ПЛОСКОЕ ВОЗМУЩЕННОЕ ДВИЖЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ

Л. Н. Грудцын

(Саратов)

Рассматривается движение материальной точки переменной массы в центральном поле сил при воздействии возмущающей силы. Решение задачи найдено в квадратурах.

1. Рассмотрим движение материальной точки переменной массы в поле возмущающего центра, сила воздействия которого изменяется по закону

$$P(r) = \lambda m r^{-n} \tag{1.1}$$

где λ, n — постоянные характеристики поля (при $n = 2$, $\lambda < 0$ получаем случай гравитационного ньютонова поля), m — масса материальной точки, r — расстояние ее до центра.

Будем считать, что масса точки — непрерывно-дифференцируемая функция расстояния до центра

$$m = m_0 f(r), \qquad r = r(t) \qquad (m = m_0,\ r = r_0, \text{ при } t = 0) \tag{1.2}$$

Введем предположение

$$\mathbf{u} = p(r)\,\mathbf{v} \tag{1.3}$$

где $\mathbf{v}$ — скорость движения точки в инерциальной системе отсчета, $\mathbf{u}$ — скорость частиц, отброшенных (или присоединенных) основной точкой к данному моменту времени, $p(r)$ — непрерывная заданная функция. Тогда реактивную силу представим в виде

$$\mathbf{R}(r) = m_0 r^{\cdot} f'(r)\, g(r)\, \mathbf{v}, \qquad g(r) = p(r) - 1 \tag{1.4}$$

где точка означает производную по времени, штрих — производную по r.

Предположим, что кроме указанных сил, на точку действует ортогональная вектору $\mathbf{v}$ дополнительная возмущающая сила $\mathbf{F}^*$, лежащая в плоскости траектории. Аналогичная задача для движения точки постоянной массы рассмотрена в работе [1], где показано, что если

$$\mathbf{F}^* = m_0 \mathbf{F}(r, v) \tag{1.5}$$

то задача сводится к квадратурам. Покажем, что это утверждение остается справедливым и в случае точки переменной массы.

Уравнения плоского движения точки в полярных координатах при условиях (1.1) — (1.5) имеют вид

$$r^{\cdot\cdot} - r\varphi^{\cdot 2} = \frac{\lambda}{r^n} + \frac{1}{f} F_r + \frac{f'}{f} g r^{\cdot 2}, \qquad (r^2\varphi^{\cdot})^{\cdot} = \frac{r}{f} F_\varphi + \frac{f'}{f} g r^2 r^{\cdot} \varphi^{\cdot} \tag{1.6}$$

$$F_r = -F(r, v)\frac{r\varphi^{\cdot}}{v}, \qquad F_\varphi = F(r, v)\frac{r^{\cdot}}{v}, \qquad v^2 = r^{\cdot 2} + r^2\varphi^{\cdot 2}$$

Найдем решение системы (1.6) при начальных условиях

$$r = r_0, \quad r^{\cdot} = r_0^{\cdot}, \quad \varphi = \varphi_0, \quad \varphi^{\cdot} = \varphi_0^{\cdot} \quad \text{при } t = 0 \tag{1.7}$$

Исключая F, получаем уравнение

$$\frac{dv^2}{dr} - 2g\frac{f'}{f} v^2 = \frac{2\lambda}{r^n} \tag{1.8}$$

откуда следует интеграл энергии

$$v(r) = \mu \left(v_0^2 + 2\lambda \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{\mu^2 r^n}\right)^{1/2} \equiv G(r) \tag{1.9}$$

$$\mu = \exp\left(\int_{r_0}^{r} \frac{f'}{f} g dr\right), \qquad v_0^2 = r_0^{\cdot 2} + r_0^2 \varphi_0^{\cdot 2}$$

Второе уравнение системы (1.6) можно записать в виде

$$(r^2\varphi^{\cdot})' - g\frac{f'}{f}(r^2\varphi^{\cdot}) = \frac{r}{f}\frac{H(r)}{G(r)}$$

$$H(r) = F(r,\ G(r))$$

откуда следует аналог интеграла площадей

$$r^2\varphi^{\cdot} = \mu\left[r_0^2\varphi_0^{\cdot} + \int_{r_0}^{r} \frac{H(r)}{G(r)}\frac{r\,dr}{\mu f}\right] \equiv \Phi(r) \tag{1.10}$$

Исключая $\varphi^{\cdot}$ из (1.10) и соотношения для v, получим

$$t = \sigma \int_{r_0}^{r} (G^2 - \Phi^2 r^{-2})^{-1/2} dr \qquad (\sigma = \pm 1) \tag{1.11}$$

Интеграл (1.11) существует для любых непрерывных гладких траекторий, за исключением круговых. Знаки σ и λ выбираются в зависимости от начальных условий и характера поля.

Из интегралов (1.10) и (1.11) получим

$$\varphi(r) = \varphi_0 + \sigma \int_{r_0}^{r} \Phi r^{-1} (G^2 r^2 - \Phi^2)^{-1/2} dr \tag{1.12}$$

Значения r_1 и r_2, при которых $v_r = 0$,— полюса подынтегральных функций в соотношениях (1.12), (1.11). Движение точки в общем случае происходит в кольце $r_1 < r < r_2$, причем возможен случай, когда $r_2 \to \infty$ [1].

Система соотношений (1.11), (1.12) определяет закон плоского движения точки переменной массы.

2. Допустим, что задана непрерывная для всех значений t функция расхода массы

$$m^{\cdot} = m_0 \eta(t), \qquad \eta[t(r)] = q(r) \tag{2.1}$$

Тогда, используя соотношения (1.2), (1.11), получаем

$$f(r) = 1 + \sigma \int_{r_0}^{r} qr (G^2 r^2 - \Phi^2)^{-1/2} dr \tag{2.2}$$

Знаки σ здесь определяют два режима изменения массы: расход и присоединение массы.

Используя полученные результаты, можно решить задачу о нахождении закона изменения массы точки по заданной программе изменения ее модуля скорости как функции расстояния до центра

$$v^2 = s(r) \tag{2.3}$$

Из уравнения (1.8) имеем

$$f(r) = \exp\left\{\frac{1}{2}\int_{r_0}^{r}\left[s'(r) - \frac{2\lambda}{r^n}\right]\frac{dr}{gs}\right\} \tag{2.4}$$

Если задана программа изменения секториальной скорости точки и радиальной компоненты скорости

$$r^2\varphi^{\cdot} = k(r), \qquad v_r = u(r) \tag{2.5}$$

то из уравнения (1.8) получаем закон изменения массы в виде

$$f(r) = \exp\int_{r_0}^{r}\psi(r)\,dr \tag{2.6}$$

$$\psi(r) = \frac{1}{g(r)}\frac{r^2}{u^2r^2 + k^2}\left[-\frac{\lambda}{r^n} + uu' + \frac{k}{r^2}\left(k' - \frac{k}{r}\right)\right]$$

Если же имеют место одновременно зависимость (2.3) и первое соотношение (2.5), то функция изменения массы определяется соотношением

$$f(r) = \frac{rH^*(r)}{\sqrt{s(r)}}\left[k' + \left(\frac{\lambda}{sr^n} - \frac{s'}{2s}\right)k\right]^{-1}$$

$$H^*(r) = F\left[r, \sqrt{s(r)}\right] \tag{2.7}$$

В случае $p(r) = \mathrm{const}$ равенство (2.6) существует только для значений $p \neq 1$.

Представляют интерес соотношения, определяющие решение обратной задачи: по данным характерным функциям движения точки $G(r)$, $\Phi(r)$ найти возмущающие силы.

Из (1.10) находим

$$r^{\cdot} = \pm r^{-1}\Delta(r), \qquad \Delta(r) = (r^2G^2 - \Phi^2)^{1/2}$$

Определяя отсюда значение $r^{\cdot\cdot}$, из первого уравнения системы (1.6) получим

$$F_r = \left[r^2\frac{d}{dr}\left(\frac{G^2}{2}\right) - \frac{d}{dr}\left(\frac{\Phi^2}{2}\right) - \frac{f'}{f}g\Delta^2 - \frac{\lambda}{r^{n-2}}\right]\frac{f(r)}{r^2} \tag{2.8}$$

Аналогичным образом из второго уравнения системы (1.6) получим

$$F_\varphi = \pm\left(\Phi' - \frac{f'}{f}g\Phi\right)\Delta(r)\frac{f(r)}{r^2} \tag{2.9}$$

Формулы (2.8) и (2.9) — обобщенные аналоги известной формулы Бине в теории центрального движения точки. Здесь функция $f(r)$ является заданной.

Поступила 13 V 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Валеев К. Г. Об одном случае интегрируемости уравнений возмущенного движения спутника. ПММ, 1965, т. 29, вып. 4.