Прикладная математика и механика. Том 36, 1972

УДК 530.1

ОБ УСЛОВИЯХ НА СИЛЬНЫХ РАЗРЫВАХ В ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ

Л. И. Седов

(Москва)

В рамках общей теории относительности при помощи базисного вариационного уравнения дано построение обобщенных моделей среды и поля при наличии внутренних степеней свободы. Установлены условия на сильных разрывах. Обсуждаются условия на сильных разрывах для компонент метрического тензора.

В физических моделях полей и сплошных сред вводится система характеристических величин и для их определения соответствующая система уравнений дифференциальных или вообще функциональных. Одни уравнения этой системы выражают собой непосредственно или являются соответствующими обобщениями известных универсальных законов сохранения, другие — носят характер кинетических уравнений или соотношений типа уравнений состояния.

Кроме такого рода уравнений построение моделей и постановки задач связано с формулированием условий на сильных разрывах внутри области, занятой рассматриваемой средой, и с условиями на границах выделяемого объема среды, которые тоже можно устанавливать как условия разрывного или непрерывного контакта данной среды с отделяемыми внешними объектами. По сути дела, условия на границе всегда можно рассматривать как полные или упрощенные соотношения на скачках, в которых учитываются свойства данной модели и модельные представления о свойствах внешних сред. Таким образом, в качестве исходной базы для получения граничных условий можно пользоваться условиями на сильных разрывах или, в частности, соответствующими условиями о непрерывности контактов.

Хорошо известны методы установления условий на скачках внутри среды или на границах среды при помощи интегральных представлений законов сохранения и предельных переходов от непрерывных процессов в данной среде или от непрерывных процессов и явлений в более сложных средах к разрывным процессам в данной среде.

В настоящее время в теорию и практику вводятся усложненные модели, для которых состояние элементарных объемов характеризуется рядом параметров, таких как характеристики деформации, состава смеси, структуры строения молекул и молекулярных агрегатов, характеристики дислокаций, электромагнитного состояния и т. п.

Присутствие такого рода параметров связано с появлением новых «динамических уравнений» и с увеличением числа условий на слабых или сильных разрывах.

В некоторых случаях толкование физической сущности соответствующих параметров вытекает из формулировки макроскопических соотношений, которые необходимо добавить к уже известным соотношениям для определения соответствующих параметров, позволяющих описывать некоторые классы явлений. При более углубленном рассмотрении сути дела, можно увидеть, что именно таким путем устанавливается физическая сущность любых физических макроскопических величин.

В работах [1–6] были развиты унифицированные, общие, регулярные методы, связанные с основными физическими теориями, для конструирования моделей с помощью вывода замкнутой системы уравнений и условий на скачках, эквивалентных одному базисному вариационному уравнению

$$\delta \int\limits_{V_4} \Lambda d\tau + \delta W^* + \delta W = 0 \tag{1}$$

где Λ — задаваемая функция Лагранжа, у которой аргументы — это параметры и их производные по времени и по координатам, определяющие независимо физическое состояние «элементарной частицы» в элементарных четырехмерных объемах $d\tau$, взятых в любом конечном, мысленно выделенном четырехмерном объеме пространства-времени V_4. Задаваемый функционал δW^* может содержать объемный интеграл по V_4 и поверхностные интегралы по Σ, являющейся границей V_4, и по системе двух сторон поверхностей разрыва S_3, которые могут присутствовать внутри V_4. В обоих интегралах подынтегральные функции представляют собой линейные функции вариаций определяющих параметров. Присутствие δW^* в уравнении (1) связано с наличием взаимодействий данной среды с внешними объектами и с неголономной природой объемного интеграла в δW^*, что обуславливается необратимыми эффектами, которые также могут описываться при помощи уравнения (1).

В уравнении (1) вариации определяющих параметров на Σ и на S отличны от нуля. Добавочный член δW входит в уравнение (1) для компенсации соответствующих поверхностных интегралов в δW^* и интегралов, возникающих после варьирования первого объемного интеграла, когда вариации на границе Σ отличны от нуля.

Для простейших классических моделей материальных сред величину δW^* можно определить следующей формулой, содержащей только объемный интеграл:

$$\delta W^* = \int_{V_4} (\rho T \delta S - \mathbf{F}\delta \mathbf{r})\, d\tau \tag{2}$$

где ρ — массовая плотность среды, T — температура, S — энтропия единицы массы, а $\mathbf{F}$ и $\delta\mathbf{r}$ — четырехмерные векторы внешней пондеромоторной объемной силы и мысленной вариации смещения в данной точке. В трехмерной трактовке $\mathbf{F}\delta\mathbf{r}$ дает работу трехмерной объемной силы и соответствующий приток энергии.

При учете свойства вязкости среды в выражении для δW^*, кроме объемного интеграла, появляется также поверхностный интеграл, определяющий работу вязких напряжений на поверхности Σ.

В общем случае вариационное уравнение (1) представляет собой проинтегрированное по объему V_4 полное, с учетом всех энергообменов уравнение энергии, написанное для элементарного объема $d\tau$ и обобщенное на любые бесконечно малые мысленные вариации определяющих параметров. В этом обобщенном уравнении действительные изменения определяющих параметров, происходящие за счет изменения времени, заменяются через мысленные вариации.

В тех случаях, когда среди определяющих параметров имеются последовательные производные по времени, в вариационном уравнении, по сравнению с уравнением энергии, могут появляться добавочные члены. Эти добавочные члены в вариационном уравнении для действительных процессов точно равны нулю, а для варьированных — могут отличаться от нуля и оказывать существенное влияние на соотношения, вытекающие из (1).

Связь базисного уравнения с классическим вариационным принципом Лагранжа и с полным уравнением энергии — это физические источники для конструирования функции Лагранжа Λ и функционала δW^*. В частности, эти данные позволяют также при определении δW^* опереться на методы и результаты термодинамики необратимых процессов (классический и обобщенный принцип Онзагера, различного рода на опыте проверенные принципы максимума или минимума роста энтропии или других величин; ассоциированный закон в теории пластичности и др.).

Как было показано в работах, процитированных выше, вычисление члена δW, когда Λ и δW^* заданы, позволяет легко установить в общем случае уравнения состояния среды (обобщенные уравнения типа закона Гука, типа законов поляризации и намагниченности и др.).

Все предыдущие общие соображения и уравнение (1) могут применяться как в рамках ньютоновской механики, так и в рамках Специальной (СТО) и Общей теории относительности (ОТО) и при дальнейших их обобщениях.

В качестве основного примера, имеющего самостоятельное значение, рассмотрим базисное уравнение (1) в рамках ОТО и найдем соответствующие условия на сильных разрывах в гравитационном поле. Кроме этого, в связи с рассматриваемой теорией сделаем также некоторые общие замечания, имеющие самостоятельный смысл.

В ОТО пространственно-временной континуум представляет собой четырехмерное риманово пространство, для которого метрика в системе координат наблюдателя $x^1x^2x^3x^4$ представляется квадратичной формой вида

$$ds^2 = g_{ij}dx^idx^j \tag{3}$$

Здесь g_{ij} $(x^1x^2x^3x^4)$ — компоненты метрического тензора.

Эта форма (3) в каждой точке пространства локально может быть преобразована к галилеевому виду (ортогональная декартова система координат)

$$ds^2 = c^2dt^2 - (dy^1)^2 - (dy^2)^2 - (dy^3)^2 \tag{4}$$

Здесь c — скорость света, а dt — приращение времени.

Компоненты метрического тензора g_{ij} можно рассматривать как искомые параметры, характеризующие внутренние степени свободы, связанные со свойствами физически определяемого риманового пространства. В СТО пространство известно заранее и поэтому g_{ij} нужно считать известными величинами, которые можно выбирать в рамках псевдоевклидового пространства в известном смысле произвольно.

В соответствии с обычными представлениями определение симметрии метрических свойств пространства состоит в следующем предложении.

Метрика пространства обладает симметрией, если в данном пространстве существует нетривиальная (имеются в виду преобразования, отличные от тождественного и простого изменения знаков у координат) группа преобразований $x'^i = \varphi_A{}^i\,(x^1x^2x^3x^4)$, для которых

$$g_{ij}'(x^k) = g_{ij}(x^k) = g_{pq}(x'^k)\,\frac{\partial\varphi_A{}^p}{\partial x^i}\frac{\partial\varphi_A{}^q}{\partial x^j}\,; \quad \{A\} \tag{5}$$

где $g_{ij}(x^k)$ и $g_{ij}'(x^k)$ — первоначальные и преобразованные компоненты метрического тензора. Индекс A выделяет элемент из группы преобразований. Системы координат, удовлетворяющие соотношениям (5), с точки зрения метрических свойств пространства полностью эквивалентны.

Евклидовы и псевдоевклидовы пространства симметричны; для них при соответствующем фиксировании функций $g_{ij}(x^k)$ для метрического тензора выделяются целые классы эквивалентных систем координат и поэтому для них нельзя получить таким путем единственной выделенной системы координат. В этих пространствах геометрически (кинематически) все системы координат соответствующего класса равноправны и, в частности, равноправны все системы координат, в которых метрика представляется в (4) и которые получаются из данной при помощи преобразований Лоренца.

В общем случае римановы пространства не симметричны и поэтому для данного риманового пространства фиксирование соответствующих функций $g_{ij}(x^k)$ полностью выделяет единственную систему координат; таким образом, в пространствах Римана общего вида нет глобально (в конечной части пространства) метрически эквивалентных различных систем координат.

Однако для риманового пространства локально вводимая метрика (4) в касательном псевдоевклидовом пространстве обладает всеми свойствами симметрии псевдоевклидового пространства и, следовательно, не определяется однозначно.

Очевидно, что римановы пространства различного частного вида могут обладать симметрией и иметь метрику, инвариантную относительно различных соответствующих групп преобразований симметрии.

В СТО пространство псевдоевклидово, а класс эквивалентных инерциальных систем координат вводится условно по их связи с выделяемыми, специальными условиями, физическими телами.

В ОТО каждая глобальная система координат при отсутствии симметрии является геометрически и одновременно физически выделенной.

Однако в ОТО при помощи локально определенного преобразования координат в каждой точке пространства в касательном псевдоевклидовом пространстве можно ввести соответствующую метрику вида (4), инвариантную относительно преобразований Лоренца. Из инвариантности формы (4) следует, что это локальное преобразование определяется неоднозначно.

Основной принцип относительности Галилея — Ньютона состоит в утверждении, что все законы природы, формулируемые в виде соотношений между величинами, определенными в различных системах координат наблюдателей, сохраняют свой вид в инерциальных системах координат. В ОТО для любой точки риманова пространства этот принцип относительности формулируется локально в локальных координатах (4), которые играют роль локальных инерциальных координат, аналогичных глобальным инерциальным системам координат, выделенных в СТО физическими телами, например системой «неподвижных» звезд.

Кроме этого, как в ньютоновской механике, так в СТО и в ОТО в качестве дополнительного допущения для некоторых основных величин и соотношений, определенных предварительно в глобальных или в локальных инерциальных системах, вводятся предположения о сохранении их скалярной, векторной или тензорной природы в произвольных системах координат.

Можно привести много примеров конкретных величин, для которых такое допущение не выполняется. Поэтому требуется вводить и использовать в качестве физических характеристик такие величины, для которых указанное допущение («принцип ковариантности») выполняется. При выполнении принципа ковариантности общий тензорный вид физических соотношений в различных выделенных или в эквивалентных, или в вообще произвольных системах координат одинаков, тогда как фактически написанные соотношения или отдельные члены этих соотношений в различных системах координат могут быть различными.

Фактическое выделение определенных систем координат производится при помощи различных условий и конструкций и, в частности, в метрическом пространстве при помощи допустимых частных предположений о виде функций g_{ij} $(x^1x^2x^3x^4)$ для компонент метрического тензора.

В псевдоевклидовом пространстве невозможно выделение конкретной системы координат на основе только геометрических соображений, поэтому для фактического выделения системы координат необходимо устанавливать еще связь системы координат с конкретными физическими телами.

Определение сопутствующей системы координат связано с индивидуализацией точек некоторой материальной или вообще мысленно определенной среды. Для физических материальных тел отдельные точки среды можно фиксировать при помощи трех лагранжевых координат $\xi^1\xi^2\xi^3$ и подобной времени переменной координаты ξ^4 вдоль мировой линии, отвечающей данной индивидуальной точке среды. Очевидно, что сопутствующие системы координат можно выбирать с некоторым произволом, который можно устранять дополнительными условиями.

Конкретные системы координат наблюдателя $x^1x^2x^3x^4$ можно вводить как сопутствующие системы координат для некоторых данных физически реальных или идеальных сред — тел, распространяемых по определенному условию на все пространство и выбираемых в качестве тел системы отсчета.

В несимметричном римановом пространстве систему координат наблюдателя можно вводить единственным способом при помощи чисто геометрических конструкций и, в частности, при помощи допустимой в любом римановом пространстве конкретизации функций g_{ij} $(x^1x^2x^3x^4)$.

Например, можно ввести синхронные системы координат, для которых форма (3) в некоторой конечной области пространства, содержащей точку $t_0x_0{}^1x_0{}^2x_0{}^3$, имеет следующий специальный вид:

$$ds^2 = c^2dt^2 + g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, 3) \tag{6}$$

Синхронная система координат выделяется однозначно, если ввести еще следующие дополнительные условия для компонент $g_{\alpha\beta}$ $(x^1x^2x^3,t)$:

$$g_{11}(x^1x^2x^3,t_0) = -1, \quad g_{12}(x^1x^2x^3,t_0) = g_{13}(x^1x^2x^3,\ t_0) = 0$$
$$g_{22}(x_0{}^1x^2x^3,\ t_0) = -1, \quad g_{23}(x_0{}^1x^2x^3,\ t_0) = 0$$

а в точке $x_0{}^1$, $x_0{}^2$, $x_0{}^3$, t_0 имеем $g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1$.

На основании известной теоремы Римана [7] указанную систему координат можно ввести.

Пусть в данном несимметричном римановом пространстве выделена система наблюдателя $x^1x^2x^3x^4$ и имеется некоторая среда с точками, индивидуализированными координатами $\xi^1\xi^2\xi^3\xi^4$. В этом случае имеем

$$ds^2 = g_{ij}(x^k)\,dx^i dx^j = \hat{g}_{pq}(\xi^k)\,d\xi^p d\xi^q \tag{7}$$

Преобразование координат

$$x^i = x^i(\xi^1\xi^2\xi^3\xi^4) \tag{8}$$

представляет собой не что иное, как закон движения данной среды относительно системы координат наблюдателя. В общем случае четыре функции (8) определяются однозначно из следующих десяти уравнений с частными производными:

$$g_{ij}(x^k)\frac{\partial x^i}{\partial \xi^p}\frac{\partial x^j}{\partial \xi^q} = \hat{g}_{pq}(\xi^k) \tag{9}$$

если функции $g_{ij}(x^k)$ и $g_{pq}(\xi^k)$ известны и отвечают согласно (7), метрике одного и того же пространства Римана.

Задачи механики можно ставить как задачи об определении функций $\hat{g}_{pq}(\xi^k)$ и, следовательно, всех соответствующих метрических свойств риманового пространства. Зная эти функции по геометрическим условиям, выделяющим систему координат наблюдателя x^k в данном пространстве, можно найти преобразование (8) и компоненты $g_{ij}(x^k)$.

Таким образом, если физические уравнения для определения $\hat{g}_{pq}(\xi^k)$ можно сформулировать как автономные от системы наблюдателя, иначе говоря, как уравнения, выражающие собой связи, независимые от выбора системы координат наблюдателя x^i, то уравнения движения механики для определения закона движения (8) будут следствиями из уравнений для $\hat{g}_{pq}(\xi^k)$ и соотношений (9) с учетом условий выбора системы координат наблюдателя. Эти соображения могут служить разъяснением известного вывода о том, что обычно уравнения импульсов и энергии получаются как следствие из уравнений гравитационного поля Эйнштейна. Предыдущие рассуждения позволяют распространить этот вывод на более общие модели в теории поля.

Вместе с этим для более общих моделей, уравнения теории поля могут оказаться не автономными, т. е. содержать характеристики закона движения (8). В этом случае свойства физически и геометрически выделенной системы координат наблюдателя могут оказаться существенными, так как именно в этой системе устанавливаются основные физические закономерности, определяющие законы движения и, в частности, метрические свойства пространства. Поэтому для усложненных или может быть для упрощенных моделей (так например, при наличии симметрии метрики пространства-времени) уравнениями теории поля нельзя заменить уравнения для закона движения. В частности, в ньютоновской механике и в СТО имеет место именно такое положение дела. В этих теориях метрические свойства пространства известны и просты, а уравнения, определяющие закон движения среды, не являются простыми следствиями метрических свойств пространства, хотя эти свойства накладывают существенный отпечаток на природу и вид этих уравнений.

Очевидно также, что в случаях римановых пространств, допускающих свойства симметрии, при решении уравнений движения, которые могут вытекать из уравнений теории поля, необходимо использовать некоторые условия типа начальных условий, которые могут не требоваться при разрешении уравнений теории поля в сопутствующей системе координат.

В соответствии с принципом ковариантности при построении различных моделей в рамках ОТО величины Λ, δW^* и δW будем рассматривать как четырехмерные скаляры, которые представляют собой скалярные функционалы, зависящие от компонент четырехмерных тензоров, входящих в аргументы посредством инвариантных скалярных комбинаций.

Рассмотрим вариационное уравнение (1) в следующих частных предположениях.

В координатной системе наблюдателя x^i в качестве системы определяющих параметров возьмем следующую систему величин:

$$g_{ij}(x^1, x^2, x^3, x^4), \qquad \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \qquad \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^k \partial x^e}, \qquad \mu^A(x^k)$$

$$\nabla_i \mu^A = \frac{\partial \mu^A}{\partial x^i} + F^{Aj}_{Bs} \Gamma^s_{ij} \mu^B, \qquad K_B(\xi^k)$$

и функции закона движения точек среды

$$x^i(\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4), \qquad \partial x^i/\partial \xi^j = x_j{}^i(x^1, x^2, x^3, x^4)$$

где μ^A — некоторые термодинамические параметры — скалярные или компоненты тензоров, характеристики состояния среды (в частности, один из этих параметров может быть энтропией или температурой), через F^{Aj}_{Bs} обозначены соответствующие произведения из символов Кронекера $\delta_q{}^p$, зависящие от строения индексов A у тензорных компонент μ^A. Переменные ξ^1, ξ^2, ξ^3 — лагранжевы координаты, индивидуализирующие точки материальной среды, ξ^4 — временная координата вдоль мировой линии, $K_B(\xi^k)$ — известные заданные функции (обобщение физических постоянных).

Величины

$$g_{ij}(x^k), \qquad \mu^A(x^k), \qquad x^i(\xi^k)$$

будем рассматривать как искомые функции.

Вариации введенных величин определим равенствами

$$\delta x^i = \tilde{x}^i(\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4) - x^i(\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4)$$

$$\delta\mu^A = \tilde{\mu}^A(\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4) - \mu^A(\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4) =$$
$$= \tilde{\mu}^A(\tilde{x}^i) - \tilde{\mu}^A(x^i) + \tilde{\mu}^A(x^i) - \mu^A(x^i) = \partial\mu^A + \delta x^k \nabla_k \mu^A$$

$$\delta g_{ij} = \partial g_{ij}; \quad \partial \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \frac{\partial \partial g_{ij}}{\partial x^k}; \quad \partial \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^k \partial x^l} = \frac{\partial^2 \partial g_{ij}}{\partial x^k \partial x^l}$$

$$\partial \nabla_i \mu^A = \nabla_i \partial \mu^A + F_{Bs}^{Aj} \mu^B \partial \Gamma_{ij}^s$$

Кроме этого, легко проверить справедливость следующих равенств:

$$\delta \frac{\partial x^i}{\partial \xi^j} = x_j{}^l \nabla_l \delta x^i - \delta x^l \nabla_l x_j{}^i, \qquad \text{где} \quad \nabla_l x_j{}^i = \frac{\partial x_j{}^i}{\partial x^l} + x_j{}^s \Gamma_{sl}^i$$

Γ_{sl}^i — символы Кристофеля, и равенств

$$\delta d\tau = \left(\frac{\partial \sqrt{-g}}{\sqrt{-g}} + \nabla_l \delta x^l\right) d\tau$$

$$\left(g = |g_{ij}|, \quad \frac{\partial \sqrt{-g}}{\sqrt{-g}} = \frac{1}{2} g^{ij} \partial g_{ij}\right)$$

$$\delta K_B = 0, \quad \partial K_B = -\nabla_i K_B \delta x^i, \quad \delta\Lambda = \partial\Lambda + \delta x^i \nabla_i \Lambda$$

Рассмотрим модели, для которых Λ и δW^* имеют следующий вид:

$$\Lambda = \Lambda(R, g_{ij}, \mu^A, \nabla_k \mu^A, x_j{}^i, K_B) \tag{10}$$

$$\delta W^* = -\int_{V_4} M_A \delta\mu^A d\tau \tag{11}$$

В этом случае для δW получается формула

$$\delta W = \int_{\Sigma} \left(T^{ijk} \partial g_{ij} + G^{ijk} \frac{\partial \partial g_{ij}}{\partial s_n} + M_A{}^k \delta\mu^A + P_i{}^k \delta x^i\right) n_k d\sigma \tag{12}$$

где n_k — ковариантные компоненты вектора единичной внешней нормали к поверхности Σ, ограничивающей объем V_4. Тензоры T^{ikj}, G^{ijk}, $M_A{}^k$ и $P_i{}^k$ подлежат определению, R — скалярная кривизна риманового пространства

$$R = g^{il} R_{il} = g^{il} R_{isl}{}^s, \qquad R_{ijl}{}^s = \frac{\partial \Gamma_{il}{}^s}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma_{lj}{}^s}{\partial x^l} + (\Gamma_{pj}{}^s \Gamma_{il}{}^s - \Gamma_{pi}{}^s \Gamma_{lj}{}^p)$$

Как известно, для вариаций R верны формулы

$$\partial R = -R^{ij} \partial g_{ij} + \nabla_l W^l, \qquad \nabla_l W^l = g^{ij} \partial R_{ij}$$

$$W^l = (g^{ij} \delta_s{}^l - g^{il} \delta_s{}^j) \partial \Gamma_{ij}{}^s = (g^{ik} g^{lj} - g^{ij} g^{lk}) \nabla_k \partial g_{ij}$$

Осуществляя варьирование в уравнении (1), на основании выписанных формул для вариаций, из объемного интеграла получим следующие уравнения Эйлера:

при ∂g_{ij} (13)

$$-R^{ij}\frac{\partial\Lambda}{\partial R}+\frac{1}{2}g^{ij}\Lambda+\frac{\partial\Lambda}{\partial g_{ij}}-\nabla_q B^{ijq}-(g^{ij}g^{qk}-g^{iq}g^{jk})\nabla_q\nabla_k\frac{\partial\Lambda}{\partial R}=0$$

где $B^{ijq}=\frac{1}{2}(B_1^{ijq}+B_1^{jiq})$, причем

$$B_1^{ijq}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial\nabla_i\mu^A}F_{Bs}^{Aq}g^{sj}-\frac{\partial\Lambda}{\partial\nabla_i\mu^A}F_{Bs}^{Aj}g^{sq}+\frac{\partial\Lambda}{\partial\nabla_q\mu^A}F_{Bs}^{Ai}g^{sj}\right)\mu^B$$

при δx^i

$$\nabla_s\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial x_j^i}x_j^s\right)+\frac{\partial\Lambda}{\partial x_i^s}\nabla_i x_j^s+\frac{\partial\Lambda}{\partial K_B}\nabla_i K_B+M_A\nabla_i\mu^A=0 \qquad (14)$$

при $\partial\mu^A$

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial\mu^A}-\nabla_l\frac{\partial\Lambda}{\partial\nabla_l\mu^A}=M_A$$

Уравнение (13) представляет собой обобщение уравнений ОТО Эйнштейна. В зависимости от вида функции $\partial\Lambda/\partial R$ уравнение (13) может содержать производные до четвертого порядка от компонент метрического тензора.

После варьирования Λ и интегрирования по частям для δW получим

$$\delta W=-\int\limits_{\Sigma+S^\pm}\left\{\left[B^{ijk}+(g^{ij}g^{kl}-g^{ik}g^{lj})\nabla_l\frac{\partial\Lambda}{\partial R}\right]\partial g_{ij}-\frac{\partial\Lambda}{\partial R}(g^{ij}g^{kl}-\right. \qquad (15)$$

$$\left.-g^{il}g^{kj})\nabla_l\partial g_{ij}+\frac{\partial\Lambda}{\partial\nabla_k\mu^A}\delta\mu^A+\left(\Lambda\delta_i^{\,k}+\frac{\partial\Lambda}{\partial x_k^i}x_s^{\,k}-\frac{\partial\Lambda}{\partial\nabla_k\mu^A}\nabla_i\mu^A\right)\delta x^i\right\}n_k d\sigma$$

где Σ — трехмерная граница V_4, а S — трехмерная поверхность сильного разрыва внутри объема V_4. Интегрирование по S производится по обеим сторонам этой поверхности.

Первые два члена в поверхностном интеграле, содержащие вариации ∂g_{ij} и $\nabla_l\partial g_{ij}$, согласно общей теории [4,6], можно преобразовать к виду, представленному в формуле (12). Для получения результата этого преобразования в простом виде воспользуемся специальной системой координат, в которой в данной точке поверхности Σ или в некоторой данной точке поверхности S выполняются следующие координатные условия.

Координатная ось x' направлена по вектору нормали к Σ или к S (в точках Σ и S вектор $\mathbf{n}$ направлен по внешней нормали к объему V_4), остальные координатные линии в данной точке ортогональны к $\mathbf{n}$ и лежат в касательной плоскости к Σ или S. Здесь мы ограничимся рассмотрением точек, в которых нормаль неизотропная, т. е. $ds_n\neq 0$ и поверхности Σ или S гладкие. В такой системе координат квадратичная форма (3) в точках Σ или S приводится к виду

$$ds^2=g_{11}dx^{12}+g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta \qquad (\alpha,\beta=2,3,4) \qquad (16)$$

Ввиду гладкости поверхностей Σ или S в рассматриваемой точке на Σ или на S имеют место еще следующие равенства:

$$\frac{\partial g_{1\alpha}}{\partial x^\beta}=\frac{\partial g^{1\alpha}}{\partial x^\beta}=0 \qquad (\alpha,\beta=2,3,4)$$

Рассмотрим результат преобразования подынтегрального выражения в формуле (15) в определенной выше специальной системе координат в данной точке поверхности Σ. Ввиду произвольности соответствующих вариаций и поверхности Σ после сравнения (12) и (15) получим

$$
\begin{aligned}
-T^{11k}n_k &= B^{11k}n_k + \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial s_n} g^{11} \frac{\partial\Lambda}{\partial R} \\
-T^{1\gamma k}n_k = -T^{\gamma 1k}n_k &= B^{1\gamma k}n_k - \frac{1}{\sqrt{g^1}} g^{\gamma\beta} \frac{\partial\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial R} g^1\right)}{\partial x^\beta} \\
-T^{\alpha\beta k}n_k &= B^{\alpha\beta k}n_k + g^{\alpha\beta} \frac{\partial(\partial\Lambda/\partial R)}{\partial s_n} - \frac{1}{2} \frac{\partial\Lambda}{\partial R} \frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial s_n}
\end{aligned} \tag{17}
$$

Здесь и дальше α, β, $\gamma \approx 2,3,4$, а $dS_n^2 = g_{11}dx^{12}$ — инвариантный интервал [1] по нормали к Σ. Для элемента площади Σ имеем $d\sigma = \sqrt{G}\, dx^2dx^3dx^4$, где

$$G = |g_{\alpha\beta}| = \frac{1}{|g^{\alpha\beta}|}$$

Далее имеем

$$G^{11k}n_k = G^{\gamma 1k}n_k = G^{1\gamma k}n_k = 0, \qquad G^{\alpha\beta k}n_k = \frac{\partial\Lambda}{\partial R} g^{\alpha\beta} \tag{18}$$

Кроме этого, независимо от выбора системы координат ввиду произвольности $\delta\mu^A$, δx^i и Σ получим

$$-M_A{}^k = \partial\Lambda/\partial\nabla_k\mu^A \tag{19}$$

и

$$-P_i{}^k = \Lambda\delta_i{}^k + \frac{\partial\Lambda}{\partial x_s{}^i} x_s{}^k - \frac{\partial\Lambda}{\partial\nabla_k\mu^A} \nabla_i\mu^A \tag{20}$$

Формулы (17)—(20) можно толковать как уравнения состояния, определяющие наряду с тензором энергии-импульса $P_i{}^k$ — четырехмерным обобщением обычного трехмерного тензора внутренних напряжений,— новые тензоры $M_A{}^k$, T^{ijk} и G^{ijk}, характеризующие внутренние взаимодействия в поле и в среде [2,3].

На основании формул (17)—(20) из интеграла по двум сторонам поверхности S, ввиду произвольности объема V_4 и по предположению произвольности непрерывных на S функции x^i и вариаций ∂g_{ij}, $\partial\partial g_{ij}/\partial S_n$; $\delta\mu^A$ и δx^i, придем к следующим условиям на скачке в точках поверхности S_i:

$$[T^{ijk}n_k \sqrt{G}]_1{}^2 = 0 \tag{21}$$

$$[G^{ijk}n_k \sqrt{G}]_1{}^2 = 0 \tag{22}$$

$$[M_A{}^k n_k \sqrt{G}]_1{}^2 = 0 \tag{23}$$

$$[P_i{}^k n_k \sqrt{G}]_1{}^2 = 0 \tag{24}$$

---

[1] Если $g_{11} < 0$, то интервал ds_n — чисто мнимый в общей теории. Так как произведения, фигурирующие в подынтегральных выражениях, всегда вещественны, то нет нужды пользоваться только вещественными определениями для ds, n_k и $d\sigma$.

Здесь вектор нормали n направлен от стороны 2 к стороне 1, и принято обозначение $[A]_1^2 = A_2 - A_1$, где индексами *1* и *2* обозначены разные стороны поверхности S.

При выводе равенств (21)—(24) учтено, что координаты и их вариации на поверхности S непрерывны, тогда как метрика и элементы площади $d\sigma = \sqrt{G}dx^2dx^3dx^4$ могут быть разрывными.

При пересечении S, предположение о непрерывности координат x^i и вариаций ∂g_{ij}, $\partial\partial g_{ij}/\partial S_n$, $\delta\mu^A$ и δx^i связано с допущениями об отсутствии разрывов внутри среды типа трещин или дислокаций и с существенным требованием о превращении условий на скачках в тождества, когда на поверхности S нет сильного разрыва. Очевидно, что условия (24) совпадают с обычными уравнениями на скачке для сохранения импульса и энергии. Условия (23) возникают только в том случае, когда функция Λ зависит от градиентов $\nabla_k\mu^A$ некоторых параметров μ^A. Тензорный характер и соответствующая инвариантность соотношений (21)—(24) следует из предположения о непрерывности дифференциалов dx^α и скалярной природы величины $\sqrt{G}dx^2dx^3dx^4 = d\sigma$.

Соотношения (21) и (22) показывают, что на скачках налагаются некоторые условия на компоненты метрического тензора. При непрерывных преобразованиях координатных систем фактические соотношения, вытекающие из условий (21) и (22), могут менять свой вид, если производные от преобразованных координат по первоначальным координатам терпят разрыв при пересечении поверхности S. На поверхности S производные $\partial x^i/\partial\xi^k$ вообще разрывны, поэтому условия (21) и (22) зависят от систем координат наблюдателя на различных сторонах поверхности S.

Введение специальных координат, в которых получены формулы (17) и (18), связано, с преобразованиями координат, имеющими разрывные производные на S.

Условия (21) существенным образом зависят от наличия среди аргументов Λ градиентов параметров μ^A, причем даже при их наличии их влияние может отсутствовать полностью, когда выражения $B^{ijk}n_k$ непрерывны на S.

В ОТО, предложенной Эйнштейном, имеем

$$\Lambda = \frac{1}{2\varkappa}R + \Lambda_m \tag{25}$$

где $\varkappa$ — безразмерная гравитационная постоянная, а Λ_m — функция Лагранжа для среды и электромагнитного поля независящая от R. Если принять еще, что параметры μ^A отсутствуют или что выражения

$$\sqrt{G}B^{ijk}n_k \tag{26}$$

непрерывны, то условия на скачках (21) и (22) приводятся к весьма простому виду

$$\left[\sqrt{G}g^{11}g^{\alpha\beta}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial s_n}\right] = 0, \qquad \left[\sqrt{G}g^{\gamma\beta}\frac{\partial\sqrt{g^{11}}}{\partial x^\beta}\right] = 0 \tag{27}$$

$$\left[\sqrt{G}\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial s_n}\right] = 0, \qquad [\sqrt{G}g^{\alpha\beta}] = 0$$

Легко усмотреть, что эти условия вместе с принятым видом системы координат равносильны требованию об отсутствии сильного разрыва для всех компонент метрического тензора и для производных от компонент $g^{\alpha\beta}$ по s_n. Однако этот вывод обусловлен спецификой формулы (25) при постоянном коэффициенте $\varkappa$ и условием непрерывности (26). Для некоторых новых моделей эти свойства могут не иметь места.

Вместе с этим на основании (18) из (22) следует, что полученные выше условия о непрерывности компонент $g^{\alpha\beta}$ и $g_{\alpha\beta}$ в выбранной системе координат на S сохраняются, если $\partial\Lambda/\partial R$ непрерывно на S и, в частности, если Λ имеет вид (25).

Полученная непрерывность компонент метрического тензора будет нарушаться в других системах координат, полученных из введенной выше специальной системы при помощи преобразований с разрывными производными на поверхности S.

Поступила 16 IX 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Математические методы построения новых моделей сплошных сред. Успехи матем. наук, 1965, т. 20, вып. 5.
2. Седов Л. И. О тензоре энергии-импульса и о макроскопических взаимодействиях в гравитационном поле и в материальных средах. Докл. АН СССР, 1965, т. 164, № 3.
3. Sedov L. I. Variational methods of constructing models of continuous media. In: Irreversible aspects of continuum mechanics and transfer of Physical characteristics in moving fluids. Wien — New York, Springer — Verlag, 1968.
4. Седов Л. И. Модели сплошных сред с внутренними степенями свободы. ПММ, 1968, т. 32, вып. 5.
5. Бердичевский В. Л. Построение моделей сплошных сред при помощи вариационного принципа. ПММ, 1966, т. 30, вып. 3.
6. Лурье М. В. Применение вариационного принципа для исследования разрывов в сплошной среде. ПММ, 1966, т. 30, вып. 4.
7. Петров А. З. Пространства Эйнштейна. М., Физматгиз, 1961.