Прикладная математика и механика. Том 36, 1972

УДК 62—50

ОПТИМИЗИРУЮЩИЙ ФУНКЦИОНАЛ В КОМБИНИРОВАННЫХ УПРАВЛЕНИЯХ ДИНАМИЧЕСКИМИ ОБЪЕКТАМИ

Г. А. Крыжановский, В. А. Солодухин

(Ленинград)

Для комбинированных управлений динамическими объектами, отвечающих комплексу инженерных требований, найден оптимизирующий функционал (критерий оптимальности) единой структуры. Приведен аналитический метод построения границ переключения.

Один из возможных путей учета всего многообразия требований, предъявляемых к качеству движения динамических объектов различной природы, приводит к использованию комбинированного управления [1]. При этом рациональным комбинированным управлением считается управление, обеспечивающее оптимальность одного определенного качества из комплекса инженерных требований в определенной области фазового пространства, оптимальность другого качества достигается в следующей области и т. д. Совокупность ограничений, учитываемых при оптимизации, делает управление приемлемым в любой из областей. Такое комбинированное управление при неизменности областей оптимальности каждого из определенных качеств соответствует частному случаю, когда комплексный критерий качества управления представим в виде взвешенной суммы частных критериев с кусочно-постоянными весовыми коэффициентами [2]. Основными задачами, возникающими при реализации рациональных комбинированных управлений динамическими объектами, являются представление критериев качества (оптимизируемых функционалов) и управлений в единой структурной форме. Сюда же относится и выбор границ переключения между областями оптимизации различных критериев.

Цель данной работы — решение этих задач в частном случае динамического объекта, движение которого описывается линейными дифференциальными уравнениями. Синтезируется система стабилизации в виде рационального комбинированного управления, обеспечивающего возможно более быстрое затухание переходного процесса при больших возмущениях, а также высокую точность и малую чувствительность к изменению параметров объекта и системы стабилизации при малых отклонениях от положения устойчивого равновесия (которое считаем совпадающим с началом фазовых координат системы). При таких общих требованиях необходимо выбрать простой, конструктивный, критичный к исследуемым параметрам и представительный критерий качества комбинированного управления и закон управления единой структуры.

Пусть движение динамического объекта описывается полностью управляемой линейной системой, которую без нарушения общности можно заменить системой [3]

$$q^{\cdot} = \Phi q + Iu \qquad (|u| \leqslant 1) \tag{1}$$

Здесь q — n-мерный вектор фазовых координат объекта, Φ — матрица Фробениуса $n \times n$, $I' = (0,0, \ldots, 0, 1)$; штрих означает транспонирование.

Считаем, что u — комбинированное рациональное управление, т. е. в некоторой области Q_1, включающей начало координат, выполняются требования оптимальности по точности и малочувствительности, а в области Q_2 (внешней по отношению к Q_1) — требования оптимальности по быстродействию.

Анализ релейных систем управления объектами и систем управления с переменной структурой показывает [4,5], что требованиям точности и нечувствительности переходного процесса к изменению параметров объекта и управления можно удовлетворить, если потребовать, чтобы в области Q_1 движение системы (1) переходило в скользящий режим на некоторой гиперповерхности S без выхода изображающей точки за границы области Q_1. Будем рассматривать случай, когда S — гиперплоскость, т. е.

$$S = \sum_{i=1}^{n} k_i q_i = 0 \tag{2}$$

Управление, обеспечивающее системе скользящий режим на S, имеет вид [4,5]

$$u = -\operatorname{sign} S \tag{3}$$

Можно показать, что устойчивому скользящему режиму системы (1) с управлением (3) соответствует критерий оптимальности вида

$$J_1 = \int_0^{\infty} q' M_1 q dt \tag{4}$$

Здесь M_1 — симметрическая положительно-определенная матрица $n \times n$. Элементы матрицы M_1 определяются из решения обратной задачи оптимизации (см. приложение 1), которое имеет вид

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+p} \left(\frac{m_{i2p-i}^{(1)}}{m_{11}^{(1)}} - \frac{k_i^{(1)} k_{2p-i}^{(1)}}{k_1^{(1)2}} \right) = 0 \quad (p = 1, \ldots, n) \tag{5}$$

Выбор управления вида (3) удовлетворяет и требованию простоты соответствующего ему критерия оптимальности для области Q_1, так как коэффициенты оптимального управления $k_i^{(1)}$ $(i = 1, \ldots, n)$ определяются из предельной системы алгебраических уравнений типа Риккати.

Определение границ области Q_1 представляет собой одну из основных и сложных задач при комбинации оптимальных управлений. Эти границы могут быть образованы предельными траекториями системы (1), которые заканчиваются на граничных отрезках гиперплоскости S, определяющих область скользящего режима. Они могут быть построены и при помощи интегрирования системы (1) в обратном времени при начальных условиях, принадлежащих граничным отрезкам, и $u = \pm 1$, а также при помощи моделирования на ЭВМ [1]. Однако определенные таким образом границы области Q_1 описываются выражениями, неудобными для анализа и синтеза оптимальных систем.

В приложении 2 на основании теоремы Фаркаша [6] показано, что если выбрать область Q_1 в виде

$$\left| \sum_{j=1}^{n} b_{ij} q_j \right| \leqslant d_i, \quad d_i > 0 \quad (i = 1, \ldots, r) \tag{6}$$

то при $r = n$ будут выполнены следующие условия.

1°. Область Q_1 будет ограниченной, если имеют место соотношения

$$(\Lambda_s^{(1)} - \Lambda_s^{(2)})' B = I^{(s)}, \quad (\Lambda_s^{(1)} + \Lambda_s^{(2)})' l \geqslant 0 \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{7}$$
$$l = (1, 1, \ldots 1), \ I^{(s)} = (\delta_{1s}, \delta_{2s}, \ldots, \delta_{ns}), \quad \delta_{is} = \begin{cases} 0, & i \neq s \\ 1, & i = s \end{cases}$$

где $\Lambda_s^{(i)}$ $(i = 1,2)$ — n-мерный неотрицательный вектор.

2°. После попадания в область Q_1 фазовая точка не выйдет за ее границы, если выполнены соотношения

$$\sum_{i=1,\, i\neq s}^{p} [l_{is}^{(1)}(-d_i + d_s) + l_{is}^{(2)}(-d_i - d_s)] \mp l_s k_n d_s \leqslant -1 + (a_n - b_{sn-1}) d_s$$
$$\sum_{i=1,\, i\neq s}^{n} (l_{is}^{(1)} - l_{is}^{(2)})(b_{ij} - b_{sj}) + l_s (k_n b_{sj} - k_j) = \mp a_j - b_{sj-1} - (a_n - b_{sn-1}) b_{sj}$$
$$l_s, l_{is}^{(1)}, l_{is}^{(2)} \geqslant 0 \quad (i, s = 1, \ldots, n;\ i \neq s;\ j = 1, \ldots, n-1) \tag{8}$$

3°. При попадании фазовой точки в S в области Q_1 наблюдается скользящий режим, если имеют место соотношения

$$\lambda\left(b_{1i} - b_{1n}\frac{k_i}{k_n}\right) = k_{i-1} - a_i k_n - \frac{k_{n-1} - a_n k_n}{k_n} k_i \quad (i = 1, \ldots, n-1) \tag{9}$$
$$-\lambda d_1 \leqslant k_n \qquad (\lambda \geqslant 0)$$

Рассмотрим теперь область Q_2. Внешние ее границы обычно определяются из конструктивных или технических соображений. Внутренними служат границы области Q_1. Поэтому основная задача сводится к определению критерия оптимизации, структура которого была бы близка к (4). Важно также установить связь параметров такого критерия и оптимального управления. Как отмечалось в [7], можно добиться хороших результатов по быстродействию, используя для оптимизации функционал вида

$$J_3 = \int_0^\infty e^{2\delta t} (q' M_3 q + c u^2)\, dt \qquad (\delta > 0) \tag{10}$$

Здесь M_3 — симметрическая положительно-определенная матрица $n \times n$.

Оптимальное в смысле критерия (10) управление для системы (1) определяется в результате решения задачи аналитического конструирования регуляторов и имеет вид

$$u = \operatorname{sat} u_* = \begin{cases} u_*, & |u_*| < 1, \\ \operatorname{sign} u_*, & |u_*| \geqslant 1, \end{cases} \qquad u_* = \sum_{i=1}^{n} k_i^{(2)} q_i \tag{11}$$

Для системы (1), замкнутой заданным управлением (11), можно найти критерий оптимальности вида [8,9]

$$J_2 = \int_0^\infty (q' M_2 q + c u^2)\, dt \tag{12}$$

Здесь M_2 — симметрическая положительно-определенная матрица $n \times n$. Коэффициенты матрицы M_2 определяются из решения обратной задачи для системы (1) с управлением (11), которое имеет вид (см. приложение 1)

$$\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i+p}(m^{(2)}_{i2p-1}c^{-1} + a_i k^{(2)}_{2p-i} + a_{2p-i}k_i^{(2)} - k_i^{(2)}k^{(2)}_{2p-i}) = 0 \quad (p = 1, \ldots, n) \tag{13}$$

$$a_{n+1} = 1, \qquad k_{n+1} = 0, \qquad m^{(2)}_{in+1} = 0$$

Используя результаты работы [10], можно показать, что области оптимальности замкнутой системы (1), (11), в смысле критериев вида (10), (12) совпадают. Границы этой области D определяются многообразием касательных траекторий к гиперплоскостям

$$\sum_{i=1}^{n} k_i^{(2)} q_i = \pm 1 \tag{14}$$

Пусть область Q_2 принадлежит области D. В противном случае будем рассматривать управление (11), как квазиоптимальное в смысле критерия (10) и соответствующего ему критерия вида (12). Управление вида (11) действует только в области Q_2. При достижении границ области Q_1 в момент τ происходит переключение управления, и оно имеет вид (3). Критерий J_Σ оптимальности движения объекта во всей области можно записать в виде

$$J_\Sigma = \int_0^\tau [q'M_2 q + cu^2]\,dt + \int_\tau^\infty q'M_1 q\,dt = \int_0^\infty [q'M(q)\,q + c(q)\,u^2]\,dt \tag{15}$$

$$\{M(q), c(q)\} = \begin{cases} \{M_1, 0\}, & q \in Q_1 \\ \{M_2, c\}, & q \in Q_2 \ (q \notin Q_1) \end{cases}$$

т. е. на границе Q_1 выполняется соотношение

$$Rq'M_1 q = q'M_2 q + cu^2 \qquad (R > 0) \tag{16}$$

и система (1) с управлением (3) в области Q_1 и (11) в области Q_2 строго оптимальна в смысле критерия

$$J_\Sigma = \sum_{\nu=1}^{2} \omega_\nu(q, t)\,J_\nu, \quad \sum_{\nu=1}^{2} \omega_\nu = 1, \quad \omega_1(q, t) = \begin{cases} 1, & q \in Q_1 \\ 0, & q \in Q_2 \, (q \notin Q_1) \end{cases}$$

Критерий вида (15) удовлетворяет всем перечисленным ранее требованиям. Так, требование простоты выполняется потому, что для отыскания коэффициентов $k_i^{(1)}$, $k_i^{(2)}$ в управлениях (3) и (11) требуется одна и та же процедура решения алгебраических уравнений вида Риккати.

В области Q_1 обычно выполняется условие $|u_*| < 1$. Поэтому вместо условия (16) выполняются условия

$$RM_1 = M_2 + ck'k, \quad k = (k_1^{(2)}, \ldots, k_n^{(2)}) \tag{17}$$

Система (5), (7) — (9), (13), (17) устанавливает алгоритмическую связь между известными и искомыми коэффициентами и определяет множество критериев оптимальности вида (15) для системы (1), а также границ переключения управления вида (15) на управление вида (3). Решение полученной системы можно найти одним из методов, рассмотренных в [11].

В качестве примера рассмотрим систему

$$q_1^{\cdot} = q_2, \quad q_2^{\cdot} = q_3, \quad q_3^{\cdot} = -2q_1 - 2q_2 - 5q_3 + u, \quad |u| \leqslant 1, \quad q(0) = q_0 \tag{18}$$

Требованиям, предъявляемым к переходному процессу системы по быстродействию в области Q_2 и точности и малочувствительности в области Q_1, удовлетворяет комбинированное управление

$$u = \begin{cases} \operatorname{sat}(-10q_1 - 19.5q_2 - 5.5q_3) & q \notin Q_1 \\ -\operatorname{sign}(1.41q_1 + 3q_2 + q_3), & q \in Q_1 \end{cases} \tag{19}$$

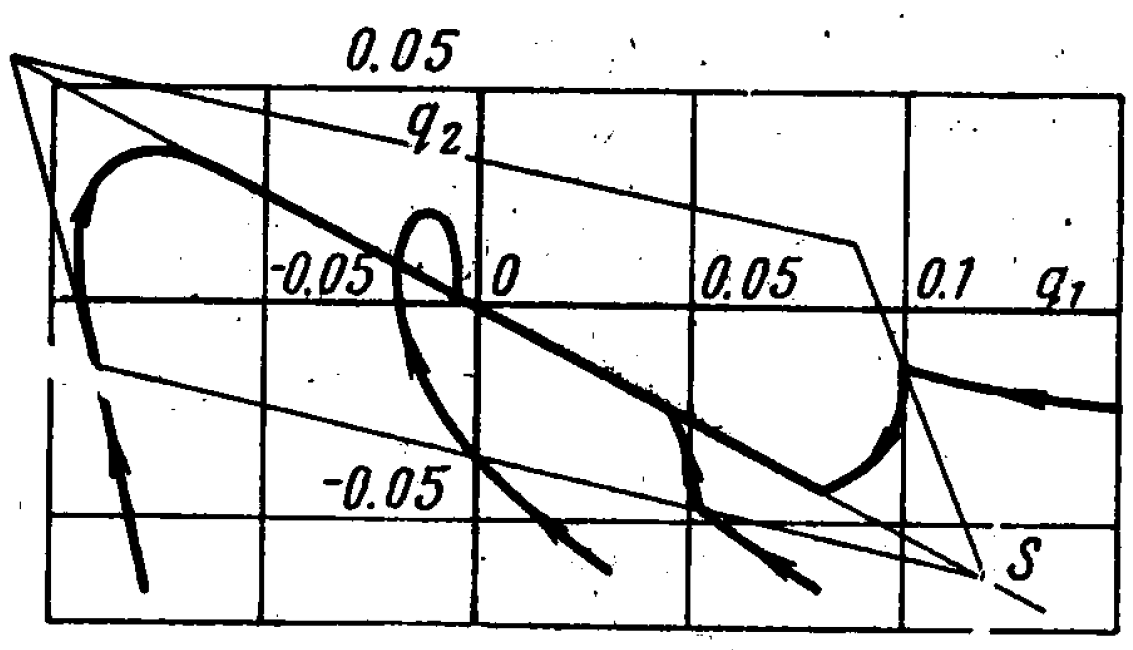
Область Q_1, найденная из соотношений (7) — (9), имеет вид

$$|0.203\, q_1 + q_2| \leqslant 0.033, \quad |2.01\, q_1 + q_2| \leqslant 0.192, \quad |2\, q_1 + q_2 + q_3| \leqslant 0.033$$

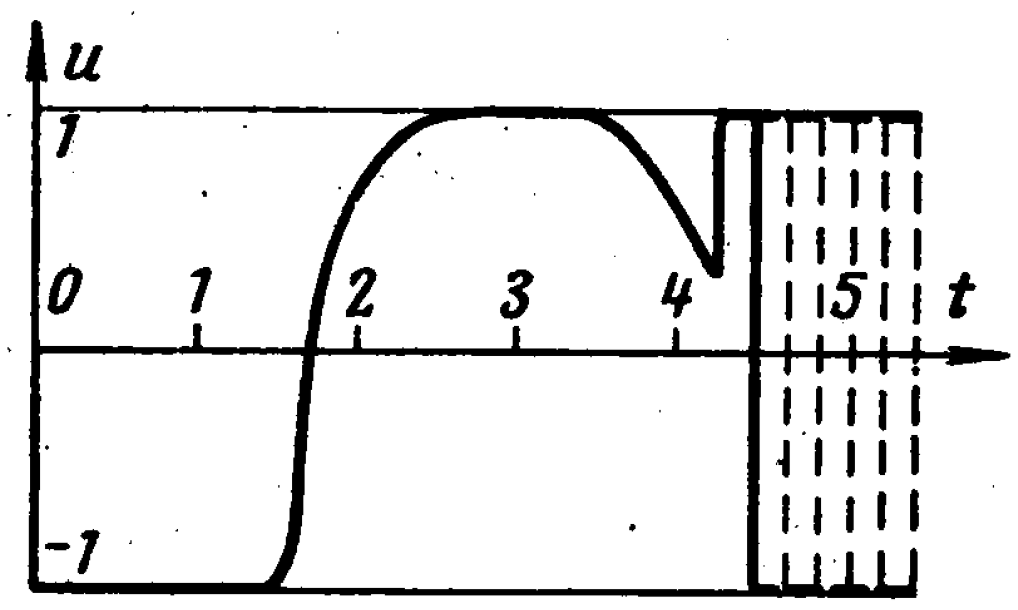
Оптимизирующий функционал (15) для системы (18) и комбинированного управления (19) определяется следующими параметрами:

$$M_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1.62 & 0.46 \\ 1.62 & 7.10 & 0.89 \\ 0.46 & 0.89 & 1 \end{vmatrix}, \qquad M_2 = \begin{vmatrix} 1.40 & 0 & 0 \\ 0 & 4.71 & 0 \\ 0 & 0 & 0.99 \end{vmatrix}, \quad c = 0.01$$

Графики переходного процесса в фазовой плоскости при $q_0 = (0.33,\ 0.67, 0)$ приведены на фиг. 1, управляющая функция — на фиг. 2.



Фиг. 1



Фиг. 2

Приложение 1. Решение обратной задачи оптимизации. Следуя [9], запишем характеристические уравнения для замкнутой системы (1), (11) и уравнения Эйлера — Лагранжа, составленного для функционала (12)

$$1 + \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \lambda^i = 0, \qquad 1 + \frac{1}{\beta_1} \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \beta_{i+1} \lambda^{2i} = 0$$

$$\gamma_i = \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_1}, \qquad \alpha_i = a_i - k_i^{(2)} \quad (i = 1, \ldots, n), \qquad \alpha_{n+1} = 1 \tag{П.1}$$

$$\beta_s = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+s} \left(m_{i2s-i} c^{-1} + a_i a_{2s-i}\right) \qquad (s = 1, \ldots, n+1)$$

$$m_{ln+1} = m_{n+1l} = 0 \qquad (l = 1, \ldots, n+1), \qquad a_{n+1} = 1 \tag{П.2}$$

Второе уравнение из (П.1) можно записать в виде

$$\left(1+\sum_{i=1}^{n}\delta_i\lambda^i\right)\left(1+\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\delta_i\lambda^i\right)=0 \tag{П.3}$$

где первый множитель соответствует группе корней λ_s ($s = 1, \ldots, n$) второго уравнения (П.1) с отрицательными вещественными частями.

По предположению, замкнутая система (1), (11) асимптотически устойчива, поэтому для того, чтобы функционал, характеристическое уравнение которого имеет вид (П.1), был тем функционалом, для которого заданное управление вида (11) является оптимальным, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $\delta_i = \gamma_i$ ($i = 1, \ldots n$).

Из (П.2) (П.3) следует

$$\frac{\beta_p}{\beta_1}=\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i+p}\gamma_i\gamma_{2p-i} \qquad (p=1,\ldots,n+1) \tag{П.4}$$

Отсюда с учетом (П.1) находим

$$\frac{\beta_{n+1}}{\beta_1}=(-1)^{2n+2}\gamma_{n+1}^2=\frac{1}{\alpha_1^2}=\frac{1}{\beta_1}=\frac{1}{m_{11}c^{-1}+a_1^2}$$
$$\beta_p=\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i+p}\alpha_i\alpha_{2p-1} \qquad (p=1,\ldots,n+1) \tag{П.5}$$

Сравнивая выражения (П.2) и (П.5), получаем соотношения (13).

Найдем решение обратной задачи оптимизации для системы (1) с управлением вида (3) и критерием оптимальности вида (4). Очевидно, что отрезок скольжения на S можно рассматривать как результат стягивания области $\hat{L}$ оптимальности системы (1) в смысле некоторого критерия вида (12) при $c \to 0$. При этом полоса с границами (14) стягивается в некоторую гиперплоскость вида (3). Выражение для гиперплоскости S определено с точностью до постоянного множителя $R > 0$. Поэтому рассмотрим отношения $k_i^{(1)} / k_1^{(1)}$, предполагая, что

$$\frac{k_i^{(1)}}{k_1^{(1)}}=\lim_{c\to 0}\frac{k_i^{(2)}}{k_1^{(2)}}$$

Из выражений (П. 2), (П. 4) имеем

$$\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i+p}\left[\frac{m_{i2p-i}c^{-1}+a_ia_{2p-i}}{m_{11}c^{-1}+a_1^2}-\frac{a_i-k_i^{(2)}}{(a_1-k_1^{(2)})^2}\left(a_{2p-i}-k_{2p-i}^{(2)}\right)\right]=0 \tag{П.6}$$
$$k_i^{(2)}=-A_{ni}c^{-1} \qquad (i=1,\ldots,n)$$

где A_{ni} — коэффициенты оптимальной производящей функции Ляпунова [7]. Переходя в выражении (П.6) к пределу при $c \to 0$, получаем (5).

Справедливость соотношений (5) можно установить непосредственной проверкой оптимальности закона управления вида (3) для системы (1) в скользящем режиме в смысле критерия вида (4), используя результаты [3].

Приложение 2. Построение области Q_1. Выполнение условия 2° означает отсутствие в области Q_1 траекторий системы (1), (3), пересекающих границы области Q_1. Аналитически это требование выражается неравенством

$$f(q,u)\,|_\Gamma \leqslant 0 \tag{П.7}$$

где $f(q, u) = 0$ — соотношение, определяющее (вместе с выражениями для границы Γ области Q_1) многообразие траекторий, касательных к границе.

В общем случае выражения (6) определяют в n-мерном пространстве $(n - r)$-мерную полосу. Для выполнения условия 2° в области Q_1 необходимо наложить некоторые ограничения на матрицу Φ системы (1) [12]. Пусть $r = n$, и имеют место неравенства

$$|q_i| \leqslant c_i, \quad c_i > 0 \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{П.8}$$

Выполнение условия 3° означает, что в области Q_1 на гиперплоскости $S = 0$ выполняется одно из условий [4]

$$k'\Phi q + k'I \leqslant 0, \quad k'\Phi q + k'I \geqslant 0$$
$$k' = (k_1, \ldots, k_n) = (k_1^{(1)}, \ldots, k_n^{(1)}) \tag{П.9}$$

Таким образом, для выполнения требований, предъявляемых к границе области Q_1, достаточно потребовать, чтобы при выполнении соотношений (6) имели место соотношения (П.7), (П.8) и одно из (П.9). Связь между известными и искомыми коэффициентами можно установить, если воспользоваться теоремой Фаркаша [6]: для того, чтобы неравенство

$$\varphi(q) \geqslant c \tag{П.10}$$

следовало из совместной системы неравенств

$$f_i(q) \geqslant d_i \qquad (i = 1, \ldots, p) \tag{П.11}$$

необходимо и достаточно, чтобы существовало p неотрицательных чисел $\lambda_i \geqslant 0$ $(i = 1, \ldots, p)$ таких, что выполняются соотношения

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i(q) = \varphi(q), \quad \sum_{i=1}^{p} \lambda_i d_i \leqslant c \tag{П.12}$$

Условия (П.9) выполняются одновременно в силу симметрии области Q_1. Пусть из выполнения условий (2) и

$$-\sum_{j=1}^{n} b_{1j} q_j \geqslant -d_1 \tag{П.13}$$

следует справедливость первого из неравенств (П.9). Подставляя найденное из (2) значение q_n в выражение (П.13) и первое из (П.9), получим

$$-\sum_{i=1}^{n-1} \left(b_{1i} - b_{1n}\frac{k_i}{k_n}\right) q_i \geqslant -d_1, \quad -\sum_{i=1}^{n-1} \left(k_{i-1} - a_i k_n - \frac{k_{n-1} - a_n k_n}{k_n} k_i\right) q_i \geqslant k_n \tag{П.14}$$

Применяя теорему Фаркаша (рассматривая второе неравенство из (П.14) как (П.10), а первое из (П.14) как (П.11)), вместо (П.12) имеем второе из (9) и соотношение

$$\lambda \sum_{i=1}^{n-1} \left(b_{1i} - b_{1n}\frac{k_i}{k_n}\right) q_i = \sum_{i=1}^{n-1} \left(k_{i-1} - a_i k_n - \frac{k_{n-1} - a_n k_n}{k_n} k_i\right) q_i$$

выполняющееся очевидно, если имеет место первое из (9).

Выполнение неравенств (П.8), как следствие системы неравенств (6), по теореме Фаркаша означает выполнение неравенств (7) и следующего неравенства, которое выполняется, если имеют место равенства (7):

$$(\Lambda_s^{(1)} - \Lambda_s^{(2)})' Bq = q_s \qquad (s = 1, \ldots, n)$$

Гиперповерхность S разделяет область Q_1 на две подобласти Q_1^- $(u = -1)$ и Q_1^+ $(u = +1)$. В силу симметрии области Q_1 относительно начала координат требование (П.7) выполняется одновременно в подобластях Q_1^- и Q_1^+. Поэтому рассмотрим только область Q_1^-, которая определяется соотношениями (6) и неравенством

$$\sum_{i=1}^{n} k_i^{(1)} q_i \leqslant 0 \tag{П.15}$$

Пусть гиперплоскость S пересекается в области Q_1 со всеми гиперплоскостями, соответствующими неравенствам (6). Условие касания траекторий системы (1) при $u = -1$ границ области Q_1^-

$$\pm \sum_{j=1}^{n} b_{sj} q_j = -d_s \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{П.16}$$

имеет вид

$$\sum_{j=1}^{n} \left(-a_j b_{sn} + b_{sj-1}\right) q_j = b_{sn} \tag{П.17}$$

Далее, верхний знак в выражениях соответствует знаку «плюс» в (П.16) нижний — знаку «минус». Вместо соотношения (П.7) можно записать систему неравенств

$$\mp \sum_{j=1}^{n} (-a_j b_{sn} + b_{sj-1}) q_j \geqslant \mp b_{sn} \tag{П.18}$$

Без нарушения общности рассмотрения можно положить $b_{sn} = 1$.

Подставляя значения q_n, найденные из (П.16), в (6), (П.15) и (П.18), заметим, что при выполнении (П.16) из системы неравенств

$$\sum_{j=1}^{n-1} (b_{ij} - b_{sj}) q_j \geqslant -d_i \pm d_s, \qquad -\sum_{j=1}^{n-1} (b_{ij} - b_{sj}) q_j \geqslant -d_i \mp d_s \tag{П.19}$$

$$\sum_{j=1}^{n-1} (k_n b_{sj} - k_j) q_j \geqslant \mp k_n d_s \qquad (i, s = 1, \ldots, n;\ i \neq s)$$

должно следовать выполнение неравенств

$$\pm \sum_{j=1}^{n-1} [a_j - b_{sj-1} - (a_n - b_{sn-1}) b_{sj}]\, q_j \geqslant \mp 1 + (a_n - b_{sn-1}) d_s \tag{П.20}$$

Применяя к (П.19), (П.20) теорему Фаркаша, находим следующие соотношения:

$$\sum_{i=1, i\neq s}^{n} (l_{is}^{(1)} - l_{is}^{(2)}) \sum_{j=1}^{n-1} (b_{ij} - b_{sj}) q_j + l_s \sum_{j=1}^{n-1} (k_n b_{sj} - k_j) q_j =$$

$$= \mp \sum_{j=1}^{n-1} [a_j - b_{sj-1} - (a_n - b_{sn-1}) b_{sj}]\, q_j$$

$$\sum_{i=1, i\neq s}^{n} [l_{is}^{(1)} (-d_i \pm d_s) + l_{is}^{(2)} (-d_i \mp d_s)] \mp l_s k_n d_s \leqslant 1 + (a_n - b_{sn-1}) d_s$$

$$l_s,\ l_{is}^{(1)},\ l_{is}^{(2)} \geqslant 0 \quad (i, s = 1, \ldots, n;\ i \neq s)$$

которые будут выполнены, если удовлетворить условиям (8).

Поступила 1 VII 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Крыжановский Г. А. Синтез рациональной комбинированной системы стабилизации гиростабилизатора. Изв. АН СССР. МТТ, 1970, № 6.
2. Крыжановский Г. А. Комплексные показатели качества для оптимального проектирования приборов. Измерительная техника, 1971, № 3.
3. Wonham W. M., Jonson C. D. Optimal bang-bang control with quadratic performance index. J. Basic Engng., 1964.
4. Бромберг П. В. Матричные методы в теории релейного и импульсного регулирования. М., «Наука», 1967.
5. Емельянов С. В. Системы автоматического управления с переменной структурой. М., «Наука», 1967.
6. Farkas J. Theorie der einfachen Ungleichungen. J. reine und angew. Math., 1902, Bd. 124, H. 1.
7. Летов А. М. Синтез оптимальных регуляторов. Тр. II конгр. ИФАК, Оптимальные системы, статистические методы. М., «Наука», 1965.
8. Kalman R. E. When is a linear control system optimal? Trans. ASME, Ser. D. J. Basic. Engng, 1964, vol. 86, N 1.
9. Дас П. К прямой и обратной задачам оптимизации квадратичных функционалов в линейных автоматах и управляемых системах. Автоматика и телемеханика, 1966, т. 26, № 9.
10. Johnson C. D., Wonham W. M. On problem of Letov in optimal control. Trans. ASME. J. Basic Engng. 1965, vol. 87, № 1.
11. Зойтендейк Г. Методы возможных направлений. М., Изд-во иностр. лит., 1963.
12. Rekasius Z. V., Hsia T. C. On an inverse problem in optimal control. IEEE Trans. Automat. Control, 1964, V. AC-9, No. 4.