_{21} + u'^2_{31}), \quad u'_{22} = -{}^1/_2(u'^2_{32} + u'^2_{12}), \quad u'_{33} = -{}^1/_2(u'^2_{13} + u'^2_{23}) \tag{1.2}$$

$$u'_{14} = {}^1/_2(u'^2_{24} + u'^2_{34}), \quad u'_{25} = {}^1/_2(u'^2_{35} + u'^2_{15}), \quad u'_{36} = {}^1/_2(u'^2_{16} + u'^2_{26})$$

$$u' = \partial u / \partial s$$

Условие защемления в теле концов стержней приводит к граничным условиям

$$u_{ij} = u_{i,\,3+j} = 0, \quad u'_{ij} = u'_{i,\,3+j} = 0 \qquad (i, j = 1, 2, 3;\ i \neq j) \text{ при } s = 0 \tag{1.3}$$

Из (1.2) следует, что $u_{ii}$, $u_{i,3+i}$ $(i = 1,2,3)$ — величины второго порядка малости, если за величины первого порядка приняты $u_{ij}$, $u_{i,3+j}$ и их первые производные $u'_{ij}$, $u'_{i,3+j}$ $(i, j = 1, 2, 3;\ i \neq j)$. Заметим, что равенства (1.2) представляют условие нерастяжимости стержней лишь с точностью до членов второго порядка малости относительно указанных величин.

Для потенциальной энергии $\Pi_d$ упругой деформации примем выражение [5]

$$\Pi_d = \frac{1}{2} E \int_0^l (I_{31}u''^2_{21} + I_{21}u''^2_{3} + I_{12}u''^2_{32} + I_{32}u''^2_{12} + I_{23}u''^2_{13} + I_{13}u''^2_{23} + \tag{1.4}$$

$$+ I_{34}u''^2_{24} + I_{24}u''^2_{34} + I_{15}u''^2_{35} + I_{35}u''^2_{15} + I_{26}u''^2_{16} + I_{13}u''^2_{26})\, ds$$

Здесь $E$ — модуль Юнга, $I_{ij}$ — момент инерции поперечного сечения $j$-го стержня относительно прямой, проведенной через центр тяжести сечения параллельно оси $x_i$, $EI_{ij}$ — жесткости на изгиб.

Положение какой-либо точки системы относительно осей координат $Ox_1\, x_2\, x_3$ будем определять ее радиус-вектором $\mathbf{r}$. Для точек стержней $\mathbf{r} = \mathbf{r}^\circ + \mathbf{w}(\mathbf{r}^\circ, t)$, где $\mathbf{w}(\mathbf{r}^\circ, t)$ — вектор упругого перемещения точки стержня, положение которой до деформации определялось радиус-вектором $\mathbf{r}^\circ$.

Потенциальная энергия $\Pi_g$ сил притяжения, вычисленная с точностью до членов порядка $L^3 R_c^{-3}$, где $L$ — характерный линейный размер тела, а $R_c$ — радиус орбиты, определяется по формуле

$$\Pi_g = {}^1/_2\, \Omega^2 (3\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\Theta}^c \cdot \boldsymbol{\gamma} - \operatorname{sp} \boldsymbol{\Theta}^c)$$

где $\Theta^c$ — тензор инерции системы для точки $C$ с компонентами

$$\vartheta_{11} = J_1 - M(x_{2c}^2 + x_{3c}^2) + \sigma\rho_1 \int_0^l \Big\{u_{21}^2 + u_{31}^2 + u_{24}^2 + u_{34}^2 + u_{32}^2 + u_{35}^2 + u_{23}^2 +$$

$$+ u_{26}^2 - \left[a(l-s) + \frac{1}{2}(l^2 - s^2)\right](u_{32}'^2 + u_{12}'^2 + u_{35}'^2 + u_{15}'^2 + u_{13}'^2 + u_{23}'^2 + u_{16}'^2 +$$

$$+ u_{26}'^2)\Big\} ds + \rho_2 \int_\tau (x_2^2 + x_3^2)\, d\tau \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 \ldots & 6 \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

$$\vartheta_{23} = Mx_{2c}x_{3c} - \sigma\rho_1 \int_0^l [(a+s)(u_{32} - u_{35} + u_{23} - u_{26}) + u_{21}u_{31} + u_{24}u_{34}]\, ds -$$

$$- \rho_2 \int_\tau x_2 x_3 d\tau \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 \ldots & 6 \end{pmatrix}'$$

Здесь $M$ — масса системы, $J_i$ — главные центральные моменты инерции твердого тела с недеформированными стержнями, $\sigma$ — площадь поперечного сечения стержней, $\rho_1$ и $\rho_2$ — плотности стержней и жидкости, $\tau$ — область пространства $Ox_1x_2x_3$, занимаемая в текущий момент времени жидкостью, $x_{ic}$ — компоненты радиус-вектора центра $C$ масс системы относительно точки $O$, вычисляемые по формулам

$$Mx_{1c} = \sigma\rho_1 \int_0^l (u_{12} + u_{15} + u_{13} + u_{16})\, ds + \rho_2 \int_\tau x_1 d\tau \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 \ldots & 6 \end{pmatrix} \tag{1.6}$$

Символ $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 \ldots & 6 \end{smallmatrix}\right)$ справа в общем случае означает, что для получения двух других формул в приведенном выражении следует индексы у величин $x_{ic}$, $\gamma_i$, $\beta_i$, $J_i$, $\vartheta_{ij}$ и первые индексы у постоянных $I_{ij}$ и функций $u_{ij}$ вместе с их производными изменить, согласно циклической перестановке (1 2 3), а вторые индексы у постоянных $I_{ij}$ и функций $u_{ij}$ и их производных,— согласно перестановке (1 2 ...6); штрих над этим символом означает, что при изменении у функций $u_{ij}$ и их производных второго индекса с трех на четыре, и с шести на один знак перед ними следует изменить на обратный.

В (1.5) и (1.6) $x_{ic}$ вычислены с точностью до членов первого порядка малости относительно величины $u_{ij}$, $u_{i,3+j}$ $(i, j = 1, 2, 3;\ i \neq j)$, а $\vartheta_{ij}$ — с точностью до членов второго порядка относительно тех же величин и их производных.

Для кинетической энергии $T$ системы в ее движении относительно орбитальной системы осей координат имеем выражение

$$T = \frac{1}{2}\omega\cdot\Theta^c\cdot\omega + \omega\cdot\int_M (\mathbf{r} - \mathbf{r}_c)\times(\dot{\mathbf{r}} - \dot{\mathbf{r}}_c)\, dm + \frac{1}{2}\int_M (\dot{\mathbf{r}} - \dot{\mathbf{r}}_c)^2 dm \left(\dot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}\right) \tag{1.7}$$

где $\omega = \omega_1\mathbf{i}_1 + \omega_2\mathbf{i}_2 + \omega_3\mathbf{i}_3$ — вектор относительной угловой скорости тела, $dm$ — элемент массы системы.

Рассматриваемая механическая система допускает обобщенный интеграл энергии $T + W = \text{const}$, где $W$ — измененная потенциальная энергия системы

$$W = {}^1/_2\, \Omega^2 [3\gamma\cdot\Theta^c\cdot\gamma - \beta\cdot\Theta^c\cdot\beta - \operatorname{sp}\Theta^c] + \Pi_d$$

Так как $\gamma_i$, $\beta_i$ связаны соотношениями (1.1), то вместо $W$ ниже будем рассматривать функционал

$$W_* = W - {}^1/_2\,\Omega^2\,(\pi_1\chi_1 + 2\pi_2\chi_2 + \pi_3\chi_3)$$

где $\pi_1$, $\pi_2$, $\pi_3$ — неопределенные множители Лагранжа.

**2.** Найдем положения относительного равновесия системы. Уравнения относительного равновесия, естественные граничные условия и уравнение свободной поверхности $S$ жидкости в положении относительного равновесия системы получим из принципа возможных перемещений, вычислив и приравняв нулю первую вариацию $\delta W_*$ функционала $W_*$. Они имеют вид

$$(3\vartheta_{11} - \pi_1)\gamma_1 + 3\,(\vartheta_{12}\gamma_2 + \vartheta_{13}\gamma_3) - \pi_2\beta_1 = 0 \quad (1\ 2\ 3) \tag{2.1}$$

$$(\vartheta_{11} + \pi_3)\beta_1 + \vartheta_{12}\beta_2 + \vartheta_{13}\beta_3 + \pi_2\,\gamma_1 = 0 \quad (1\ 2\ 3)$$

$$(\beta_2^2 - 3\gamma_2^2)\ (u_{21} - x_{2c}) + (\beta_2\beta_3 - 3\gamma_2\gamma_3)\ (u_{31} - x_{3c}) + (\beta_1\beta_2 - 3\gamma_1\gamma_2) \times$$
$$\times (a + s - x_{1c}) + (\beta_1^2 - 3\,\gamma_1^2)\,\{[a(l - s) + {}^1/_2\,(l^2 - s^2)]u'_{21}\}' + E_*I_{31}\Omega^{-2} \times$$
$$\times\, u_{21}^{\mathrm{IV}} = 0\ ({}_1^1{}_2^2 \ldots {}_6^3)$$

$$(\beta_3^2 - 3\,\gamma_3^2)(u_{31} - x_{3c}) + (\beta_2\beta_3 - 3\gamma_2\gamma_3)\,(u_{21} - x_{2c}) + (\beta_3\beta_1 - 3\gamma_3\gamma_1) \times$$
$$\times (a + s - x_{1c}) + (\beta_1^2 - 3\gamma_1^2)\,\{[a\,(l - s) + {}^1/_2\,(l^2 - s^2)]\ u_{31}'\}' + E_*I_{21} \times$$
$$\times\, \Omega^{-2}\ u_{31}^{\mathrm{IV}} = 0\ ({}_1^1{}_2^2 \ldots {}_6^3) \tag{2.2}$$

$$(\beta_2^2 - 3\gamma_2^2)\,(u_{24} - x_{2c}) + (\beta_2\beta_3 - 3\gamma_2\gamma_3)\,(u_{34} - x_{3c}) - (\beta_1\beta_2 - 3\gamma_1\gamma_2) \times$$
$$\times\ (a + s + x_{1c}) + (\beta_1^2 - 3\gamma_1^2)\ \{[a\,(l - s) + {}^1/_2\,(l^2 - s^2)]u_{24}'\}' + E_*I_{34} \times$$
$$\times\, \Omega^{-2}u_{24}^{\mathrm{IV}} = 0\ ({}_1^1{}_2^2 \ldots {}_6^3)$$

$$(\beta_3^2 - 3\gamma_3^2)\ (u_{34} - x_{3c}) + (\beta_2\beta_3 - 3\gamma_2\gamma_3)\ (u_{24} - x_{2c}) - (\beta_3\beta_1 - 3\gamma_3\gamma_1) \times$$
$$\times (a + s + x_{1c}) + (\beta_1^2 - 3\gamma_1^2)\,\{[a\,(l - s) + {}^1/_2\,(l^2 - s^2)]u_{34}'\}' + E_*I_{24} \times$$
$$\times\, \Omega^{-2}u_{34}^{\mathrm{IV}} = 0\ ({}_1^1{}_2^2 \ldots {}_6^3)\ (E = E_*\sigma\rho_1)$$

$$u''_{21} = u''_{31} = u''_{24} = u''_{34} = 0,\ u'''_{21} = u'''_{31} = u'''_{24} = u'''_{34} = 0 \quad \begin{pmatrix} 1\ 2\ 3 \\ 1\ 2 \ldots 6 \end{pmatrix} \quad \text{при } s = l \tag{2.3}$$

$$U \equiv 3\,[(\mathbf{r} - \mathbf{r}_c)\cdot\boldsymbol{\gamma}]^2 - [(\mathbf{r} - \mathbf{r}_c)\cdot\boldsymbol{\beta}]^2 = c = \mathrm{const} \tag{2.4}$$

В уравнении (2.4) значение постоянной $c$ определяется количеством жидкости в полости тела. По отношению к поверхности (2.4) жидкость располагается с той ее стороны, для которой $U > c$.

В орбитальной системе осей координат уравнение (2.4) свободной поверхности $S$ жидкости записывается в виде

$$U \equiv 3z^2 - y^2 = c$$

и представляет собой поверхность гиперболического цилиндра с образующей, параллельной касательной к орбите.

**3.** Уравнения (2.1), (2.2) и граничные условия (1.3), (2.3) допускают решение

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \beta_1 = \beta_3 = 0, \quad \gamma_3 = \beta_2 = 1, \quad u_{ij} = u_{i,\,3+j} \equiv 0 \quad (i,\ j = 1,2,\ 3;\ i \neq j)$$

$$\pi_1 = 3\vartheta_{33}^\circ, \quad \pi_2 = 0,\ \pi_3 = -\,\vartheta_{22}^\circ \tag{3.1}$$

Уравнение свободной поверхности $S^\circ$ жидкости имеет вид

$$U \equiv 3x_3^2 - x_2^2 = c^\circ \tag{3.2}$$

Это решение существует при выполнении условий $\overset{\circ}{\vartheta}_{23} = \overset{\circ}{\vartheta}_{31} = \overset{\circ}{\vartheta}_{12} = 0$, $\overset{\circ}{x}_{2c} = \overset{\circ}{x}_{3c} = 0$. Верхний нулевой индекс указывает, что соответствующая величина вычисляется для решения (3.1).

Принимая движение (3.1) за невозмущенное, исследуем его устойчивость. Для простоты вычислений будем считать, что $\overset{\circ}{x}_{1c} = 0$.

Достаточные условия устойчивости получим из теоремы [1], как достаточные условия положительной определенности второй вариации $\delta^2 W_*$ для решения (3.1) в метрике, по отношению к которой функционал $W_*$ непрерывен.

В возмущенном движении положим $\gamma_3 = 1 + \delta\gamma_3$, $\beta_2 = 1 + \delta\beta_2$, а для остальных величин сохраним прежние обозначения. В окрестности решения (3.1) соотношения (1.1) в первом приближении приводят к равенствам $\delta\gamma_3 = \delta\beta_2 = 0$. Поэтому при вычислении $\delta^2 W_*$ формально можно считать $\beta_2 = \gamma_3 = 1$; тогда для $\delta^2 W_*$ получим выражение

$$\begin{aligned}
\delta^2 W_* &= \Omega^2 [(\overset{\circ}{\vartheta}_{22} - \overset{\circ}{\vartheta}_{11})\beta_1^2 + 3(\overset{\circ}{\vartheta}_{11} - \overset{\circ}{\vartheta}_{33})\gamma_1^2 + 4(\overset{\circ}{\vartheta}_{22} - \overset{\circ}{\vartheta}_{33})\gamma_2^2] + \\
&+ M\Omega^2(3x_{3c}^2 - x_{2c}^2) + 2\Pi_d + 2\Omega^2\sigma\rho_1 \int_0^l (a + s)[\beta_1(u_{21} - u_{24} + u_{12} - u_{15}) - \\
&- 3\gamma_1(u_{13} - u_{16} + u_{31} - u_{34}) - 4\gamma_2(u_{32} - u_{35} + u_{23} - u_{26})]\, ds + \\
&+ \Omega^2\sigma\rho_1 \int_0^l \Big\{u_{21}^2 + u_{24}^2 + u_{23}^2 + u_{26}^2 - 3(u_{31}^2 + u_{34}^2 + u_{32}^2 + u_{35}^2) + \\
&+ \Big[a(l - s) + \frac{1}{2}(l^2 - s^2)\Big][3(u_{13}'^2 + u_{16}'^2 + u_{23}'^2 + u_{26}'^2) - \\
&- (u_{12}'^2 + u_{15}'^2 + u_{32}'^2 + u_{35}'^2)]\Big\}\, ds + \Omega^2\Gamma_2
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Здесь $\Gamma_2$ — квадратичная относительно $\beta_1$, $\gamma_1$, $\gamma_2$, $u_{ij}$ часть выражения

$$\Gamma = -\rho_2 \int_{\Delta\tau} \sum_{(1\,2\,3)} [(3\gamma_1^2 - \beta_1^2)x_1^2 + 2(3\gamma_2\gamma_3 - \beta_2\beta_3)x_2x_3]\big|_{\beta_2=\gamma_3=1} d\tau \tag{3.4}$$

Интеграл по области $\Delta\tau$ следует понимать как

$$\int_{\Delta\tau} \Phi\, d\tau = \int_{\tau} \Phi\, d\tau - \int_{\tau^\circ} \Phi\, d\tau$$

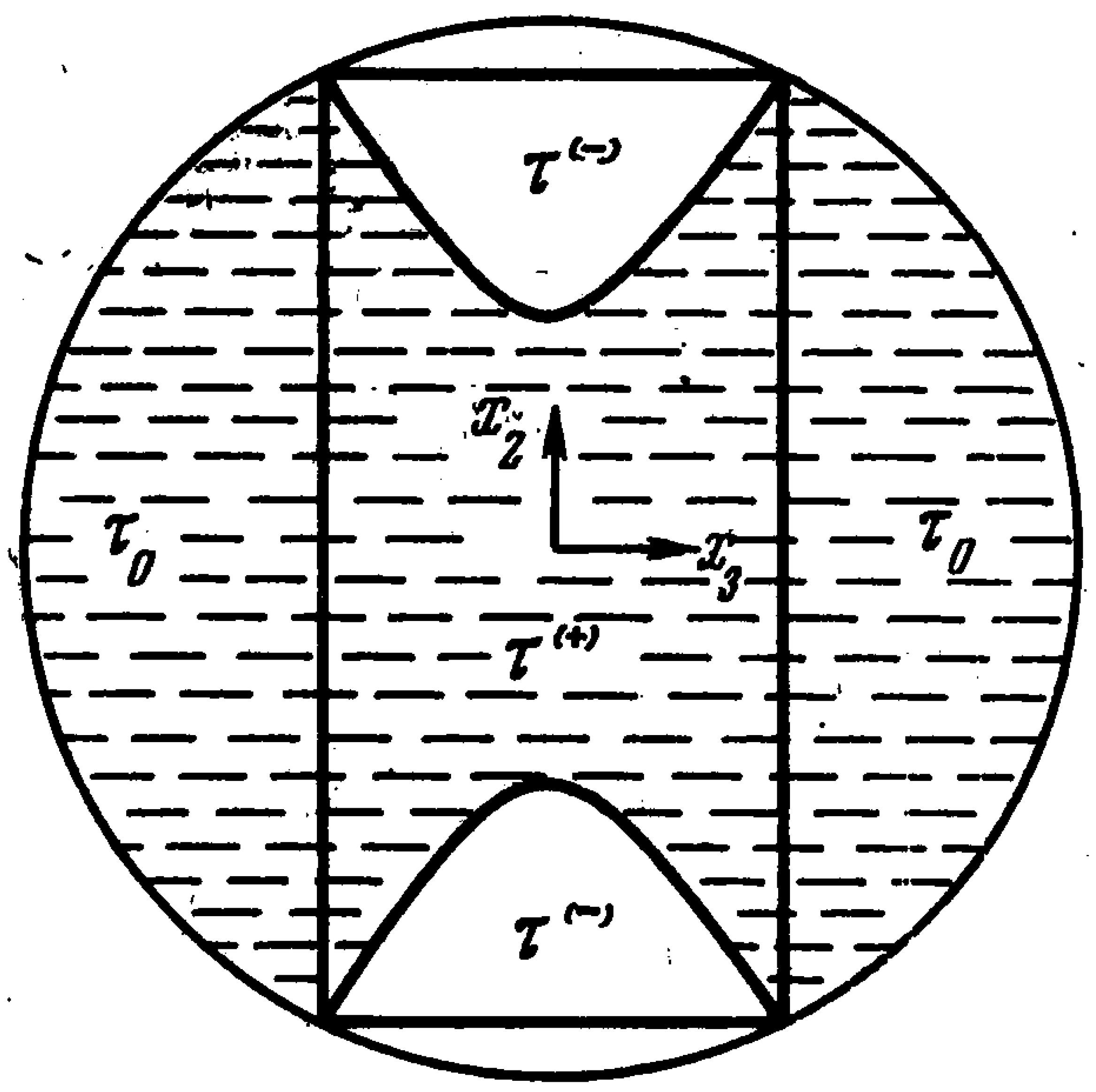
где $\tau^\circ$ и $\tau$ — занимаемые жидкостью при невозмущенном и возмущенном движениях системы области пространства $Ox_1x_2x_3$, ограниченные смачиваемой частью поверхности полости и соответственно частями $S^\circ$ и $S$ поверхностей (3.2) и (2.4), заключенных внутри полости тела; при этом в (2.4) $c = c^\circ + 2\Delta c$, а значение постоянной $\Delta c$ определяется из условия равенства объемов областей $\tau^\circ$ и $\tau$. Отметим, что поверхности $S^\circ$ и $S$ могут состоять из нескольких кусков.

Соотношения

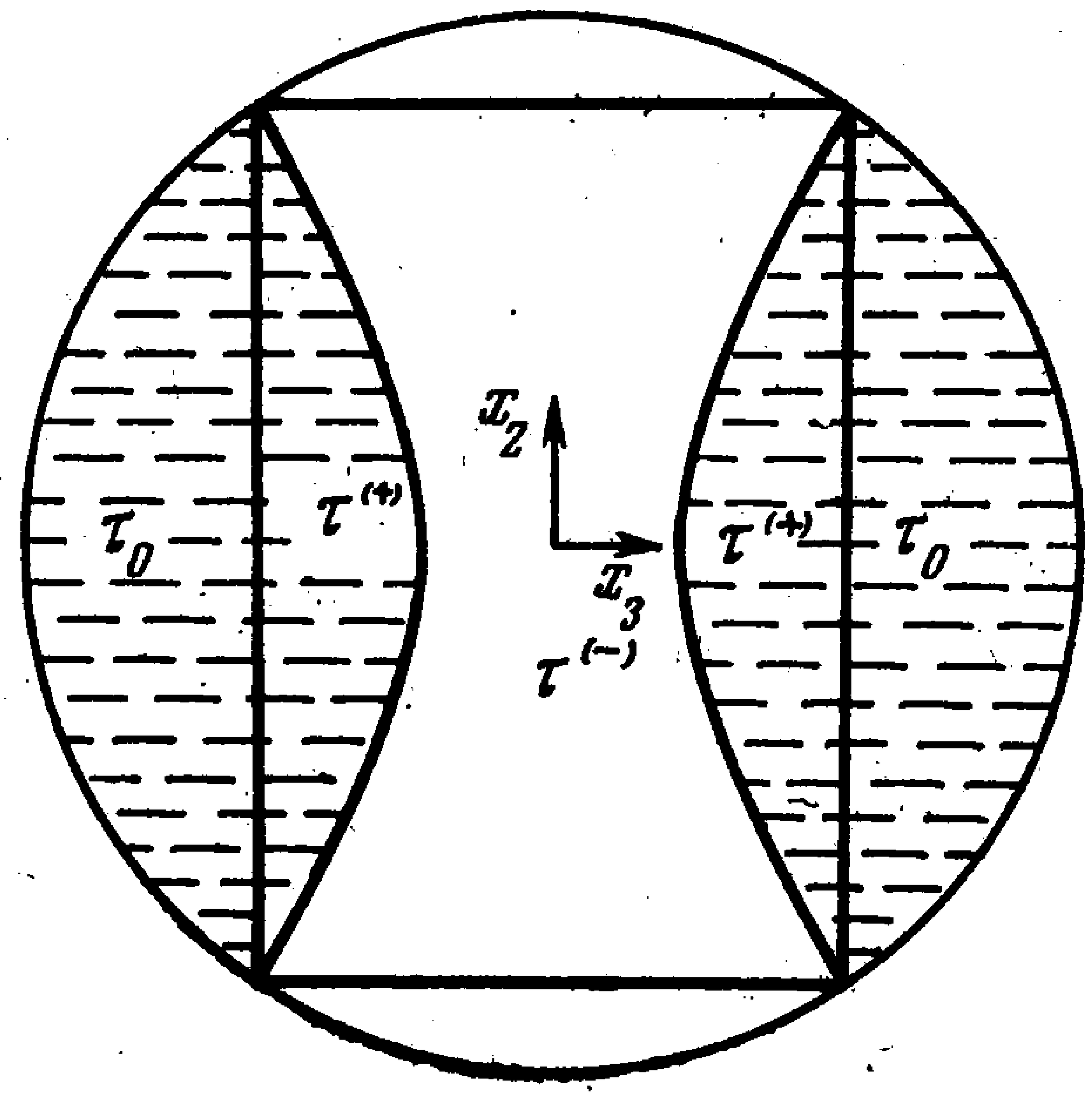
$$Mx_{2c} = \sigma\rho_1 \int_0^l (u_{23} + u_{26} + u_{21} + u_{24})\, ds + \rho_2 \int_{\Delta\tau} x_2 d\tau$$

$$Mx_{3c} = \sigma\rho_1 \int_0^l (u_{31} + u_{34} + u_{32} + u_{35})\, ds + \rho_2 \int_{\Delta\tau} x_3 d\tau$$

вместе с условием равенства объемов областей $\tau^\circ$ и $\tau$ представляют систему трех уравнений для определения трех величин $x_{2c}$, $x_{3c}$, $\Delta c$ как функций от $\beta_1$, $\gamma_1$, $\gamma_2$, $u_{ij}$. Если поверхность $S^\circ$ обладает тремя плоскостями симметрии




*а*




*б*

и ими служат координатные плоскости $x_2x_3$, $x_3x_1$, $x_1x_2$, то указанные уравнения значительно упрощаются и дают

$$x_{2c} = M_1 x_{2c}^{(1)} (M - M^{(+)})^{-1}, \quad x_{3c} = M_1 x_{3c}^{(1)} (M + M^{(-)})^{-1}, \quad \Delta c = 0 \tag{3.5}$$

после чего из (3.4) получим

$$\Gamma_2 = -J_{23}^{(+)}\beta_1^2 - 3J_{23}^{(-)}\gamma_1^2 - 16J_{12}^{(+)}\gamma_2^2 + M^{(+)}(M - M^{(+)})^{-2}(M_1x_{2c}^{(1)})^2 + \\ + 3M^{(-)}(M + M^{(-)})^{-2}(M_1x_{3c}^{(1)})^2 \tag{3.6}$$

$$M_1 x_{2c}^{(1)} = \sigma\rho_1 \int_0^l (u_{21} + u_{24} + u_{23} + u_{26})\, ds, \quad M_1 x_{3c}^{(1)} = \sigma\rho_1 \int_0^l (u_{31} + u_{34} + u_{32} + u_{35})\, ds$$

$$M^{(+)} = \rho_2 \int_{S^\circ} \frac{x_2^2 dS}{\sqrt{9x_3^2 + x_2^2}} = \rho_2 \int_{S_{31}^\circ} |x_2|\, dx_3 dx_1 = \rho_2 \int_{\tau^{(+)}} d\tau$$

$$M^{(-)} = \rho_2 \int_{S^\circ} \frac{3x_3^2 dS}{\sqrt{9x_3^2 + x_2^2}} = \rho_2 \int_{S_{12}^\circ} |x_3|\, dx_1 dx_2 = \rho_2 \int_{\tau^{(-)}} d\tau$$

$$J_{12}^{(+)} = \rho_2 \int_{S^\circ} \frac{x_2^2 x_3^2 dS}{\sqrt{9x_3^2 + x_2^2}} = \rho_2 \int_{\tau^{(+)}} x_3^2 d\tau, \quad J_{23}^{(+)} = \rho_2 \int_{S^\circ} \frac{x_1^2 x_2^2 dS}{\sqrt{9x_3^2 + x_2^2}} = \\ = \rho_2 \int_{\tau^{(+)}} x_1^2 d\tau$$

$$J_{23}^{(-)} = \rho_2 \int_{S^\circ} \frac{3x_3^2 x_1^2 dS}{\sqrt{9x_3^2 + x_2^2}} = \rho_2 \int_{\tau^{(-)}} x_1^2 d\tau$$

Здесь $M_1$ — масса стержней, $\overset{\circ}{S}_{12}$ и $\overset{\circ}{S}_{31}$ — проекции поверхности $S^\circ$ на плоскости $x_1x_2$ и $x_3x_1$, а $\tau^{(+)}$ и $\tau^{(-)}$ — области пространства $Ox_1x_2x_3$, смысл которых очевиден. На фигуре эти области указаны для случая цилиндрической полости с образующей, параллельной оси $x_1$. Величины $M^{(+)}$ и $M^{(-)}$ представляют массы, которые имела бы жидкость, если бы она занимала соответственно области $\tau^{(+)}$ и $\tau^{(-)}$; $J_{23}^{(-)}$ — момент инерции относительно плоскости $x_2x_3$ жидкости, заполняющей область $\tau^{(-)}$, а $J_{12}^{(+)}$ и $J_{23}^{(+)}$ — моменты инерции относительно плоскостей $x_1x_2$ и $x_2x_3$ жидкости в области $\tau^{(+)}$. Величины $M^{(+)}$, $M^{(-)}$, $J_{23}^{(-)}$, $J_{23}^{(+)}$, $J_{12}^{(+)}$, обусловленные наличием свободной поверхности жидкости, можно было бы назвать присоединенными массами и присоединенными моментами инерции.

Подставляя (3.5) и (3.6) в (3.3) представим $\delta^2 W_*$ в виде

$$\begin{aligned}\delta^2 W_* = {} & \Omega^2 (\overset{\circ}{\vartheta}_{22} - \overset{\circ}{\vartheta}_{11} - J_{23}^{(+)})^{-1} \Big\{ (\overset{\circ}{\vartheta}_{22} - \overset{\circ}{\vartheta}_{11} - J_{23}^{(+)}) \beta_1 + \\ & + \sigma\rho_1 \int_0^l (a+s)(u_{21} - u_{24} + u_{12} - u_{15})\, ds \Big\}^2 + \\ & + 3\Omega^2 (\overset{\circ}{\vartheta}_{11} - \overset{\circ}{\vartheta}_{33} - J_{23}^{(-)})^{-1} \Big\{ (\overset{\circ}{\vartheta}_{11} - \overset{\circ}{\vartheta}_{33} - J_{23}^{(-)}) \gamma_1 - \\ & - \sigma\rho_1 \int_0^l (a+s)(u_{13} - u_{16} + u_{31} - u_{34})\, ds \Big\}^2 + \\ & + 4\Omega^2 (\overset{\circ}{\vartheta}_{22} - \overset{\circ}{\vartheta}_{33} - 4J_{12}^{(+)})^{-1} \Big\{ (\overset{\circ}{\vartheta}_{22} - \overset{\circ}{\vartheta}_{33} - 4J_{12}^{(+)}) \gamma_2 - \\ & - \sigma\rho_1 \int_0^l (a+s)(u_{23} - u_{26} + u_{32} - u_{35})\, ds \Big\}^2 + 3\Omega^2 (M + M^{(-)})^{-1} (M_1 x_{3c}^{(1)})^2 + V\end{aligned} \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned}V(u) = {} & 2\Pi_d - \Omega^2 (M - M^{(+)})^{-1} \Big\{ \sigma\rho_1 \int_0^l (u_{21} + u_{24} + u_{23} + u_{26})\, ds \Big\}^2 - \\ & - \Omega^2 (\overset{\circ}{\vartheta}_{22} - \overset{\circ}{\vartheta}_{11} - J_{23}^{(+)})^{-1} \Big\{ \sigma\rho_1 \int_0^l (a+s)(u_{21} - u_{24} + u_{12} - u_{15})\, ds \Big\}^2 - \\ & - 3\Omega^2 (\overset{\circ}{\vartheta}_{11} - \overset{\circ}{\vartheta}_{33} - J_{23}^{(-)})^{-1} \Big\{ \sigma\rho_1 \int_0^l (a+s)(u_{13} - u_{16} + u_{31} - u_{34})\, ds \Big\}^2 - \\ & - 4\Omega^2 (\overset{\circ}{\vartheta}_{22} - \overset{\circ}{\vartheta}_{33} - 4J_{12}^{(+)})^{-1} \Big\{ \sigma\rho_1 \int_0^l (a+s)(u_{23} - u_{26} + u_{32} - u_{35})\, ds \Big\}^2 + \\ & + \Omega^2 \sigma\rho_1 \int_0^l \{ u_{21}^2 + u_{24}^2 + u_{23}^2 + u_{26}^2 - 3(u_{31}^2 + u_{34}^2 + u_{32}^2 + u_{35}^2) + \\ & + \Big[ a(l-s) + \frac{1}{2}(l^2 - s^2) \Big] [3(u_{13}'^2 + u_{16}'^2 + u_{23}'^2 + u_{26}'^2) - \\ & - (u_{12}'^2 + u_{15}'^2 + u_{32}'^2 + u_{35}'^2)] \}\, ds\end{aligned} \tag{3.8}$$

Пусть выполнены условия

$$\overset{\circ}{\vartheta}_2 - \overset{\circ}{\vartheta}_{11} - J_{23}^{(+)} > 0, \quad \overset{\circ}{\vartheta}_{11} - \overset{\circ}{\vartheta}_{33} - J_{23}^{(-)} > 0, \quad \overset{\circ}{\vartheta}_{22} - \overset{\circ}{\vartheta}_{33} - 4J_{12}^{(+)} > 0 \tag{3.9}$$

представляющие достаточные условия устойчивости положения относительного равновесия (3.1) твердого тела с недеформируемыми ($u_{ij} \equiv 0$) стержнями и жидкостью в его полости. Тогда, используя неравенства вида

$$\left\{\sigma\rho_1\int_0^l wds\right\}^2 \leqslant m\sigma\rho_1\int_0^l w^2ds, \left\{\sigma\rho_1\int_0^l (a+s)\,wds\right\}^2 \leqslant J\sigma\rho_1\int_0^l w^2ds$$

где $m = \sigma l\rho_1$ — масса одного стержня, а $J$ — его момент инерции относительно точки $O$, из (3.8) с учетом (1.4) получим неравенство

$$V(u) \geqslant \sigma\rho_1\int_0^l \{E_*(I_{31}u_{21}''^2 + I_{21}u_{31}''^2 + I_{12}u_{32}''^2 + I_{32}u_{12}''^2 + I_{23}u_{13}''^2 + I_{13}u_{23}''^2 + I_{31}u_{24}''^2 +$$
$$+ I_{24}u_{34}''^2 + I_{15}u_{35}''^2 + I_{35}u_{15}''^2 + I_{26}u_{16}''^2 + I_{16}u_{26}''^2) + \Omega^2[a(l-s) + {}^1/_2(l^2-s^2)] \times$$
$$\times [3(u_{13}'^2 + u_{16}'^2 + u_{23}'^2 + u_{26}'^2) - (u_{12}'^2 + u_{15}'^2 + u_{32}'^2 + u_{35}'^2)] + \Omega^2[u_{21}^2 + u_{24}^2 + u_{23}^2 +$$
$$+ u_{26}^2 - 3(u_{31}^2 + u_{34}^2 + u_{32}^2 + u_{35}^2)] - J\Omega^2(\vartheta_{22}^\circ - \vartheta_{11}^\circ - J_{23}^{(+)})^{-1}(u_{21} - u_{24} +$$
$$+ u_{12} - u_{15})^2 - 3J\Omega^2(\vartheta_{11}^\circ - \vartheta_{33}^\circ - J_{23}^{(-)})^{-1}(u_{13} - u_{16} + u_{31} - u_{34})^2 -$$
$$- 4J\Omega^2(\vartheta_{22}^\circ - \vartheta_{33}^\circ - 4J_{12}^{(+)})^{-1}(u_{32} - u_{35} + u_{23} - u_{26})^2 -$$
$$- \Omega^2 m(M - M^{(+)})^{-1}(u_{21} + u_{24} + u_{23} + u_{26})^2\}\,ds \qquad (3.10)$$

Рассмотрим следующие вариационные задачи. Найти минимумы $\nu_1$, $\nu_2, \ldots, \nu_6$ функционалов

$$\Phi_\alpha(u_{2\alpha}, u_{3\alpha}) = \left\{\int_0^l [u_{2\alpha}^2 + u_{3\alpha}^2 + \sigma(u_{2\alpha}'^2 + u_{3\alpha}'^2)]\,ds\right\}^{-1}\int_0^l E_*(I_{3\alpha}u_{2\alpha}''^2 + I_{2\alpha}u_{3\alpha}''^2)\,ds$$
$$(\alpha = 1,4)$$

$$\Phi_\beta(u_{3\beta}, u_{1\beta}) = \left\{\int_0^l [u_{3\beta}^2 + u_{1\beta}^2 + \sigma(u_{3\beta}'^2 + u_{1\beta}'^2)]\,ds\right\}^{-1}\int_0^l\Big\{E_*(I_{1\beta}u_{3\beta}''^2 + I_{3\beta}u_{1\beta}''^2) -$$
$$- \Omega^2\left[a(l-s) + \frac{1}{2}(l^2-s^2)\right](u_{3\beta}'^2 + u_{1\beta}'^2)\Big\}\,ds \quad (\beta = 2,5)$$

$$\Phi_\gamma(u_{1\gamma}, u_{2\gamma}) = \left\{\int_0^l [u_{1\gamma}^2 + u_{2\gamma}^2 + \sigma(u_{1\gamma}'^2 + u_{2\gamma}'^2)]\,ds\right\}^{-1} \times \qquad (3.11)$$
$$\times \int_0^l \Big\{E_*(I_{3\gamma}u_{1\gamma}''^2 + I_{1\gamma}u_{3\gamma}''^2) + 3\Omega^2\left[a(l-s) + \frac{1}{2}(l^2-s^2)\right](u_{1\gamma}'^2 + u_{2\gamma}'^2)\Big\}\,ds$$
$$(\gamma = 3,6)$$

в классе непрерывно-дифференцируемых до четвертого порядка функций $u_{ij}(s)$ $(0 \leqslant s \leqslant l)$, удовлетворяющих условиям (1.3).

Постоянные $\nu_j$ можно также вычислять как наименьшие собственные значения независимых одна от другой соответствующих краевых задач для функций $u_{ij}$.

Из (3.10) и (3.11) получим неравенство

$$
\begin{aligned}
V(u) \geqslant \sigma\rho_1 \int_0^l \{ & \nu_1 [u_{21}{}^2 + u_{31}{}^2 + \sigma(u_{21}'^2 + u_{31}'^2)] + \nu_2 [u_{32}{}^2 + u_{12}{}^2 + \\
& + \sigma(u_{32}'^2 + u_{12}'^2)] + \nu_3 [u_{13}{}^2 + u_{23}{}^2 + \sigma(u_{13}'^2 + u_{23}'^2)] + \nu_4 [u_{24}{}^2 + u_{34}{}^2 + \\
& + \sigma(u_{24}'^2 + u_{34}'^2)] + \nu_5 [u_{35}{}^2 + u_{15}{}^2 + \sigma(u_{35}'^2 + u_{15}'^2)] + \nu_6 [u_{16}{}^2 + u_{26}{}^2 + \\
& + \sigma(u_{16}'^2 + u_{26}'^2)] + \Omega^2 [u_{21}{}^2 + u_{24}{}^2 + u_{23}{}^2 + u_{26}{}^2 - 3(u_{31}{}^2 + u_{34}{}^2 + u_{32}{}^2 + \\
& + u_{35}{}^2)] - J(\vartheta_{22}{}^\circ - \vartheta_{11}{}^\circ - J_{23}^{(+)})^{-1} \Omega^2 (u_{21} - u_{24} + u_{12} - u_{15})^2 - \\
& - 3J(\vartheta_{11}{}^\circ - \vartheta_{33}{}^\circ - J_{23}^{(-)})^{-1} \Omega^2 (u_{13} - u_{16} + u_{31} - u_{34})^2 - 4J(\vartheta_{22}{}^\circ - \vartheta_{33}{}^\circ - \\
& - 4J_{12}^{(+)})^{-1} \Omega^2 (u_{32} - u_{35} + u_{23} - u_{26})^2 - \\
& - m(M - M^{(+)})^{-1} \Omega^2 (u_{21} + u_{24} + u_{23} + u_{26})^2 \} \, ds
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

Для простоты вычислений будем считать, что

$$
I_{21} = I_{31} = I_{24} = I_{34} = I_1, \quad I_{32} = I_{12} = I_{35} = I_{15} = I_2
$$

$$
I_{13} = I_{23} = I_{16} = I_{26} = I_3
$$

Тогда $\nu_1 = \nu_4$, $\nu_2 = \nu_5$, $\nu_3 = \nu_6$, и условия Сильвестра положительной определенности квадратичной формы относительно величин $u_{ij}$, $u_{ij}'$, стоящей под знаком интеграла в (3.12), приводятся к неравенствам

$$
\begin{gathered}
3\Omega^2 < \nu_1 \qquad (\nu_1 \text{ не зависит от } \Omega) \\
\vartheta_{22}{}^\circ - \vartheta_{11}{}^\circ - J_{23}^{(+)} > \frac{2J\Omega^2}{\nu_1 + \Omega^2} \max\left\{1;\ \frac{\nu_1 + \nu_2 + \Omega^2}{\nu_2}\right\} > 0 \\
\vartheta_{11}{}^\circ - \vartheta_{33}{}^\circ - J_{23}^{(-)} > \frac{6J\Omega^2}{\nu_3} \max\left\{1;\ \frac{\nu_3 + \nu_1 - 3\Omega^2}{\nu_1 - 3\Omega^2}\right\} > 0 \\
\vartheta_{22}{}^\circ - \vartheta_{33}{}^\circ - 4J_{12}^{(+)} > \frac{8J\Omega^2}{\nu_3 + \Omega^2} \max\left\{1;\ \frac{\nu_2 + \nu_3 - 2\Omega^2}{\nu_2 - 3\Omega^2}\right\} > 0 \\
\frac{2m}{M - M^{(+)}} < \frac{\nu_3 + \Omega^2}{\Omega^2} \min\left\{1;\ \frac{\nu_1 + \Omega^2}{\nu_3 + \nu_1 + 2\Omega^2}\right\}
\end{gathered}
\tag{3.13}
$$

4. Наряду с положением относительного равновесия (3.1) системы, для которого постоянную $c^\circ$ в уравнении (3.2) свободной поверхности $S^\circ$ жидкости будем считать отличной от нуля (в противоположном случае в возмущенном движении системы будет нарушена сплошность жидкости), рассмотрим в момент $t > t_0$ ее положение, отвечающее некоторому возмущенному движению системы. Введем в рассмотрение удаление $h$ возмущенной свободной поверхности $S$ жидкости от невозмущенной $S^\circ$, а также уклонение $\Delta$ формы $\tau$ жидкости, отвечающей возмущенному положению системы, от формы $\tau^\circ$ равновесия [4].

Рассмотрим множество, элементами которого служат совокупности величин $\beta_1, \gamma_1, \gamma_2, h$ и функций $u_{ij}(s, t)$, $0 \leqslant s \leqslant l, t \geqslant t_0$ ($i = 1, 2, 3; j = 1, 2, \ldots, 6; j \neq i, 3 + i$). Относительно функций $u_{ij}$ будем предполагать, что они удовлетворяют условиям (1.3), а также определенным условиям гладкости (достаточно потребовать непрерывности функций $u_{ij}, u_{ij}', \ldots, u_{ij}^{\mathrm{IV}}$, $\dot{u}_{ij}, \ddot{u}_{ij}, \dot{u}_{ij}', \ddot{u}_{ij}'$). Будем также считать, что для заданного удаления $h$

величина соответствующего уклонения $\nabla$ удовлетворяет условию $\nabla > \varepsilon_0 h$, где $\varepsilon_0$ — некоторое фиксированное достаточно малое положительное число [4].

Введем в этом множестве две метрики

$$Q_0(\beta, \gamma, h, u) = L^3(\beta_1^2 + \gamma_1^2 + \gamma_2^2) + Lh^2 + \sum_{i,j}\int_0 (u_{ij}^2 + l^2 u_{ij}'^2 + l^4 u_{ij}''^2)\,ds$$

$$Q(\beta, \gamma, h, u) = L^3(\beta_1^2 + \gamma_1^2 + \gamma_2^2) + Lh^2 + \sum_{i,j}\int_0^l (u_{ij}^2 + l^2 u_{ij}'^2)\,ds$$

В окрестности невозмущенного движения (3.1) метрика $Q$ и функционал $W_*$ непрерывны по метрике $Q_0$, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при выполнении условия $Q_0(\beta, \gamma, h, u) < \delta$ имеют место неравенства $Q < \varepsilon$, $|W_* - W_*^\circ| < \varepsilon$, где $W_*^\circ$ — значение $W_*$ для решения (3.1)

Функционалы $Q_0$ и $Q$ характеризуют отклонение возмущенного положения системы от положения относительного равновесия (3.1). Отклонение скоростей точек системы в возмущенном движении от их нулевых значений в относительном равновесии (3.1) будем характеризовать величиной $T$ кинетической энергии (1.7) относительного движения системы, а также функционалом

$$P(\omega, u^\cdot, x^\cdot) = \sum_i J_i \omega_i^2 + \sum_{i,j} \sigma\rho_1 \int_0^l u_{ij}^{\cdot 2} ds + \rho_2 \int_\tau (x_1^{\cdot 2} + x_2^{\cdot 2} + x_3^{\cdot 2})\,d\tau$$

Для любых допустимых значений величин $\beta_1$, $\gamma_1$, $\gamma_2$, $h$, $u_{ij}$, удовлетворяющих условию $Q_0(\beta, \gamma, h, u) < N$, где $N$ — фиксированная достаточно малая положительная постоянная, $T \to 0$ при $P \to 0$.

Из (3.7) и (3.12) следует, что при выполнении условий (3.13) $\delta^2 W_*$ представляет положительно определенный в метрике $Q$ функционал. В силу непрерывности $W_*$ по метрике $Q_0$ отсюда следует положительная определенность в метрике $Q$ функционала $W_*$. На основании теоремы [1] заключаем, что неравенства (3.13) представляют достаточные условия устойчивости относительного равновесия (3.1) по отношению к функционалам $Q_0$, $Q$, $T$ и $P$. Это означает, что для всяких произвольно малых положительных чисел $L_1$ и $L_2$ могут быть выбраны положительные числа $N_1$ и $N_2$ так, что при всяких допустимых начальных значениях величин направляющих косинусов $\beta_i$, $\gamma_i$, удаления $h$, уклонения $\nabla$ ($\nabla > \varepsilon_0 h$), упругих перемещений $u_{ij}$, относительных угловой скорости $\omega$ тела, скоростей упругих стержней $u_{ij}^\cdot$ и жидкости $x_i^\cdot$, удовлетворяющих условиям

$$Q_0(\beta, \gamma, h, u)|_{t=t_0} < N_1, \qquad P(\omega, u^\cdot, x^\cdot)|_{t=t_0} < N_2 \tag{4.1}$$

при $t \geqslant t_0$, или, по крайней мере, до тех пор пока $\nabla > \varepsilon_0 h$ выполняются неравенства

$$Q(\beta, \gamma, h, u) < L_1, \qquad T < L_2 \tag{4.2}$$

В частности из (1.3), (4.1) и (4.2) следует, что при достаточно малых $N_1$ и $N_2$ из условия (4.1) вытекает при $t \geqslant t_0$ не только первое из неравенств (4.2), но также неравенства $l^2 u_{ij}^2 < L_1$.

Условия (3.13) показывают, что присоединение к телу упругих стержней, равно как и наличие в полости тела жидкости со свободной поверхностью, оказывается дестабилизирующее влияние на устойчивость относительного равновесия недеформируемой системы с «замороженной» в положении относительного равновесия (3.1) жидкостью.

Первое из условий (3.13) накладывает определенное ограничение сверху на величину $\Omega$ орбитальной угловой скорости и связано с существованием форм потери устойчивости стержней.

При $E \to \infty$ постоянные $\nu_1$, $\nu_2$, $\nu_3 \to \infty$ и условия (3.13) переходят в условия (3.9) устойчивости относительного равновесия (3.1) на круговой орбите твердого тела с недеформируемыми стержнями и жидкостью в его полости; при этом, если жидкость отсутствует или целиком заполняет полость, то $J_{12}^{(+)} = J_{23}^{(+)} = J_{23}^{(-)} = 0$.

В случае отсуствия жидкости условия (3.9) переходят в известные условия $J_2 > J_1 > J_3$ устойчивости относительного равновесия (3.1) твердого спутника на круговой орбите.

Отметим, что и в случае вязкой жидкости неравенства (3.13) представляют достаточные условия устойчивости исследуемого относительного равновесия системы.

**5. Укажем достаточные условия устойчивости относительного равновесия (3.1) твердого тела с жидкостью и одной или двумя парами упругих стержней.**

**1°. Пара стержней в положении относительного равновесия (3.1) направлена по нормали к плоскости орбиты**

$$\vartheta_{22}{}^\circ - \vartheta_{11}{}^\circ - J_{23}^{(+)} > \frac{2J\Omega^2}{\nu_2}, \quad \vartheta_{11}{}^\circ - \vartheta_{33}{}^\circ - J_{23}^{(-)} > 0, \quad \vartheta_{22}{}^\circ - \vartheta_{33}{}^\circ - 4J_{12}^{(+)} > \frac{8J\Omega^2}{\nu_2 - 3\Omega^2} > 0 \tag{5.1}$$

**2°. Пара стержней в положении относительного равновесия (3.1) направлена по касательной к орбите**

$$\vartheta_{22}{}^\circ - \vartheta_{11}{}^\circ - J_{23}^{(+)} > \frac{2J\Omega^2}{\nu_1 + \Omega^2}, \quad \vartheta_{11}{}^\circ - \vartheta_{33}{}^\circ - J_{23}^{(-)} >$$
$$> \frac{6J\Omega^2}{\nu_1 - 3\Omega^2} > 0, \quad \vartheta_{22}{}^\circ - \vartheta_{33}{}^\circ - 4J_{12}^{(+)} > 0 \tag{5.2}$$

**3°. Пара стержней в положении относительного равновесия (3.1) направлена по нормали орбиты**

$$\vartheta_{22}{}^\circ - \vartheta_{11}{}^\circ - J_{23}^{(+)} > 0, \quad \vartheta_{11}{}^\circ - \vartheta_{33}{}^\circ - J_{23}^{(-)} >$$
$$> \frac{6J\Omega^2}{\nu_3} > 0, \quad \vartheta_{22}{}^\circ - \vartheta_{33}{}^\circ - 4J_{12}^{(+)} > \frac{8J\Omega^2}{\nu_3 + \Omega^2} \tag{5.3}$$

**4°. Две пары стержней в положении относительного равновесия (3.1) направлены по касательной и нормали орбиты**

$$\vartheta_{22}{}^\circ - \vartheta_{11}{}^\circ - J_{23}^{(+)} > \frac{2J\Omega^2}{\nu_1 + \Omega^2}, \quad \vartheta_{11}{}^\circ - \vartheta_{33}{}^\circ - J_{23}^{(-)} > \frac{6J\Omega^2}{\nu_3} \max\left\{1; \frac{\nu_1 + \nu_3 - 3\Omega^2}{\nu_1 - 3\Omega^2}\right\}$$
$$\vartheta_{22}{}^\circ - \vartheta_{33}{}^\circ - 4J_{12}^{(+)} > \frac{8J\Omega^2}{\nu_3 + \Omega^2}, \quad 3\Omega^2 < \nu_1, \frac{2m}{M - M^{(+)}} < \frac{(\nu_3 + \Omega^2)(\nu_1 + \Omega^2)}{\Omega^2(\nu_3 + \nu_1 + 2\Omega^2)} \tag{5.4}$$

5°. Две пары стержней в положении относительного равновесия (3.1) направлены по касательной и бинормали орбиты

$$\vartheta_{22}^\circ - \vartheta_{11}^\circ - J_{23}^{(+)} < \frac{2J\Omega^2}{\nu_1 + \Omega^2} \max\left\{1;\ \frac{\nu_1 + \nu_2 + \Omega^2}{\nu_2}\right\} > 0 \tag{5.5}$$

$$\vartheta_{11}^\circ - \vartheta_{33}^\circ - J_{23}^{(-)} > \frac{6J\Omega^2}{\nu_1 - 3\Omega^2} > 0, \qquad \vartheta_{22}^\circ - \vartheta_{33}^\circ - 4J_{12}^{(+)} > \frac{8J\Omega^2}{\nu_2 - 3\Omega^2} > 0$$

6°. Две пары стержней в положении относительного равновесия (3.1) направлены по нормали и бинормали орбиты

$$\vartheta_{22}^\circ - \vartheta_{11}^\circ - J_{23}^{(+)} > \frac{2J\Omega^2}{\nu_2} > 0, \qquad \vartheta_{11}^\circ - \vartheta_{33}^\circ - J_{23}^{(-)} > \frac{6\Omega^2}{\nu_3} > 0 \tag{5.6}$$

$$\vartheta_{22}^\circ - \vartheta_{33}^\circ - 4J_{12}^{(+)} > \frac{8J\Omega^2}{\nu_3 + \Omega^2} \max\left\{1;\ \frac{\nu_3 + \nu_2 - 2\Omega^2}{\nu_2 - 3\Omega^2}\right\} > 0$$

Условия (5.1) — (5.6) могут быть получены из (3.13) при $\nu_1, \nu_3 \to \infty$; $\nu_2, \nu_3 \to \infty$, $\nu_1, \nu_2 \to \infty$; $\nu_2 \to \infty$; $\nu_3 \to \infty$; $\nu_1 \to \infty$ соответственно. Физически предельный переход $\nu_i \to \infty$ означает, что стержни, направленные вдоль оси $x_i$, постепенно «затвердевают» и в пределе их следует считать недеформируемыми.

6. Устойчивость одного из положений относительного равновесия на круговой орбите в центральном ньютоновом поле сил твердого тела с двумя тонкими прямолинейными упругими стержнями была исследована Мейровичем [2]. Сравним полученные выше результаты с результатами работы [2], в которой в принятых выше обозначениях деформация стержней описывается вектор-функциями

$$\mathbf{u}_2(s, t) = u_{12}\mathbf{i}_1 + u_{32}\mathbf{i}_3, \quad \mathbf{u}_5(s, t) = u_{15}\mathbf{i}_1 + u_{35}\mathbf{i}_3 \quad (0 \leqslant s \leqslant l)$$

так что аксиальными составляющими $u_{22}$ и $u_{25}$ упругих перемещений пренебрегается. В исследованном положении относительного равновесия системы пара стержней имеет направление нормали к плоскости орбиты, а достаточные условия устойчивости имеют вид

$$C > B > A > 2m(a + l)^2$$

$$\Lambda = \left(3 + \frac{8m(a + l)^2}{C - A}\right)\Omega^2, \qquad \Lambda > \frac{2m(a + l)^2}{C - B}\,\Omega^2 \tag{6.1}$$

Здесь $\Lambda$ — наименьшее собственное значение краевой задачи

$$EIu^{\mathrm{IV}} = \sigma\rho_1 \Lambda u, \qquad u(0) = u'(0) = u''(l) = u'''(l) = 0$$

а величины $A$, $B$, $C$, по утверждению автора, представляют главные центральные моменты инерции системы в ее недеформированном состоянии относительно осей $x_3$, $x_1$, $x_2$ соответственно. При этом не указываются параметры, по отношению к которым исследуется устойчивость рассматриваемого невозмущенного движения.

Используя неравенство

$$J = \sigma\rho_1 \int_0^l (a + s)^2\, ds < m(a + l)^2$$

условия (6.1) можно привести к виду

$$C > B > A > 2J, \qquad \Lambda > \left(3 + \frac{8J}{C - A}\right)\Omega^2, \qquad \Lambda > \frac{2J\Omega^2}{C - B} \tag{6.2}$$

Полученные в п. 5 достаточные условия (5.1) устойчивости рассматриваемого здесь положения относительного равновесия в случае отсутствия жидкости можно представить в виде

$$J_2 > J_1 > J_3 > 0, \qquad \nu_2 > \left(3 + \frac{8J}{J_2 - J_3}\right)\Omega^2, \qquad \nu_2 > \frac{2J\Omega^2}{J_2 - J_1} \tag{6.3}$$

Сходство условий (6.2) и (6.3) формально, так как величины $A$, $B$, $C$, вопреки утверждению Мейровича, не постоянны, а представляют функционалы

$$A = J_3 + M_T x_{1c}^2, \qquad B = J_1 + M_T x_{3c}^2, \qquad C = J_2 + M_T (x_{1c}^2 + x_{3c}^2)$$

$$M x_{1c} = \sigma\rho_1 \int_0^l (u_{12} + u_{15})\, ds, \qquad M x_{3c} = \sigma\rho_1 \int_0^l (u_{32} + u_{35})\, ds$$

где $M_T$ — масса твердого тела.

7. Исследуем теперь случай, когда на рассматриваемую механическую систему никакие внешние силы не действуют, так что ее центр масс движется прямолинейно и равномерно.

Систему осей координат $Cxyz$ будем теперь предполагать кениговой.

Рассматриваемая механическая система допускает интеграл энергии $T + \Pi_d = \text{const}$, где $T$ — кинетическая энергия системы в ее движении относительно осей Кёнига.

Введем в рассмотрение прямоугольную систему осей координат $Czz'z''$, вращающуюся вокруг оси $z$ с некоторой угловой скоростью $\Omega$. Для плоскости $xy$ имеет место интеграл площадей $\mathbf{G}\cdot\boldsymbol{\gamma} = k = \text{const}$, где $\mathbf{G}$ — вектор кинетического момента системы относительно ее центра масс при движении системы относительно осей Кёнига, а $\boldsymbol{\gamma}$ — орт оси $z$. Обозначая через $\mathbf{G}_*$ вектор кинетического момента системы относительно точки $C$ в ее движении относительно осей $Czz'z''$, интеграл площадей представим в виде

$$\mathbf{G}_*\cdot\boldsymbol{\gamma} + J_*\Omega = k$$

где $J_* = \boldsymbol{\gamma}\cdot\Theta^c\cdot\boldsymbol{\gamma}$ — момент инерции системы относительно оси $z$. Величину $\Omega$ выберем так, чтобы в любой момент времени имело место равенство $\mathbf{G}_*\cdot\boldsymbol{\gamma} = 0$. Тогда будем иметь $J_*\Omega = k$, и интеграл энергии можно представить в виде $T_* + W = \text{const}$, где $T_*$ — кинетическая энергия относительного движения системы, а $W$ — измененная потенциальная энергия системы

$$W = \frac{k^2}{2J_*} + \Pi_d$$

Вместо $W$ ниже будем рассматривать функционал

$$W_* = W + {}^1/_2\lambda\,(\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2)$$

где $\lambda$ — неопределенный множитель Лагранжа.

Из равенства $\delta W_* = 0$ получим уравнения стационарных движений системы, естественные граничные условия (2.3) на свободном конце стержней и уравнение свободной поверхности жидкости в стационарном движении. Эти уравнения имеют вид

$$(\vartheta_{11}\gamma_1 + \vartheta_{12}\gamma_2 + \vartheta_{13}\gamma_3)\Omega_0^2 - \lambda\gamma_1 = 0 \; (1\ 2\ 3) \tag{7.1}$$

$$x_{3c} - (x_{1c}\gamma_1 + x_{2c}\gamma_2 + x_{3c}\gamma_3)\gamma_3 + (\gamma_3^2 - 1)u_{31} + (a+s)(u_{21}\gamma_2\gamma_3 + \gamma_3\gamma_1) +$$
$$+ (\gamma_1^2 - 1)\ [a(l-s) + {}^1/_2\,(l^2 - s^2)]u_{31}'\}' + E_* I_{21}\Omega_0^{-2} u_{31}^{\mathrm{IV}} = 0 \qquad \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 1\,2\ldots 6 \end{pmatrix}$$

$$x_{2c} - (x_{1c}\gamma_1 + x_{2c}\gamma_2 + x_{3c}\gamma_3)\gamma_2 + (\gamma_2^2 - 1)u_{21} + (a+s)(u_{31}\gamma_2\gamma_3 + \gamma_1\gamma_2) +$$
$$+ (\gamma_1^2 - 1)\ \{[a(l-s) + {}^1/_2\,(l - s^2)]u_{21}'\}' + E_* I_{31}\Omega_0^{-2} u_{21}^{\mathrm{IV}} = 0 \qquad \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 1\,2\ldots 6 \end{pmatrix}$$

$$x_{3c} - (x_{1c}\gamma_1 + x_{2c}\gamma_2 + x_{3c}\gamma_3)\gamma_3 + (\gamma_3^2 - 1)u_{34} + (a+s)(u_{24}\gamma_2\gamma_3 - \gamma_3\gamma_1) +$$
$$+ (\gamma_1^2 - 1)\{[a(l-s) + {}^1/_2\,(l^2 - s^2)]u_{34}'\}' + E_* I_{24}\Omega_0^{-2} u_{34}^{\mathrm{IV}} = 0 \qquad \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 1\,2\ldots 6 \end{pmatrix}$$

$$x_{2c} - (x_{1c}\gamma_1 + x_{2c}\gamma_2 + x_{3c}\gamma_3)\gamma_2 + (\gamma_2^2 - 1)u_{24} + (a+s)\ (u_{34}\gamma_2\gamma_3 - \gamma_1\gamma_2) +$$
$$+ (\gamma_1^2 - 1)\{[a(l-s) + {}^1/_2(l^2 - s^2)]u_{24}'\}' + E_* I_{34}\Omega_0^{-2} u_{24}^{\mathrm{IV}} = 0 \qquad \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 1\,2\ldots 6 \end{pmatrix}$$

$$U \equiv (\mathbf{r} - \mathbf{r}_c)^2 - [(\mathbf{r} - \mathbf{r}_c)\cdot\boldsymbol{\gamma}]^2 = c \qquad (7.2)$$

Здесь $\Omega_0$ — величина угловой скорости равномерного вращения системы как одного твердого тела в стационарном движении, $c$ — постоянная, определяемая количеством жидкости в полости тела. Жидкость по отношению к поверхности $U = c$ располагается с той ее стороны, для которой $U > c$. В осях Кёнига уравнение (7.2) имеет вид $U = x^2 + y^2 = c$.

**8.** Уравнения (7.1) и граничные условия (1.3), (2.3) допускают решение

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 0,\ \gamma_3 = 1,\ \vartheta_{13}^\circ = \vartheta_{23}^\circ = 0,\ x_{1c}^\circ = x_{2c}^\circ = 0,\ \lambda = \vartheta_{33}^\circ\Omega_0^2 \qquad (8.1)$$
$$u_{ij} = u_{i,3+j} \equiv 0 \qquad (i, j = 1, 2, 3;\quad i \neq j)$$

Это решение описывает равномерное вращение системы как одного твердого тела вокруг оси $z$ с произвольной угловой скоростью $\Omega_0$; при этом стержни находятся в недеформированном состоянии, а уравнение свободной поверхности жидкости имеет вид $U^\circ = x_1^2 + x_2^2 = c_0$.

Исследуем устойчивость движения (8.1). Для простоты вычислений будем считать, что $x_{3c}^\circ = 0$. Достаточные условия устойчивости невозмущенного движения (8.1) получим как условия положительной определенности второй вариации $\delta^2 W_*$ функционала $W_*$ для решения (8.1) при условии, что $\gamma_3 \equiv 1$. Для $\delta^2 W_*$ имеет место выражение

$$\delta^2 W_* = \Omega_0^2\,[(\vartheta_{33}^\circ - \vartheta_{11}^\circ)\gamma_1^2 - 2\vartheta_{12}^\circ\gamma_1\gamma_2 + (\vartheta_{33}^\circ - \vartheta_{22}^\circ)\gamma_2^2] + M\Omega_0^2(x_{1c}^2 +$$
$$+ x_{2c}^2) - \Omega_0^2\sigma\rho_1\int_0^l \{u_{13}^2 + u_{16}^2 + u_{12}^2 + u_{15}^2 + u_{21}^2 + u_{24}^2 + u_{23}^2 + u_{26}^2 -$$
$$- 2(a+s)[\gamma_1(u_{13} - u_{16} + u_{31} - u_{34}) + \gamma_2(u_{23} - u_{26} + u_{32} - u_{35})] -$$
$$- [a(l-s) + {}^1/_2(l^2 - s^2)]\,(u_{12}'^2 + u_{15}'^2 + u_{21}'^2 + u_{24}'^2 + u_{31}'^2 + u_{34}'^2 +$$
$$+ u_{32}'^2 + u_{35}'^2)\}\,ds + 2\Pi_d + \Omega_0^2\Gamma_2 \qquad (8.2)$$

Здесь $\Gamma_2$ — квадратичная относительно $\gamma_1$, $\gamma_2$, $u_{ij}$ часть выражения

$$\Gamma = -\rho_2\int_{\Delta\tau} [x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - (x_1\gamma_1 + x_2\gamma_2 + x_3\gamma_3)^2]\,|_{\gamma_3=1} d\tau \qquad (8.3)$$

В случае, когда свободная поверхность $S^\circ$ жидкости обладает тремя плоскостями симметрии и ими служат координатные плоскости, для $\Gamma_2$

имеет место выражение

$$\Gamma_2 = M^{(1)} x_{1c}^2 + M^{(2)} x_{2c}^2 - J_{12}^{(1)} \gamma_1^2 - J_{12}^{(2)} \gamma_2^2 \tag{8.4}$$

$$M^{(1)} = \rho_2 \int\limits_{S^0} \frac{x_1^2 dS}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = \rho_2 \int\limits_{\tau^{(1)}} d\tau, \qquad M^{(2)} = \rho_2 \int\limits_{S^0} \frac{x_2^2 dS}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = \rho_2 \int\limits_{\tau^{(2)}} d\tau$$

$$J_{12}^{(1)} = \rho_2 \int\limits_{S^0} \frac{x_1^2 x_3^2 dS}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = \rho_2 \int\limits_{\tau^{(1)}} x_3^2 d\tau, \qquad J_{12}^{(2)} = \rho_2 \int\limits_{S^0} \frac{x_2^2 x_3^2 dS}{\sqrt{x_1^2 + x_3^2}} = \rho_2 \int\limits_{\tau^{(2)}} x_3^2 d\tau$$

Здесь $M^{(1)}$, $M^{(2)}$, $J_{12}^{(1)}$, $J_{12}^{(2)}$ — массы и моменты инерции относительно плоскости $x_1x_2$, которые имела бы жидкость, если она заполняла области $\tau^{(1)}$ и $\tau^{(2)}$ пространства $x_1x_2x_3$, геометрический смысл которых аналогичен рассмотренным ранее областям $\tau^{(-)}$ и $\tau^{(+)}$. Величины $M^{(1)}$, $M^{(2)}$ и $J_{12}^{(1)}$, $J_{12}^{(2)}$, обусловленные наличием свободной поверхности жидкости, можно было бы назвать присоединенными массами и моментами инерции системы.

Пусть выполнены условия

$$D_1 \equiv \vartheta_{33}^\circ - \vartheta_{11}^\circ - J_{12}^{(1)} > 0, \quad D_2 \equiv \vartheta_{33}^\circ - \vartheta_{22}^\circ - J_{12}^{(2)} > 0 \qquad D = D_1 D_2 - \vartheta_{12}^{\circ 2} > 0 \tag{8.5}$$

Тогда, используя неравенство Шварца, из (8.2) с учетом (8.4) получим неравенство

$$\delta^2 W_* \geq \Omega_0^2 D_1^{-1} \left\{ D_1 \gamma_1 - \vartheta_{12}^\circ \gamma_2 + \sigma \rho_1 \int\limits_0^l (a+s)(u_{13} - u_{16} + u_{31} - u_{34})\, ds \right\}^2 +$$
$$+ \Omega_0^2 D^{-1} D_1^{-1} \left\{ D\gamma_2 + \sigma\rho_1 \int\limits_0^l (a+s)\,[\vartheta_{12}^\circ (u_{13} - u_{16} + u_{31} - u_{34}) + D_1 (u_{23} -\right.$$
$$\left. - u_{26} + u_{32} - u_{35})]\, ds \right\}^2 + \Omega_0^2 [(M + M^{(1)}) x_{1c}^2 + (M + M^{(2)}) x_{2c}^2] + \sigma\rho_1 V(u) \tag{8.6}$$

$$V(u) = \int\limits_0^l \{ E_* (I_{23} u_{13}''^2 + I_{26} u_{16}''^2 + I_{31} u_{21}''^2 + I_{34} u_{24}''^2 + I_{12} u_{32}''^2 + I_{15} u_{35}''^2 +$$
$$+ I_{13} u_{23}''^2 + I_{16} u_{26}''^2 + I_{21} u_{31}''^2 + I_{24} u_{34}''^2 + I_{32} u_{12}''^2 + I_{35} u_{15}''^2) +$$
$$+ \Omega_0^2 [a(l-s) + {}^1\!/_2 (l^2 - s^2)] (u_{12}'^2 + u_{15}'^2 + u_{21}'^2 + u_{24}'^2 + u_{31}'^2 + u_{34}'^2 +$$
$$+ u_{32}'^2 + u_{35}'^2) - \Omega_0^2 (u_{12}^2 + u_{15}^2 + u_{13}^2 + u_{16}^2 + u_{21}^2 + u_{24}^2 + u_{23}^2 + u_{26}^2) -$$
$$- J D^{-1} \Omega_0^2 [D_1 (u_{23} - u_{26} + u_{32} - u_{35})^2 + D_2 (u_{13} - u_{16} + u_{31} - u_{34})^2 +$$
$$+ 2\vartheta_{12}^\circ (u_{23} - u_{26} + u_{32} - u_{35})(u_{13} - u_{16} + u_{31} - u_{34})] \}\, ds \tag{8.7}$$

Для простоты вычислений будем считать, что

$$I_{13} = I_{16} = I_{23} = I_{26} = I_0,\ I_{12} = I_{15} = I_{21} = I_{24} = I_{31} = I_{34} = I_{32} = I_{35} = I_1$$

Рассмотрим следующие вариационные задачи.

Найти минимумы $\varkappa_0$, $\varkappa_1$ функционалов

$$\Phi_\alpha(u) = \left\{ \int\limits_0^l (u^2 + \sigma u'^2)\, ds \right\}^{-1} \int\limits_0^l \left\{ E_* I_\alpha u''^2 - \alpha \Omega_0^2 \left[ a(l-s) + \frac{1}{2}(l^2 - s^2) \right] u'^2 \right\} ds$$
$$(\alpha = 0, 1) \tag{8.8}$$

в классе непрерывно-дифференцируемых до четвертого порядка функций $u(s)$, $0 \leqslant s \leqslant l$, удовлетворяющих условиям (1.3).

Из (8.8) и (8.7) следует неравенство

$$V \geq \int_0^l \{\varkappa_0\sigma(u_{13}'^2 + u_{16}'^2 + u_{23}'^2 + u_{26}'^2) + \varkappa_1\sigma(u_{12}'^2 + u_{15}'^2 + u_{21}'^2 + u_{24}'^2 + u_{32}'^2 + u_{35}'^2) + \varkappa_1(u_{31}^2 + u_{34}^2 + u_{32}^2 + u_{35}^2) + (\varkappa_0 - \Omega_0^2)(u_{13}^2 + u_{16}^2 + u_{23}^2 + u_{26}^2) + (\varkappa_1 - \Omega_0^2)(u_{12}^2 + u_{15}^2 + u_{21}^2 + u_{24}^2) - JD^{-1}\Omega_0^2[D_1(u_{23} - u_{26} + u_{32} - u_{35})^2 + D_2(u_{13} - u_{16} + u_{31} - u_{34}) + 2\vartheta_{12}^\circ(u_{23} - u_{26} + u_{32} - u_{35})(u_{13} - u_{16} + u_{31} - u_{34})]\}\, ds \tag{8.9}$$

Условия Сильвестра положительной определенности квадратичной формы относительно величин $u_{ij}$, $u_{ij}'$, стоящей под знаком интеграла в (8.9), приводятся к неравенствам

$$\varkappa_1 > 0, \qquad \varkappa_0 > \Omega_0^2 \tag{8.10}$$

$$(\varkappa_0 + \varkappa_1 - \Omega_0^2 - 8JD_2D^{-1}\Omega_0^2)(\varkappa_0 + \varkappa_1 - \Omega_0^2) > (\varkappa_0 - \varkappa_1 - \Omega_0^2)^2$$

$$[(\varkappa_0 + \varkappa_1 - \Omega_0^2 - 8JD_1D^{-1}\Omega_0^2)(\varkappa_0 + \varkappa_1 - \Omega_0^2) - (\varkappa_0 - \varkappa_1 - \Omega_0^2)^2] \times [(\varkappa_0 + \varkappa_1 - \Omega_0^2 - 8JD_2D^{-1}\Omega_0^2)(\varkappa_0 + \varkappa_1 - \Omega_0^2) - (\varkappa_0 - \varkappa_1 - \Omega_0^2)^2] > [8J\vartheta_{12}^\circ D^{-1}\Omega_0^2(\varkappa_0 + \varkappa_1 - \Omega_0^2)]^2$$

Из (8.6), (8.9) следует, что при выполнении условий (8.5), (8.10) $\delta^2 W_*$ представляет положительно определенный в метрике $Q|_{\beta=0}$ функционал. В силу непрерывности $W_*$ по метрике $Q_0|_{\beta=0}$ отсюда следует положительная определенность в метрике $Q|_{\beta=0}$ функционала $W_*$. Следовательно, неравенства (8.5), (8.10) представляют достаточные условия устойчивости невозмущенного стационарного движения (8.1) по отношению к функционалам $Q_0|_{\beta=0}$, $Q|_{\beta=0}$, $T_*$ и $P$, при этом в выражении для $P$ (см. п. 4) под $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$ следует уже понимать проекции на оси $x_1$, $x_2$, $x_3$ вектора угловой скорости твердого тела в его движении по отношению к системе осей координат $Czz'z''$.

В случае, когда $\vartheta_{12}^\circ = 0$, условия (8.5), (8.10) приводятся к следующим:

$$\varkappa_1 > 0,\ \varkappa_0 > \Omega_0^2,\ \vartheta_{33}^\circ - \vartheta_{ii}^\circ - J_{12}^{(i)} > \frac{2J\Omega_0^2(\varkappa_0 + \varkappa_1 - \Omega_0^2)}{\varkappa_1(\varkappa_0 - \Omega_0^2)} \qquad (i = 1, 2) \tag{8.11}$$

Отсюда легко могут быть получены условия устойчивости невозмущенного движения (8.1) для случаев, когда к телу присоединено меньше, чем три пары стержней, а жидкость отсутствует или целиком заполняет полость.

**Так, например, если к телу присоединена лишь одна пара стержней, имеющих в невозмущенном движении направление оси вращения, то условия устойчивости получаются из (8.11) при $\varkappa_1 \to \infty$ и имеют вид**

$$\varkappa_0 > \Omega_0^2, \qquad \vartheta_{33}^\circ - \vartheta_{ii}^\circ - J_{12}^{(i)} > \frac{2J\Omega_0^2}{\varkappa_0 - \Omega_0^2} \qquad (i = 1, 2)$$

Аналогичные условия для этого случая (при отсутствии жидкости) были получены [3], однако и здесь справедливы замечания, отмеченные в п. 6.

Если к телу присоединены две пары стержней, в невозмущенном движении перпендикулярных оси вращения, то условия устойчивости получаются из (8.11) при $\varkappa_0 \to \infty$ и имеют вид

$$\varkappa_1 > 0, \quad \vartheta_{33}{}^\circ - \vartheta_{ii}{}^\circ - J_{12}^{(i)} > \frac{2J}{\varkappa_1}\Omega_0{}^2 \qquad (i = 1, 2)$$

Если стержни отсутствуют, то условия устойчивости приводятся к следующим:

$$\vartheta_{33}{}^\circ - \vartheta_{ii}{}^\circ - J_{12}^{(i)} > 0 \qquad (i = 1, 2)$$

В случаях, когда жидкость отсутствует или целиком заполняет полость, в приведенных условиях устойчивости следует положить $J_{12}^{(1)} = J_{12}^{(2)} = 0$.

Автор выражает благодарность В. В. Румянцеву за внимание к работе и ее обсуждение.

Поступила 12 III 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Румянцев В. В. О движении и устойчивости упругого тела с полостью, содержащей жидкость. ПММ, 1969, т. 33, вып. 6.
2. Meirovitch L. Stability of a spinning body containing elastic parts via Liapunov's direct method. AIAA Journal, 1970, vol. 8, No. 7, p. 1193—1200.
3. Meirovitch L. A method for the Liapunov stability analysis of hibrid dynamical systems possessing ignorable coordinates. AIAA Paper, 1970, No. 1045.
4. Моисеев Н. Н., Румянцев В. В. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. М., «Наука», 1965.
5. Лурье А. И. Аналитическая механика. М., Физматгиз, 1961.