Прикладная математика и механика. Том 36, 1972

УДК 531.3

О НОРМАЛЬНЫХ КОНФИГУРАЦИЯХ КОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМ

И. М. Беленький

(Москва)

Рассматривается задача о приведении консервативных систем к нормальным координатам при помощи широко применяемого в небесной механике метода регуляризирующего преобразования времени.

Ввиду известного равноправия канонических переменных можно рассматривать приведение систем и к нормальным импульсам.

В связи с указанным приведением вводятся понятия нормальной и неполностью нормальных конфигураций систем. Условия существования нормальных конфигураций изучаются, исходя из структурных свойств гамильтониана. Эти условия рассмотрены, в частности, для систем с полными связями, систем с двумя степенями свободы, систем типа Лиувилля, однородных систем, систем, допускающих группу преобразований подобия, систем, обладающих радиальной симметрией, и некоторых других.

1. Определения и постановка задачи. Рассмотрим консервативную систему с k степенями свободы, движущуюся в некотором силовом поле при постоянной энергии h. Уравнение Гамильтона — Якоби будет иметь вид

$$H\,(q_1, q_2, \ldots, q_k, \quad \partial W/\partial q_1, \ldots, \partial W/\partial q_k) = h \tag{1.1}$$

Будем говорить, что система приводится к нормальным координатам и образует нормальную конфигурацию $A\ (q_1, q_2, \ldots, q_k)$ по отношению к обобщенным координатам q_j, если при надлежащем выборе координат q_j и приведенного времени τ уравнения движения расщепляются на k дифференциальных уравнений вида

$$q_j'' = \sigma_j q_j \qquad (\sigma_j = \text{const},\ j = 1, 2, \ldots, k) \tag{1.2}$$

Здесь τ — подходящим образом подбираемая регуляризирующая переменная, зависящая в общем случае от времени t, штрих означает производную по τ.

Простым примером нормальной конфигурации без регуляризации времени t служит приведение к нормальным координатам в случае малых колебаний системы вблизи положения равновесия [1].

Ввиду известного равноправия канонических переменных p_j и q_j можно аналогичным образом говорить о нормальных конфигурациях системы и относительно импульсов p_j, если только p_j удовлетворяют дифференциальным уравнениям вида

$$p_j'' = \gamma_j p_j \qquad (\gamma_j = \text{const},\ j = 1, 2, \ldots, k) \tag{1.3}$$

Система обладает неполной или частичной нормальной конфигурацией, если уравнения (1.2) имеют место не для всех индексов $j = 1, 2, \ldots, k$, а лишь для части из них, а именно $j = 1, 2, \ldots, \nu$ $(1 \leqslant \nu < k)$.

Аналогичным образом можно говорить о неполной нормальной конфигурации системы и относительно импульсов p_j.

Может оказаться, что некоторые из σ_j будут равны между собой, тогда будет иметь место случай вырождения [2,3]. В частности, случай полного вырождения имеет место, когда все σ_j равны между собой: $\sigma_j = \sigma$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$. Примерами могут служить некоторые задачи небесной механики. Так, например, в задаче n тел в частном случае так называемых постоянных конфигураций имеет место нормальная конфигурация, соответствующая случаю полного вырождения [4], а именно, когда центробарические тела совершают (с общим для всех периодом) кеплеровы движения по окружностям с центрами, находящимися в центре масс системы. Другим примером могут служить так называемые центральные конфигурации в задаче n тел [5, 6].

Задача, рассматриваемая ниже, состоит в выяснении условий существования нормальных конфигураций, в зависимости от структурных свойств гамильтониана $H = H(\mathbf{p}, \mathbf{q})$.

2. Основные зависимости. Состояние консервативной системы (1.1) описывается канонической системой уравнений Гамильтона

$$dq_j / dt = \partial H / \partial p_j, \qquad dp_j / dt = -\partial H / \partial q_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, k) \tag{2.1}$$

Дифференцируя (2.1) и вводя скобки Пуассона

$$(\varphi, \psi) = \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_i} \frac{\partial \psi}{\partial p_i} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_i} \frac{\partial \psi}{\partial q_i} \right) \tag{2.2}$$

получим

$$q_j^{\cdot\cdot} = (q_j^{\cdot}, H), \qquad p_j^{\cdot\cdot} = (p_j^{\cdot}, H) \tag{2.3}$$

Здесь точка означает производную по t.

Отсюда в силу (1.2), (2.1) и (2.2) можно получить условие, которому должна удовлетворять функция Гамильтона H, в случае существования нормальной конфигурации без регуляризации времени, т. е. при $\tau = t$

$$\sum_{i=1}^{k} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_j} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) = \sigma_j q_j \tag{2.4}$$

В случае, когда функция $H(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ представляет суперпозицию функций, каждая из которых зависит лишь от одной пары канонических переменных p_j и q_j

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = H_1(p_1, q_1) + H_2(p_2, q_2) + \ldots + H_k(p_k, q_k) \tag{2.5}$$

условие (2.4) принимает более простой вид

$$\frac{\partial^2 H_j}{\partial q_j \partial p_j} \frac{\partial H_j}{\partial p_j} - \frac{\partial^2 H_j}{\partial p_j^2} \frac{\partial H_j}{\partial q_j} = \sigma_j q_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, k) \tag{2.6}$$

Если воспользоваться интегралами

$$H_j(p_j, q_j) = \alpha_j \qquad (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k = h) \tag{2.7}$$

и заметить, что

$$\frac{\partial H_j}{\partial q_j} + \frac{\partial H_j}{\partial p_j}\frac{\partial p_j}{\partial q_j} = 0$$

то после некоторых упрощений, с последующим интегрированием, условие (2.6) можно привести к виду

$$\left(\frac{\partial H_j}{\partial p_j}\right)^2 = \sigma_j q_j^2 + c_j \qquad (c_j = \text{const}) \tag{2.8}$$

Этот результат может быть получен и иным путем, если воспользоваться первым интегралом уравнений движения (1.2).

Теорема 2.1. Пусть система (2.1) допускает нормальную конфигурацию как относительно координат q_j, так и относительно импульсов p_j. Тогда существуют интегралы вида

$$\frac{\partial H}{\partial p_j} p_j + \frac{\partial H}{\partial q_j} q_j = \alpha_j \qquad (\alpha_j = \text{const}, \quad j = 1, 2, \ldots, k) \tag{2.9}$$

Действительно, пусть p_j и q_j удовлетворяют уравнениям

$$q_j^{\cdot\cdot} = \sigma_j q_j, \qquad p_j^{\cdot\cdot} = \sigma_j p_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, k)$$

Отсюда $q_j^{\cdot\cdot} p_j - p_j^{\cdot\cdot} q_j = 0$ и, следовательно, в результате интегрирования получаем $q_j^{\cdot} p_j - p_j^{\cdot} q_j = \alpha_j$, что и приводит в силу уравнений (2.1) к интегралам вида (2.9).

В качестве примера рассмотрим натуральную консервативную систему с гамильтонианом H (**p**, **q**) вида

$$H = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k} (p_j^2 - \sigma_j q_j^2) \qquad (H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = h)$$

Здесь выполняются условия теоремы (2.1), и существуют интегралы вида (2.9), которые могут быть записаны в форме

$$p_j^2 - \sigma_j q_j^2 = \alpha_j \qquad (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k = 2h)$$

3. Регуляризация времени. Во многих случаях удается обнаружить нормальную конфигурацию путем введения новой регуляризирующей переменной $\tau = \tau(t)$, определяемой интегралом вида

$$\tau = \int^{t} \frac{dt}{u} \qquad (u = u(\mathbf{p}(t), \mathbf{q}(t)) \neq 0) \tag{3.1}$$

Здесь u (**p**, **q**) — надлежащим образом выбираемая непрерывная скалярная функция $2k$ переменных p_j и q_j, не обращающаяся в нуль в той области G фазового пространства E^{2k}, в которой рассматривается исходная система (2.1).

Преобразования времени, подобные (3.1), применялись, в частности, Биркгофом [7] при изучении общих лагранжевых систем и в других случаях, например при рассмотрении регуляризирующих преобразований в задаче трех тел [7,8].

При указанном преобразовании (3.1) уравнения (2.1) теряют свою гамильтонову форму и принимают вид

$$\frac{dq_j}{d\tau} = u\frac{\partial H}{\partial p_j}, \qquad \frac{dp_j}{d\tau} = -u\frac{\partial H}{\partial q_j} \qquad (j = 1, 2, \ldots, k) \tag{3.2}$$

Однако этим уравнениям, как указал Пуанкаре [8], можно снова придать гамильтонову форму, введя новую функцию $F(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = u(H - h)$, где h — постоянная энергии для решений $p_j(t)$ и $q_j(t)$ системы (2.1).

Чтобы убедиться в этом, достаточно продифференцировать $F(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ по переменным p_j и q_j и заметить, что на множестве решений $p_j(t)$ и $q_j(t)$ системы (2.1), соответствующих постоянной энергии h в силу интеграла энергии выполняется равенство $H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) - h = 0$. Система (3.2) принимает гамильтонову форму

$$\frac{dq_j}{d\tau} = \frac{\partial F}{\partial p_j}, \qquad \frac{dp_j}{d\tau} = -\frac{\partial F}{\partial q_j} \qquad (F(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = h') \tag{3.3}$$

Здесь $F(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ — новая функция Гамильтона, а h' — постоянная энергии. Следует отметить, что решениям системы (2.1) при постоянной энергии h будут соответствовать с учетом преобразования (3.1) не все решения системы (3.3), а лишь те, которые соответствуют значению новой постоянной энергии $h' = 0$. Решения же системы (3.3) при значении постоянной энергии $h' \neq 0$ никакого отношения к решениям системы (2.1) не имеют.

Теорема 3.1. Пусть гамильтонова система (2.1) в результате преобразования (3.1) допускает нормальную конфигурацию относительно координат q_j и относительно импульсов p_j и, следовательно

$$q_j'' = \sigma_j q_j, \qquad p_j'' = \sigma_j p_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, k) \tag{3.4}$$

Тогда существуют интегралы вида

$$u(\mathbf{p}, \mathbf{q})(q_j^{\bullet} p_j - p_j^{\bullet} q_j) = \alpha_j \qquad (\alpha_j = \mathrm{const}) \tag{3.5}$$

Для доказательства составим разность уравнений (3.4), предварительно помножив их соответственно на p_j и q_j. Интегрируя, получим $q_j' p_j - p_j' q_j = \alpha_j$. Этим интегралам можно придать форму (3.5), если только заметить, что в силу (3.1) $dt = u d\tau$.

Укажем, что теорема, аналогичная (3.1), может быть сформулирована и в случае неполной нормальной конфигурации.

4. Системы с полными связями [9]. Так как натуральная консервативная система с одной степенью свободы обратима [5], то ее лагранжиан L можно записать так:

$$L = {}^1/_2\, m(q) q^{\bullet 2} - V(q) \tag{4.1}$$

Здесь $V(q)$ — потенциальная энергия, а $m(q)$ — положительная функция, так называемая приведенная масса системы [10].

Теорема 4.1. Пусть натуральная консервативная система с одной степенью свободы (4.1) движется в силовом поле с потенциалом $V = {}^1/_2 \sigma q^2$. Тогда эта система допускает нормальную конфигурацию.

Действительно, написав интеграл энергии и вводя новую переменную τ, полагая $d\tau = dt \,/\, (m(q))^{1/2}$, получим $q'' = \sigma q$.

Теорема 4.2. Пусть система (4.1) движется в силовых полях с потенциалами $V_1(q)$ и $V_2(q)$ вида

$$V_1(q) = {}^1/_2\, \sigma m(q)\,(A - q^2), \quad V_2(q) = {}^1/_2 \sigma\,(m(q))^{-1}(A - q^2) \tag{4.2}$$

Тогда в обоих случаях при постоянной энергии $h = 0$ существует нормальная конфигурация.

Чтобы в этом убедиться, достаточно написать интегралы энергии при условии $h = 0$, сократить соответственно на неравные нулю множители $m(q)$ и $(m(q))^{-1}$ и ввести в случае $V_2(q)$ новую переменную τ, полагая $d\tau = dt / m(q)$. В результате после дифференцирования получим соответственно $q^{\cdot\cdot} = \sigma q$, $q'' = \sigma q$.

Видно, что в случае $V_2(q)$ будет иметь место нормальная конфигурация и по отношению к импульсу p.

5. Системы с радиальной симметрией. Для таких систем функция Лагранжа L остается (при $k > 2$) инвариантной при произвольном повороте k-мерного евклидова пространства вокруг начала координат и имеет вид [5]

$$L = \frac{1}{2} g(r) \sum_{j=1}^{k} x_j^{\cdot 2} - V(r) \qquad (r^2 = x_1^2 + \ldots + x_k^2, \ g(r) > 0)$$

Введем новую переменную τ, полагая $u = (g(r))^{1/2}$, и составим уравнения Лагранжа

$$\frac{d^2 x_j}{d\tau^2} = -\frac{\partial V}{\partial r}\frac{x_j}{r} \qquad (dt = (g(r))^{1/2} d\tau)$$

Отсюда, в частности, следует, что

$$x_i x_j'' - x_j x''_i = (x_i x_j - x_j x_i)\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}$$

и, следовательно, существуют интегралы вида

$$x_i x_j' - x_j x_i' = \alpha_{ij} \qquad (\alpha_{ij} = \text{const})$$

Полагая $V = -\,{}^1/_2\, \sigma r^2$, получим нормальную конфигурацию

$$x_j'' = \sigma x_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, k)$$

6. Системы с двумя степенями свободы. Для таких систем уравнениям движения в необратимом случае можно придать нормальную форму вида [5,7]

$$x^{\cdot\cdot} - \Omega(x, y)\, y^{\cdot} = -V_x, \quad y^{\cdot\cdot} + \Omega(x, y)\, x^{\cdot} = -V_y \qquad (\Omega(x, y) \neq 0) \quad (6.1)$$

К таким уравнениям приводят также и некоторые задачи небесной механики [11].

Теорема 6.1. Консервативная система с двумя степенями свободы (6.1) в необратимом случае ($\Omega \neq 0$) не может быть приведена к нормальной конфигурации путем регуляризации времени (3.1).

Действительно, вводя новую переменную τ (3.1), где $u(x, y)$ — надлежащим образом выбираемая функция, и пользуясь формулами перехода

$$\frac{d}{dt} = \frac{1}{u}\frac{d}{d\tau}, \qquad \frac{d^2}{dt^2} = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{dt}\frac{d}{d\tau} + \frac{1}{u^2}\frac{d^2}{d\tau^2}$$

приведем (6.1) к виду

$$x'' - u^{\cdot}x' - \Omega u y' = -u^2 V_x, \qquad y'' - u^{\cdot}y' + \Omega u x' = -u^2 V_y \tag{6.2}$$

Для получения нормальной конфигурации необходимо освободиться от членов, линейных относительно скоростей, что приводит к двум условиям

$$u^{\cdot}x' + \Omega u y' = 0, \qquad \Omega u x' - u^{\cdot}y' = 0$$

Полагая определитель этой системы относительно переменных x' и y' равным нулю, получим для определения $u\ (x,\ y)$ соотношение $u^{\cdot 2} + \Omega^2 u^2 = 0$, что невозможно, поскольку $\Omega \neq 0$, а $u\ (x,\ y)$ — действительная, положительная функция ($u > 0$). Теорема доказана.

Что же касается систем обратимого типа ($\Omega = 0$), то здесь при помощи регуляризирующего преобразования времени (3.1) можно получить нормальную конфигурацию. Так, например, в задаче двух тел преобразованием Леви — Чивита [12] система приводится к нормальной конфигурации.

7. Системы типа Лиувилля. Для таких систем функция Гамильтона H (**p**, **q**) может быть приведена к виду

$$H = \frac{1}{2u(\mathbf{q})} \sum_{j=1}^{k} (p_j^2 + 2V_j(q_j)) \qquad (H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = h) \tag{7.1}$$

$$u(\mathbf{q}) = u_1(q_1) + u_2(q_2) + \ldots + u_k(q_k) \qquad (u(\mathbf{q}) > 0)$$

Уравнения Гамильтона для систем типа Лиувилля (7.1) имеют вид

$$q_j^{\cdot} = \frac{1}{u} p_j, \qquad p^{\cdot}_j = \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial q_j} (hu_j(q_j) - V_j(q_j)) \tag{7.2}$$

Отсюда, пользуясь известным методом [1], получим следующую систему уравнений:

$$uq_j^{\cdot} = (2\Phi_j(q_j))^{1/2} \qquad (\Phi_j(q_j) = hu_j(q_j) - V_j(q_j) + \gamma_j) \tag{7.3}$$

Здесь h — постоянная энергии, а γ_j — постоянные интегрирования, удовлетворяющие в силу интеграла энергии условию $\gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_k = 0$.

Теорема 7.1. Пусть для рассматриваемой системы типа Лиувилля (7.1) при заданном значении постоянной энергии h функции $\Phi_j\ (q_j)$ (7.3) имеют вид: $\Phi_j\ (q_j) = {}^1/_2\ \sigma_j q_j^2 + c_j$ ($c_j = \mathrm{const}$). Тогда система Лиувилля (7.1) допускает нормальную конфигурацию как относительно координат q_j, так и относительно импульсов p_j. Чтобы убедиться в этом, введем новую переменную τ, полагая $d\tau = dt/u\ (q)$ ($u\ (q) > 0$). Получим

$$q'_j = (\sigma_j q_j^2 + 2c_j)^{1/2}, \qquad q_j'' = {}^1/_2 (\sigma_j q_j^2 + 2c_j)^{-1/2} 2\sigma_j q_j q_j' = \sigma_j q_j$$

Далее пишем следующую цепочку равенств:

$$p_j = q_j', \qquad p_j' = q_j'' = \sigma_j q_j, \qquad p_j'' = \sigma_j q_j' = \sigma_j p_j$$

Заметим, что теорема 7.1 справедлива и в том случае, когда $\Phi_j\ (q_j)$ является квадратичной функцией вида $\Phi_j\ (q_j) = {}^1/_2 \sigma_j q_j^2 + a_j q_j + b_j\ (a_j,\ b_j = \mathrm{const})$, поскольку этот случай линейной подстановкой может быть приведен к предыдущему.

8. **Однородные системы.** Так будем называть системы типа Лиувилля (7.1), когда $u(\mathbf{q}) \equiv 1$, а кинетическая $T(\mathbf{q}, \mathbf{q}^{\cdot})$ и потенциальная $V(\mathbf{q})$ энергии представляют суперпозицию однородных функций вида

$$T(\mathbf{q}, \mathbf{q}^{\cdot}) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k} a_j q_j^{\nu} q_j^{\cdot 2}, \qquad V(\mathbf{q}) = \sum_{j=1}^{k} c_j q_j^{n} \qquad (a_j, c_j = \mathrm{const}) \tag{8.1}$$

Записав уравнения движения

$$a_j q_j^{\nu} q_j^{\cdot\cdot} + {}^1/_2 \nu a_j q_j^{\nu-1} q_j^{\cdot 2} + n c_j q_j^{n-1} = 0 \tag{8.2}$$

в результате интегрирования получаем систему k первых интегралов

$${}^1/_2 a_j q_j^{\nu} q_j^{\cdot 2} + c_j q_j^{n} = h_j \qquad (h_1 + \ldots + h_k = h; \; j = 1, 2, \ldots, k) \tag{8.3}$$

где h — постоянная энергии для исходной системы (8.1).

Определим те значения параметров ν и n, при которых имеют место нормальные конфигурации. Сделав замену переменных $q_j = \xi_j^{-\alpha}$, где α — некоторая постоянная, и определив $q_j^{\cdot}$ и $q_j^{\cdot\cdot}$, получим уравнения движения в следующей форме:

$$-\alpha a_j \xi_j^{-\alpha\nu-\nu-1} \xi_j^{\cdot\cdot} + \alpha a_j \left(1 + \alpha + \frac{\alpha\nu}{2}\right) \xi_j^{\cdot 2} \xi_j^{-\alpha\nu-\nu-2} + n c_j \xi_j^{-n\alpha+\alpha} = 0$$

Выберем теперь α таким образом, чтобы коэффициент при $\xi_j^{\cdot 2}$ обратился в нуль. Это дает $\alpha = -2(2+\nu)^{-1}$ $(2 + \nu \neq 0)$ и, следовательно, в результате упрощений получаем

$$\xi_j^{\cdot\cdot} + \frac{1}{2} n (2+\nu) \frac{c_j}{a_j} \xi_j^{\beta} = 0 \qquad \left(\beta = \frac{2n - \nu - 2}{2 + \nu}\right) \tag{8.4}$$

Для получения нормальных конфигураций необходимо положить $\beta = 1$. При этом $2 + \nu - n = 0$ и, следовательно, (8.4) принимает вид

$$\xi_j^{\cdot\cdot} + \sigma_j \xi_j = 0 \qquad (\sigma_j = {}^1/_2 n^2 c_j / a_j) \tag{8.5}$$

Укажем, что полученное соотношение $2 + \nu - n = 0$ является условием, при котором натуральные лагранжевы системы (8.1) допускают однопараметрическую группу преобразований геометрического подобия вида $q_j^* = \lambda q_j$ [13].

Теорема 8.1. Пусть для однородных систем (8.1) степени однородности союзного выражения кинетической энергии $T^*(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ и потенциальной энергии $V(\mathbf{q})$ относительно q_j связаны условием $2 - \nu - n = 0$. Тогда существуют интегралы вида

$$(q_1^{\cdot} p_1 - p_1^{\cdot} q_1) + (q_2^{\cdot} p_2 - p_2^{\cdot} q_2) + \ldots + (q_k^{\cdot} p_k - p_k^{\cdot} q_k) = nh \tag{8.6}$$

Действительно, так как обобщенный импульс $p_j = a_j q^{\nu}{}_j q^{\cdot}{}_j$, то функция Гамильтона имеет следующий вид:

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k} a_j^{-1} q_j^{-\nu} p_j^2 + \sum_{j=1}^{k} c_j q_j^{n} \tag{8.7}$$

Отсюда в силу теоремы Эйлера об однородных функциях, а также интеграла энергии $H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = h$ получаем

$$\sum_{j=1}^{k} \left(\frac{\partial H}{\partial p_j} p_j + \frac{\partial H}{\partial q_j} q_j \right) = (2 - \nu - n) T^* + nh \tag{8.8}$$

что и приводит в силу условия $2 - \nu - n = 0$ к интегралам (8.6).

Теорема 8.2. Пусть однородная система с гамильтонианом (8.7) допускает нормальную конфигурацию как относительно координат q_j, так и относительно импульсов p_j. Тогда степени однородности союзного выражения кинетической энергии T^* ($\mathbf{q}$, $\mathbf{p}$) и потенциальной энергии $V(\mathbf{q})$ относительно координат q_j будут соответственно равны $\nu = 0$ и $n = 2$.

Действительно, в силу условий теоремы имеем $q_j^{\cdot\cdot} = \sigma_j q_j$, $p_j^{\cdot\cdot} = \sigma_j p_j$ и, следовательно, $q_j^{\cdot\cdot} p_j - p_j^{\cdot\cdot} q_j = 0$, что после интегрирования дает $q_j^{\cdot} p_j - p_j^{\cdot} q_j = \alpha_j$ ($\alpha_j = \text{const}$). Суммируя полученные интегралы по индексу j и пользуясь уравнениями Гамильтона (2.1), а также соотношением (8.8), получаем

$$(2 - \nu - n)\, T^*(q, p) + nh = \alpha \qquad (\alpha_1 + \ldots + \alpha_k = \alpha)$$

что приводит к условию $2 - \nu - n = 0$. Но для однородных систем (8.1), допускающих нормальную конфигурацию относительно координат q_j, должно выполняться, как это было показано выше, условие $2 + \nu - n = 0$. Сопоставляя полученные два условия относительно ν и n, получаем, что $\nu = 0$ и $n = 2$.

9. Подобные системы. К таким будем относить натуральные консервативные системы (8.1), допускающие группу преобразований подобия

$$q_j' = \lambda q_j, \qquad t' = \tau t \qquad (\lambda, \tau = \text{const}) \tag{9.1}$$

Это означает, что если существует некоторое решение $q_j = q_j(t)$ системы уравнений, то существует также решение вида

$$q_j' = \lambda q_j(\tau^{-1} t') = \lambda q_j (\lambda^{n/2 - \nu/2 - 1} t') \qquad (\lambda \neq 0) \tag{9.2}$$

Этот результат следует из того факта, что для рассматриваемых систем (8.1) в силу преобразований (9.1), должно выполняться соотношение (9.3), вытекающее из соображений подобия [14]

$$\lambda^{2 + \nu - n} \tau^{-2} = 1 \tag{9.3}$$

Теорема 9.1. Пусть система (8.1) обладает нормальной конфигурацией $q_j^{\cdot\cdot} = \sigma_j q_j$ ($j = 1, 2, \ldots, k$) и, кроме того, допускает группу преобразований подобия (9.1). Тогда выполняется условие геометрического подобия $2 + \nu - n = 0$.

Этот результат следует непосредственно из условия (9.3), а также из условия существования нормальной конфигурации, поскольку при этом $\tau^{-2} = 1$.

Заметим, что при $\nu = 0$ наряду с решениями $q_j = q_j(t)$ в силу (9.2) существуют также решения

$$q_j' = \lambda q_i (\lambda^{n/2 - 1} t') \qquad (t' = t)$$

что совпадает с результатом, полученным ранее Уинтнером [5].

10. Обобщенные системы. К таким будем относить консервативные системы, у которых функция Гамильтона H (p, q) имеет вид

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = H^*(\mathbf{p}, \mathbf{q}) / u(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \qquad (H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = h, \; u(\mathbf{p}, \mathbf{q}) > 0) \qquad (10.1)$$

Здесь H^* и u представляют суперпозицию функций H_j и u_j, каждая из которых зависит только от p_j и q_j

$$H^* = H_1(p_1, q_1) + \ldots + H_k(p_k, q_k), \qquad u = u_1(p_1, q_1) + \ldots + u_k(p_k, q_k) \qquad (10.2)$$

Эти системы являются обобщением систем типа Лиувилля и относятся к классу интегрируемых систем [15].

Уравнения Гамильтона в силу (10.1) и (10.2) и интеграла энергии $H^*(\mathbf{p}, \mathbf{q}) - hu(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = 0$ после некоторых преобразований можно привести к виду

$$u\frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial K_j}{\partial p_j}, \qquad u\frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial K_j}{\partial q_j} \qquad (K_j(p_j, q_j) = H_j - hu_j) \qquad (10.3)$$

Теорема 10.1. Пусть $H_j(p_j, q_j)$ и $u_j(p_j, q_j)$ — однородные функции соответственно степени m и n относительно каждой из переменных p_j и q_j. Тогда билинейная форма $\Omega(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = p_1q_1 + p_2q_2 + \ldots + p_kq_k$ канонических переменных p_j и q_j — интеграл уравнений движения.

Действительно, умножая уравнения (10.3) соответственно на p_j и q_j и складывая их, после суммирования по индексу j получаем

$$u\frac{d\Omega}{dt} = \sum_{j=1}^{k}\left(\frac{\partial H_j}{\partial p_j}p_j - \frac{\partial H_j}{\partial q_j}q_j\right) - h\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{\partial u_j}{\partial p_j}p_j - \frac{\partial u_j}{\partial q_j}q_j\right) \qquad (10.4)$$

Отсюда в силу условий теоремы, а также теоремы Эйлера об однородных функциях получаем, что $\Omega(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \text{const}$.

Теорема 10.2. Пусть выполняются условия теоремы (10.1) относительно степеней однородности функций $H_j(p_j, q_j)$ и $u_j(p_j, q_j)$.

Тогда существует интеграл вида

$$(q_1^{\boldsymbol{\cdot}}p_1 - p_1^{\boldsymbol{\cdot}}q_1) + \ldots + (q_k^{\boldsymbol{\cdot}}p_k - p_k^{\boldsymbol{\cdot}}q_k) = 2h(m - n) \qquad (10.5)$$

Чтобы убедиться в этом, умножим уравнения (10.3) соответственно на p_j и q_j и составим их разность. После суммирования по индексу j в силу теоремы Эйлера об однородных функциях получим

$$u(\mathbf{p}, \mathbf{q})((q_1^{\boldsymbol{\cdot}}p_1 - p_1^{\boldsymbol{\cdot}}q_1) + \ldots + (q_k^{\boldsymbol{\cdot}}p_k - p_k^{\boldsymbol{\cdot}}q_k)) = 2mH^*(\mathbf{p}, \mathbf{q}) - 2nhu(\mathbf{p}, \mathbf{q})$$

Заменяя здесь $H^*(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ через $hu(\mathbf{p}, \mathbf{q})$, что непосредственно следует из интеграла энергии, после сокращения на неравный нулю множитель $u(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ получим (10.5).

Теорема 10.3. Пусть H_j зависит только от p_j и является однородной функцией p_j степени m, и u_j зависит только от q_j, являясь однородной функцией q_j степени n. Тогда при ненулевом значении постоянной энергии h и при $m+n\neq 0$ существует интеграл, допускающий разбиение на билинейную форму Ω ($\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$) и вековой член $(m+n)ht$.

Действительно, из (10.4) в силу теоремы Эйлера об однородных функциях получаем $u\Omega^{\cdot} = mH^* + hnu = u\,(m+n)h$. Сокращая на неравный нулю множитель u ($\mathbf{p}, \mathbf{q}$) и интегрируя, получим интеграл

$$\Omega\,(\mathbf{p},\,\mathbf{q}) = (m+n)ht + \mathrm{const} \qquad (10.6)$$

Следствие 10.3. При выполнении условий предыдущей теоремы относительно степеней однородности, билинейная форма Ω ($\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$) будет интегралом уравнений движения в двух случаях: а) $h=0$, б) $(m+n)=0$

Это следует непосредственно из интеграла (10.6).

Теорема 10.4. Пусть H_j (p_j, q_j) и u_j (p_j, q_j) — квадратичные функции вида

$$H_j = {}^1/_2\,(a_jp_j^2 + c_jq_j^2),\quad u_j = {}^1/_2\,(b_jq_j^2 + d_jp_j^2) \qquad (a_j,\ b_j,\ c_j,\ d_j = \mathrm{const}) \qquad (10.7)$$

Тогда система (10.1) допускает нормальную конфигурацию как относительно координат q_j, так и относительно импульсов p_j.

Действительно, вводя новую переменную τ, полагая $d\tau = dt/\,u$, уравнения (10.3) в силу (10.7) приведем к виду

$$q_j' = (a_j - hd_j)\,p_j,\qquad p_j' = (-c_j + hb_j)\,q_j$$

Отсюда непосредственно следует существование нормальных конфигураций как относительно координат, так и относительно импульсов

$$q_j'' = \sigma_j q_j,\qquad p_j'' = \sigma_j p_j\qquad (\sigma_j = (a_j - hd_j)\,(-c_j + hb_j))$$

Поступила 13 I 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Уиттекер Е. Т. Аналитическая динамика. М.—Л., Гостехиздат, 1937.
2. Франк Ф., Мизес Р. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, ч. 2. Л.—М., Гостехиздат, 1937, стр. 92.
3. Голдстейн Г. Классическая механика. М., Гостехиздат, 1957, стр. 319.
4. Macmillan W. D. Dynamics of rigid bodies. New York — London (Русск. перев.: Динамика твердого тела. М., Изд-во иностр. лит., 1951).
5. Wintner A. The analitical foundations of celestial mechanics. London. Univ. press (Русск. перев.: Аналитические основы небесной механики. М., «Наука», 1967).
6. Hagihara Y. Dynamical principles and transformation theory. The MIT Press, Cambr., Massachusets, 1970, p. 242.
7. Биркгоф Дж. Д. Динамические системы. М.—Л., Огиз, 1941.
8. Siegel C. L. Vorlesungen über Himmels-Mechanik. Berlin, Springer — Verlag, (Русск. перев.: Лекции по небесной механике. М., Изд-во иностр. лит., 1959, стр. 57, 58).
9. Аппель П. Теоретическая механика, т. 2. М., Физматгиз, 1960, стр. 292.
10. Булгаков Б. В. Колебания. М., Гостехиздат, 1954, стр. 204.
11. Charlier C. L. Die Mechanik des Himmels. Berlin und Leipzig, 1927 (Русск. перев.: Небесная механика. М. «Наука», 1966).
12. Szebehely V. Poincaré's hydrodynamic analogy in celestial mechanics. Celest. Mech. 1970, vol. 2, No. 3, p. 339—349.
13. Беленький И. М. О финальных движениях консервативных систем. ПММ, 1968, т. 32, вып. 6.
14. Беленький И. М. Введение в аналитическую механику. М., «Высшая школа», 1964.
15. Synge J. L. Classical dynamics. Berlin, Springer-Verlag (Русск. перев.: Классическая динамика. М., Физматгиз, 1963).