При $^1/_4\pi < \alpha < ^3/_4\pi$ согласно (2.10), (2.11) и (3.2) условие (3.1) будет иметь место лишь в том случае, когда наряду с условием (3.3) $s_2(\alpha) = 0$, т. е. когда сила и момент связаны равенствами

$$Q\pi = M(4\alpha - 2\pi)N^+(1)\cos\alpha \quad \text{при} \quad ^1/_4\pi < \alpha < ^1/_2\pi$$
$$Q(\pi - 4\alpha) = M(4\alpha - 2\pi)N^+(1)\cos\alpha \quad \text{при} \quad ^1/_2 < \alpha < ^3/_4\pi$$

Гарантировать строгое соблюдение этих равенств практически нельзя. Поэтому правильно считать, что при $^1/_4\pi < \alpha < ^1/_2\pi$ и при $^1/_2\pi < \alpha < ^3/_4\pi$ даже в симметричном случае решение (1.23) механически неосуществимо,— обойма (штамп) отстанет от упругого клина при малейшем нарушении симметрии.

Вопрос о достаточности условия (3.1) для плотного прилегания контактирующих поверхностей требует совсем иного подхода и будет рассмотрен отдельно.

Поступила 18 V 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Нуллер Б. М. Контактные задачи для упругого полубесконечного цилиндра. ПММ, 1970, т. 34, вып. 4.
2. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. М.—Л., Изд-во АН СССР, 1963.
3. Альперин И. Г. Напряжения в бесконечной полосе, равномерно сжатой по половине длины. Уч. зап. Харьковск. ун-та 1950, № 20.
4. Нуллер Б. М. Контактная задача для упругого бесконечного конуса. ПММ, 1970, т. 34, вып. 2.
5. Нобл Б. Применение метода Винера — Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
6. Александров В. М. Контактные задачи для упругого клина. Инж. ж. МТТ, 1967, № 2.
7. Сметанин Б. И. О расклинивании упругого бесконечного клина. ПММ, 1969, т 33, вып. 5.
8. Matczynski M. Elastic wedge with discontinuous boundary conditions. Arch. Mech. Stos., 1963, vol. 15, No. 6.

УДК 531.31

ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ С МНОЖИТЕЛЯМИ СВЯЗЕЙ

А. С. Сумбатов

(Москва)

Обобщив незавершенное исследование К. Г. Якоби [1], Г. К. Суслов [2,3] показал, что, зная полный интеграл W одного уравнения в частных производных первого порядка, можно составить некоторую совокупность первых интегралов уравнений движения механической системы с множителями связей. Г. К. Суслов ограничился случаем, когда наложенные на систему связи заданы в конечном виде. Для таких систем указанная совокупность первых интегралов определяет общее решение уравнений движения, следовательно, имеем метод интегрирования этих уравнений.

Распространением этого метода на неголономные системы занимались И. С. Аржаных [4–10], Ш. А. Гумеров [9–12], М. Ф. Шульгин [13,14], Э. Х. Назиев. И. С. Аржаных [6] установил, что в случае неголономных связей интеграл W должен удовлетворять дополнительной системе уравнений, поэтому указанная Сусловым совокупность первых интегралов определяет, вообще говоря, частное решение уравнений движения.

В работах [12, 13] [1] в явном виде получены необходимые и достаточные условия, налагаемые на уравнения связей и интеграл W, при выполнении которых по методу Суслова можно отыскать частное решение уравнений с множителями неголономных связей. Однако эти условия все различны.

В п. 1° данной работы показано, что наиболее общие из этих условий [12] не являются необходимыми. Получены необходимые условия.

В п. 2° доказана достаточность полученных нами условий, откуда достаточность условий Аржаных — Гумерова [10, 12] следует как частный случай.

Совместность уравнений, определяющих интеграл W, исследовалась в работах [10, 12] [1] обычным образом: путем составления всевозможных скобок Пуассона. В п. 3° и 4° показано, что в действительности интеграл W не обязан удовлетворять уравнениям, полученным приравниванием всех скобок Пуассона нулю. В качестве примера рассмотрено качение без проскальзывания однородного шара по плоскости.

1°. Пусть $q_1, .., q_n$ — обобщенные координаты механической системы, уравнения связей которой имеют вид

$$\sum_{j=1}^{n} A_{ij}(t, q_1, \ldots, q_n)\, q_j^{\cdot} + A_{i0}(t, q_1, \ldots, q_n) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, k < n) \tag{1.1}$$

Уравнения движения можно записать в канонических переменных q, p ($p_j = \partial L/\partial q^{\cdot}_j$), L — функция Лагранжа системы

$$H = \sum_{j=1}^{n} p_j q_j^{\cdot} - L$$

$$q_j^{\cdot} = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \qquad p_j^{\cdot} = -\frac{\partial H}{\partial q_j} + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i A_{ij} \qquad (j = 1, \ldots, n) \tag{1.2}$$

λ_i — множители связей (1.1))

Для случая, когда связи заданы в конечном виде, т. е.

$$A_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial q_j}, \qquad A_{i0} = \frac{\partial F_i}{\partial t} \qquad (j = 1, \ldots, n; \quad i = 1, \ldots, k)$$

вычислив полную вариацию функции действия $W(t, t_0, q_1, \ldots, q_n, q_1^0, \ldots, q_n^0) = \int\limits_{t_0}^{t} L dt$ по координатам q и начальным условиям q^0, совместимым со связями, Г. К. Суслов показал, что уравнения (1.2) допускают первые интегралы

$$p_j = \frac{\partial W}{\partial q_j} + \sum_{i=1}^{k} M_i A_{ij} \tag{1.3}$$

$$\partial W/\partial a_j = b_j \qquad (j = 1, \ldots, n) \tag{1.4}$$

Здесь M_i — некоторые функции, которые определяются подстановкой выражений импульсов (1.3) в уравнении связей и последующим разрешением полученной алгебраической системы уравнений относительно M_i. Заметим, что соответствующий определитель, равный

$$\det \left\| \sum_{j,h=1}^{n} A_{ij} \frac{\partial^2 H}{\partial p_j \partial p_h} A_{lh} \right\|$$

[1] См. также Назиев Э. Х. Некоторые задачи аналитической динамики. Диссертация, МГУ, 1969.

всегда положителен, если rang $\|A_{ij}\| = k'$, $W(t, q_1, \ldots, q_n, a_1, \ldots, a_n)$ — полный интеграл уравнения (1.5)

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \sum_{i=1}^{k} M_i A_{i0} + H\left(t, q_1, \ldots, q_n, \frac{\partial W}{\partial q_1} + \sum_{i=1}^{k} M_i A_{i1}, \ldots, \frac{\partial W}{\partial q_n} + \sum_{i=1}^{k} M_i A_{in}\right) = 0$$

где a_j, b_j — постоянные. Строго говоря, соотношения (1.3) являются интегралами системы уравнений, которая получается из уравнений (1.2) после замены в них λ_i на $M_i^{\cdot}$ ($i = 1, \ldots, k$). Г. К. Суслов показал, что вдоль траекторий уравнений (1.2) $M_i = \int \lambda_i dt$ ($i = 1, \ldots, k$), причем в третьей главе [2] он дал еще одно доказательство этих формул, использовав, однако, что соотношения (1.3) — первые интегралы уравнений (1.2).

И. С. Аржаных получил некоторые условия существования интегралов вида (1.3), (1.4) уравнений (1.2) для систем с неголономными однородными связями (1.1) ($A_{i0} = 0$, $i = 1, \ldots, k$), сначала для склерономных систем [6], а позже, совместно с Ш. А. Гумеровым,— для реономных [9]. Разыскивая интегралы уравнений (1.2) в виде

$$p_j = \pi_j(t, q_1, \ldots, q_n) \qquad (j = 1, \ldots, n) \tag{1.6}$$

И. С. Аржаных назвал «потенциальным» [6] такой метод интегрирования уравнений, в котором вдоль решения уравнений (1.2)

$$\sum_{j=1}^{n} \pi_j q_j^{\cdot} - H(t, q_1, \ldots, q_n, \pi_1, \ldots, \pi_n) = \frac{dW}{dt} \tag{1.7}$$

В частности, метод Гамильтона — Якоби интегрирования уравнений движения свободной системы является «потенциальным», причем выполняются условия $\Omega_{jh} = \partial\pi_j / \partial q_h - \partial\pi_h / \partial q_j = 0$, ($j, h = 1, \ldots, n$), которые означают, что поле импульсов (1.6) безвихревое.

Однако уже для несвободной голономной системы среди величин Ω_{jh} могут быть не равные нулю, поэтому название «потенциальный метод», на наш взгляд, не оправдано, хотя его и употребляют некоторые авторы [9, 14].

Если равенство (1.7) имеет место, то [10, 12] в силу уравнений связей (1.1) выполняются соотношения (1.3) и соотношение

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} M_i A_{ij}\left(\delta q_j^{\cdot} - \frac{d}{dt}\delta q_j\right) = 0 \tag{1.8}$$

в котором δq_j ($j = 1, \ldots, n$) означают возможные перемещения системы.

Для склерономных систем с уравнениями связей, разрешенными относительно $q_1^{\cdot}, \ldots, q_k^{\cdot}$

$$\sum_{j=1}^{n} A_{ij} q_j^{\cdot} = 0 \quad (A_{ij} = \delta_{ij} \text{ при } j \leqslant k; \quad A_{ij} = -a_{ij}(q_1, \ldots, q_n) \quad \text{при } j > k) \tag{1.9}$$

$$(i = 1, \ldots, k < n - 1)$$

можно положить

$$\delta q_s^{\cdot} - \frac{d}{dt}\delta q_s = 0 \qquad (s = k+1, \ldots, n)$$

$$\delta q_i^{\cdot} - \frac{d}{dt}\delta q_i = \sum_{(s,r)}^{k+1,\ldots,n} \Lambda^i_{(s,r)}(q_s^{\cdot}\delta q_r - q_r^{\cdot}\delta q_s) \qquad (i = 1, \ldots, k)$$

где

$$\Lambda^i_{(s,r)} = \sum_{l=1}^{k} \frac{\partial a_{is}}{\partial q_l} a_{lr} + \frac{\partial a_{is}}{\partial q_r} - \sum_{l=1}^{k} \frac{\partial a_{ir}}{\partial q_l} a_{ls} - \frac{\partial a_{ir}}{\partial q_s} \tag{1.10}$$

Обращение в нуль всех величин $\Lambda^i_{(s,r)}$, как известно, выражает необходимое и достаточное условие интегрируемости уравнений (1.9). Пользуясь этими обозначениями, соотношение (1.8) можно теперь записать в виде

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{[(s,r)}^{k+1,\ldots,n} M_i\Lambda^i_{(s,r)}(q_s^{\cdot}\delta q_r - q_r^{\cdot}\delta q_s) = 0 \tag{1.11}$$

Отсюда, по утверждению И. С. Аржаных и Ш. А. Гумерова [10,12], в силу независимости величин $\omega_{s,r} = q_s^{\cdot}\delta q_r - q_r^{\cdot}\delta q_s\,(k+1 \leqslant s < r = k+2, \ldots, n)$ следует, что

$$\sum_{i=1}^{k} M_i\Lambda^i_{(s,r)} = 0 \qquad (k+1 \leqslant s < r = k+2, \ldots, n) \tag{1.12}$$

Положим $n - k > 2$ и рассмотрим этот вывод подробнее. Условия (1.12) для каждой пары индексов $\sigma_1,\sigma_2 (k+1 \leqslant \sigma_1 < \sigma_2 = k+2, \ldots, n)$, получаются из соотношения (1.11) при $\omega_{\sigma_1,\sigma_2} \neq 0$, $\omega_{s,r} = 0\,(k+1 \leqslant s < r = k+2, \ldots, n;\ s \neq \sigma_1, r \neq \sigma_2)$, следовательно, при $q^{\cdot}_{\sigma_3} = 0$ $(\sigma_3 = k+1, \ldots, n;\ \sigma_3 \neq \sigma_1, \sigma_3 \neq \sigma_2)$, так как $q^{\cdot}_{\sigma_3}\omega_{\sigma_1,\sigma_2} + q^{\cdot}_{\sigma_2}\omega_{\sigma_3,\sigma_1} + q^{\cdot}_{\sigma_1}\omega_{\sigma_2,\sigma_3} \equiv 0$. С другой стороны, функции M_i $(i = 1, \ldots, k)$, которые определяются описанной выше процедурой,— линейные формы от $\partial W / \partial q_j$ $(j = 1, \ldots, n)$, но $\partial W / \partial q_j$ на основании (1.3) зависят от импульсов и, следовательно, от скоростей $q_h^{\cdot}$ $(h = 1, \ldots, n)$. Поэтому условия (1.12) не являются необходимыми при $n - k > 2$.

В силу независимости величин δq_r $(r = k+1, \ldots, n)$ из формулы (1.11) вытекают следующие необходимые условия:

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{s=k+1}^{n} M_i\Lambda^i_{(s,r)}q_s^{\cdot} = 0 \qquad (r = k+1, \ldots, n)$$

На основании (1.2) и (1.3) их можно записать так:

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{s=k+1}^{n} M_i\Lambda^i_{(s,r)}\frac{\partial H}{\partial p_s} = 0 \quad \text{при } p_j = \frac{\partial W}{\partial q_j} + \sum_{l=1}^{k} M_l A_{lj} \quad (j = 1, \ldots, n) \tag{1.13}$$
$$(r = k+1, \ldots, n)$$

М. Ф. Шульгин [13] обратил внимание, что указанные в работах [6,9,10,12] условия существования интегралов (1.3) (в частности, условия (1.12)), полученные как необходимые, безоговорочно рассматриваются авторами [10,11] и как достаточные. Он продифференцировал по времени соотношения (1.3) в силу уравнений движения (1.2), считая, с одной стороны, что $M_l^{\cdot} = \lambda_l$ $(l = 1, \ldots, k)$, а с другой,— что функции M_l определяются описанной выше процедурой, и в результате заключил, что необходимые и достаточные условия сводятся к интегрируемости связей (1.1) (см. также [17]). Однако это ошибочный вывод: Ш. А. Гумеров [11] привел пример неголономной системы, в котором соотношения вида (1.3), (1.4) являются интегралами движения.

Э. Х. Назиев аналогично применил те же два определения функций M_l без доказательства эквивалентности этих определений. К примеру, заметим, что для голономных систем со связями (1.9) (как показано ниже, интегралы (1.3) и (1.4) определяют общее решение уравнений движения таких систем) при $\partial a_{is} / \partial q_l \neq 0$ $(i, l = 1, \ldots, k;\ s = k+1, \ldots, n)$ хотя бы для одной комбинации индексов $M_l^{\cdot} \neq \lambda_l$ (см. (2.8)). Поэтому полученные Э. Х. Назиевым необходимые и достаточные условия существования интегралов вида (1.3), (1.4)

$$\sum_{i=1}^{k} M_i\left(\frac{\partial A_{i\alpha}}{\partial q_\beta} - \frac{\partial A_{i\beta}}{\partial q_\alpha}\right) = 0 \qquad (\alpha, \beta = 0, 1, \ldots, n), \qquad q_0 = t \tag{1.14}$$

в общем случае (1.1) не являются необходимыми. Для стационарных чаплыгинских связей (1.9) $a_{ij} = a_{ij}(q_{k+1}, \ldots, q_n)$ $(i = 1, \ldots, k;\ j = 1, \ldots, n)$ формулы (1.12) и (1.14) совпадают.

Таким образом, вопрос о достаточности условий Аржаных — Гумерова (1.12) остался открытым.

2°. Уравнения связей (1.9) склерономной системы с кинетической энергией, являющейся однородной формой скоростей, в канонических переменных имеют вид

$$\sum_{j,\,h=1}^{n} A_{ij}\frac{\partial^2 H}{\partial p_h \partial p_j} p_h = 0 \qquad (i = 1, \ldots, k) \tag{2.1}$$

Рассмотрим величины

$$\varepsilon_h = p \quad - \frac{\partial W}{\partial q_h} - \sum_{l=1}^{k} M_l A_{lh} \qquad (h = 1, \ldots, n)$$

в которых функции M_i — решение системы уравнений

$$\sum_{j,\,h=1}^{n} A_{ij}\frac{\partial^2 H}{\partial p_h \partial p_j}\left(\frac{\partial W}{\partial q_h} + \sum_{l=1}^{k} M_l A_{lh}\right) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, k) \tag{2.2}$$

а $W(t,\ q_1, \ldots, q_n,\ a_1, \ldots, a_n)$ — интеграл уравнения (1.5), удовлетворяющий дополнительной системе (1.13); поэтому не все постоянные $a_1, \ldots, a_n$ произвольны.

Из (2.1) и (2.2) следует, что

$$\sum_{j,\,h=1}^{n} A_{ij}\frac{\partial^2 H}{\partial p_h \partial p_j}\varepsilon_h = 0 \qquad (i = 1, \ldots, h) \tag{2.3}$$

Вычислим производные $d\varepsilon_h / dt$ $(h = 1, \ldots, n)$ в силу уравнений (1.2) и (1.9)

$$\begin{aligned}\varepsilon_h^{\cdot} = &-\frac{\partial H}{\partial q_h} + \sum_{l=1}^{k}\lambda_l A_{lh} - \frac{\partial^2 W}{\partial t \partial q_h} - \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 W}{\partial q_j \partial q_h}\frac{\partial H}{\partial p_j} - \\ &-\sum_{l=1}^{k} M^{\cdot}_l A_{lh} - \sum_{s=k+1}^{n}\sum_{l=1}^{k} M_l\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial A_{lh}}{\partial q_i}a_{is} + \frac{\partial A_{lh}}{\partial q_s}\right)\frac{\partial H}{\partial p_s} \qquad (h = 1, \ldots, n)\end{aligned} \tag{2.4}$$

Из уравнения (1.5) имеем

$$\frac{\partial^2 W}{\partial q_h \partial t} + \frac{\partial H}{\partial q_h} + \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial p_j}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial q_h \partial q_j} + \sum_{l=1}^{k}\frac{\partial M_l}{\partial q_h}A_{lj} + \sum_{l=1}^{k} M_l\frac{\partial A_{lj}}{\partial q_h}\right) = 0 \tag{2.5}$$

$$(h = 1, \ldots, n)$$

Сравнив (2.4) и (2.5), на основании (1.2), (1.9), (1.10) и (1.13) получим

$$\varepsilon_h^{\cdot} = \sum_{l=1}^{k} A_{lh}\mu_l + \sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{k}\sum_{r,s=k+1}^{n}\delta_{hr}M_l\Lambda^l_{(r,s)}\frac{\partial^2 H}{\partial p_j \partial p_s}\varepsilon_j \qquad (h = 1, \ldots, n)$$

$$\mu_l = \lambda_l - M_l^{\cdot} - \sum_{i=1}^{k}\sum_{s=k+1}^{n} M_i\frac{\partial a_{is}}{\partial q_l}q_s^{\cdot} \tag{2.6}$$

Продифференцируем по времени уравнения (2.3) в силу уравнений (1.2) и (2.6)

$$\sum_{l=1}^{k}\sum_{j,h=1}^{n} A_{ij}\frac{\partial^2 H}{\partial p_h \partial p_j}A_{lh}\mu_l = \Phi_i(q_1, \ldots, q_n,\ p_1, \ldots, p_n,\ \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$$

Здесь функции Φ_i — некоторые линейные однородные формы переменных ε_h.

Следовательно, исключив μ_i $(i = 1, ..., k)$ из уравнений (2.6) при помощи (2.7), получим однородную систему уравнений относительно переменных $\varepsilon_h(t)$ $(h = 1, ..., n)$, которая при $\varepsilon_h(t_0) = 0$ $(h = 1, ..., n)$ имеет единственное решение $\varepsilon_h(t) \equiv 0$, т. е. соотношения (1.3) — первые интегралы уравнений (1.2). Но тогда из уравнений (2.7) следует, что $\mu_l(t) \equiv 0$ $(l = 1, ..., k)$ или

$$\lambda_l = M_l^{\cdot} + \sum_{i=1}^{k} \sum_{s=k+1}^{n} M_i \frac{\partial a_{is}}{\partial q_l} q_s^{\cdot} \qquad (l = 1, \ldots, k) \tag{2.8}$$

Пусть интеграл W содержит $q \leqslant n$ произвольных постоянных a_γ. Покажем, что

$$\partial W / \partial a_\gamma = b_\gamma \qquad (\gamma = 1, \ldots g, \quad b_\gamma = \mathrm{const}) \tag{2.9}$$

тоже первые интегралы уравнений (1.2).

Подставив W в уравнение (1.5), продифференцируем его по a_γ

$$\frac{\partial^2 W}{\partial a_\gamma \partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_j} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial a_\gamma \partial q_j} + \sum_{l=1}^{k} \frac{\partial M_l^{\cdot}}{\partial a_\gamma} A_{lj} \right) = 0 \qquad (\gamma = 1, \ldots, q)$$

Отсюда на основании (1.2) и (1.9) получим

$$\frac{\partial^2 W}{\partial a_\gamma \partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial^2 W}{\partial a_\gamma \partial q_j} = 0 \qquad (\gamma = 1, \ldots, q)$$

Эти тождества означают, что полные производные соотношений (2.9) по времени в силу уравнений (1.2) равны нулю.

Поскольку условия (1.13) выполняются, когда соотношения (1.12) имеют место, то соотношения (1.12) достаточны для того, чтобы (1.3), (2.9) были первыми интегралами уравнений (1.2).

3°. Если некоторая функция W удовлетворяет уравнениям

$$f\left(q_1, \ldots, q_n, W, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial W}{\partial q_n}\right) = 0, \qquad F\left(q_1 \ldots, q_n, W, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial W}{\partial q_n}\right) = 0$$

то она удовлетворяет и уравнению

$$[F, f] = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial \left(\frac{\partial W}{\partial q_j}\right)} \left(\frac{\partial f}{\partial q_j} + \frac{\partial W}{\partial q_j} \frac{\partial f}{\partial W} \right) - \frac{\partial f}{\partial \left(\frac{\partial W}{\partial q_j}\right)} \left(\frac{\partial F}{\partial q_j} + \frac{\partial W}{\partial q_j} \frac{\partial F}{\partial W} \right) \right) = 0$$

Здесь $[F, f]$ — скобка Якоби, которая при $\partial f / \partial W = \partial F / \partial W = 0$ называется скобкой Пуассона. Эта теорема доказывается [15] на основании того, что при подстановке решения W в уравнения $f = 0$, $F = 0$ последние обращаются в тождества.

Соотношения (1.13), полученные из равенства (1.7), уравнений связей (1.9) и принципа Даламбера, вообще говоря, не являются тождествами, потому что $q_1, ..., q_n$, входящие в эти соотношения, не произвольны, а представляют собой решение уравнений (1.2). Поэтому скобки Пуассона, составленные для левых частей уравнений (1.13), необязательно равны нулю. По этой же причине скобки Пуассона для уравнений (1.12) не равны нулю.

Пример. Рассмотрим задачу о катании однородного шара по горизонтальной плоскости [16]. Массу шара примем за единицу, радиус обозначим через a. Положение шара определяется двумя декартовыми координатами $q_1 = x$, $q_2 = y$ центра шара относительно неподвижной системы координат, плоскость xy которой горизонтальна, и тремя углами Эйлера $q_3 = \varphi$, $q_4 = \psi$, $q_5 = \theta$.

Кинетическая энергия шара и уравнения связей, выражающие равенство нулю скорости точки касания шара, имеют вид

$$T = {}^1/_2\,[q_1^{\cdot 2} + q_2^{\cdot 2} + {}^2/_5 a^2 (q_3^{\cdot 2} + q_4^{\cdot 2} + q_5^{\cdot 2} + 2q_3^{\cdot} q_4^{\cdot} \cos q_5)]$$
$$q_1^{\cdot} + a\,(q_3^{\cdot} \sin q_5 \cos q_4 - q_5^{\cdot} \sin q_4) = 0$$
$$q_2^{\cdot} + a\,(q_3^{\cdot} \sin q_5 \sin q_4 + q_5^{\cdot} \cos q_4) = 0$$

Если силы, приложенные к системе, непотенциальны, то уравнения движения можно записать в виде

$$q_j^{\cdot} = \frac{\partial T}{\partial p_j}, \quad p_j^{\cdot} = -\frac{\partial T}{\partial q_j} + Q_j + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i A_{ij} \quad (j = 1, \ldots, n) \tag{3.1}$$

где Q_j — обобщенные силы. Когда $Q_j = \partial U / \partial q_j$ $(j = 1, \ldots, n)$, уравнения (3.1) совпадают с уравнениями (1.2) $(H = T - U)$.

Продифференцировав по времени уравнения связей в силу уравнений (3.1), определим значение множителей, а следовательно, и реакции связей

$$R_j = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i A_{ij} \quad (j = 1, \ldots, n)$$

которые в рассматриваемом примере даются в виде

$$R_1 = \frac{5}{7a}(Q_4 \operatorname{ctg} q_5 - Q_3 \operatorname{cosec} q_5)\cos q_4 + \frac{5}{7a} Q_5 \sin q_4 - \frac{2}{7} Q_1$$
$$R_2 = \frac{5}{7a}(Q_4 \operatorname{ctg} q_5 - Q_3 \operatorname{cosec} q_5)\sin q_4 - \frac{5}{7a} Q_5 \cos q_4 - \frac{2}{7} Q_2$$
$$R_3 = \frac{5}{7}(Q_4 \cos q_5 - Q_3) - \frac{2a}{7}(Q_1 \cos q_4 + Q_2 \sin q_4)\sin q_5$$
$$R_4 = 0$$
$$R_5 = -\frac{5}{7} Q_5 + \frac{2a}{7}(Q_1 \sin q_4 - Q_2 \cos q_4) \tag{3.2}$$

Условия (1.12) в данной задаче имеют вид [10]

$$\cos q_4 \frac{\partial W}{\partial q_1} + \sin q_4 \frac{\partial W}{\partial q_2} + \frac{5}{2a \sin q_5}\frac{\partial W}{\partial q_3} - \frac{5 \cos q_5}{2a \sin q_5}\frac{\partial W}{\partial q_4} = 0$$
$$\sin q_4 \frac{\partial W}{\partial q_1} - \cos q_4 \frac{\partial W}{\partial q_2} - \frac{5}{2a}\frac{\partial W}{\partial q_5} = 0 \tag{3.3}$$

Из уравнений (2.2) следует, что силовая функция U не влияет на зависимость M_i $(i = 1, \ldots, k)$ от $\partial W / \partial q_j$ $(j = 1, \ldots, n)$.

В отношении системы уравнений (3.3) в работе [10] сказано: «Составляя скобку Пуассона, легко убеждаемся, что полученная система несовместима (т. е. $W = \mathrm{const}$ — А. С.). Следовательно, рассмотренная неголономная система потенциального метода интегрирования не допускает». Однако в случае движения шара по инерции, т. е. при $Q_j = 0$ $(j = 1, \ldots, 5)$, это не так. Действительно, в этом случае реакции (3.2) равны нулю, уравнения (1.2) принимают вид уравнений Гамильтона $(H = T)$, выполняются соотношения (1.3) — (1.5) и условия (3.3) в которых $M_1 = M_2 = 0$.

Интересно также отметить следующее. Пусть Q_j $(j = 1, \ldots, 5)$ не зависят от скоростей, тогда и реакции (3.2) не зависят от скоростей. Очевидно, уравнения движения шара (3.1) будут гамильтоновыми только в том случае, если суммарная сила $Q_j + R_j$ $(j = 1, \ldots, 5)$ обладает потенциалом. Рассмотрим два частных случая

1) $Q_1 = Q_2 = 0, \quad Q_3 = \dfrac{\partial U}{\partial q_3}, \quad Q_4 = \dfrac{\partial U}{\partial q_4}, \quad Q_5 = \dfrac{\partial U}{\partial q_5}, \quad U = U(q_3, q_4, q_5)$

Если уравнения (3.1) гамильтоновы, то, в частности

$$\frac{\partial R_1}{\partial q_4} = \frac{\partial R_2}{\partial q_4} = \frac{\partial R_3}{\partial q_4} = \frac{\partial R_5}{\partial q_4} = 0$$

откуда $Q_4 \cos q_5 - Q_3 = 0$, $Q_5 = 0$, следовательно, $U = \text{const}$.

$$2)\ Q_1 = Q_1(q_1, q_2)\quad Q_2 = Q_2(q_1, q_2),\quad Q_3 = Q_4 = Q_5 = 0 \tag{1.3}$$

Если уравнения (3.1) гамильтоновы, то, в частности

$$\partial R_5 / \partial q_4 = \partial^2 R_5 / \partial q^2{}_4 = 0$$

откуда $Q_1 = Q_2 = 0$.

Таким образом, когда приложенные к шару активные силы приводятся к потенциальному моменту либо к равнодействующей, проходящей через центр шара, система уравнений (3.1) не является гамильтоновой.

4°. Предположим, что условия (1.13) выполнены. Тогда уравнения (1.2) можно записать в виде уравнений Гамильтона. Действительно, на основании (1.2), (1.3), (1.13), (2.8) имеем -

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i A_{ij} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L_0}{\partial q_j^{\bullet}} - \frac{\partial L_0}{\partial q_j} \qquad (j = 1, \ldots, n), \qquad L_0 = \sum_{h=1}^{n}\sum_{l=1}^{k} M_l A_{lh} q_h^{\bullet}$$

Поэтому уравнения движения системы, записанные в форме уравнений Лагранжа с множителями связей, примут вид уравнений Лагранжа второго рода с функцией $L_1 = L - L_0$. Их можно преобразовать в уравнения Гамильтона, эквивалентные (1.2) введением обобщенных импульсов

$$P_j = \frac{\partial L_1}{\partial q_j^{\bullet}} = p_j - \sum_{i=1}^{k} M_i A_{ij} \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

Функция Гамильтона

$$H_1 = \sum_{j=1}^{n} P_j q_j^{\bullet} - L_1 = \sum_{j=1}^{n} p_j q_j^{\bullet} - L =$$

$$= H\left(q_1, \ldots, q_n, \quad P_1 + \sum_{i=1}^{k} M_i A_{i1}, \ldots, P_n + \sum_{i=1}^{k} M_i A_{in}\right)$$

Если найден полный интеграл W_1 уравнения Гамильтона — Якоби

$$\frac{\partial W_1}{\partial t} + H\left(q_1, \ldots, q_n, \frac{\partial W_1}{\partial q_1} + \sum_{i=1}^{k} M_i A_{i1}, \ldots, \frac{\partial W_1}{\partial q_n} + \sum_{i=1}^{k} M_i A_{in}\right) = 0$$

то $P_j = \partial W_1 / \partial q_j$ $(j = 1, \ldots, n)$. Однако, сравнив эти выражения с соотношениями (1.3), получим $\partial W_1 / \partial q_j = \partial W / \partial q_j$ $(j = 1, \ldots, n)$, следовательно, $P_j = \partial W / \partial q_j$; уравнение Гамильтона — Якоби совпадает с уравнением (1.5) $(A_{i0} = 0,\ i = 1, \ldots, k)$.

Условия (1.13), очевидно,— первые интегралы уравнений движения

$$q_j^{\bullet} = \frac{\partial H}{\partial P_j}, \qquad P_j^{\bullet} = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

Поэтому скобки Пуассона, составленные для левых частей уравнений (1.13) по теореме Пуассона, сохраняют постоянные значения вдоль траектории системы. В предыдущем пункте показано, что эти постоянные нельзя полагать равными нулю одновременно.

5°. Совместность системы уравнений (1.5) и (1.13) можно исследовать следующим образом. Пусть W — полный интеграл уравнения (1.5). Из уравнений (1.4) определим

$$q_j = a_j(t, a_1, \ldots, a_n, \quad b_1, \ldots, b_n) \qquad (j = 1, \ldots, n) \qquad (5.1$$

выбрав постоянные $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ так, чтобы удовлетворить уравнениям связей при $t = t_0$. $2n - k$-постоянных останутся произвольными. Подставим уравнения (5.1) в уравнения (1.13). Если полученные соотношения выполняются тождественно, то, согласно п. 2°, формулы (5.1) представляют общее решение уравнений (1.2). Если же полученные соотношения накладывают ограничения на оставшиеся произвольными $2n - k$ постоянных и при этом $W \neq \text{const}$, то при этих ограничениях, согласно п. 2°, формулы (5.1) представляют частное решение уравнений (1.2).

6°. Изложенный способ интегрирования уравнений движения с множителями связей представляет обобщение метода Гамильтона — Якоби и совпадает с ним, если $M_i = 0$ $(i = 1, \ldots, k)$. В этом случае способ позволяет отыскать только такие движения системы, в которых реакции связей равны нулю (2.8). Для систем с двумя степенями свободы $(n - k = 2)$ условия (1.13) принимают вид (1.12) (равносильность условий (1.13) и (1.12) возможна в некоторых случаях и при $n - k > 2$). При $k \geqslant 2$ эти условия могут выполняться, когда $M_i \neq 0$ $(i = 1, \ldots, k)$ [11].

Приношу глубокую благодарность Е. Н. Березкину, который внимательно прочел первоначальный вариант рукописи и высказал ряд ценных замечаний.

Поступила 4 XII 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Jacobi C. G. Vorlesungen über dynamik von Jacobi nebst fünf hinterlassenen abhandlungen desselben herausgegeben von A. Clebsch. Nachgelassene Abhandlungen. Berlin, 1866, S. 376—380.
2. Суслов Г. К. Об уравнениях с частными производными для несвободного движения. СПБ, 1888.
3. Суслов Г. К. Теоретическая механика. М.—Л., Гостехиздат, 1946.
4. Аржаных И. С. Вихревой принцип аналитической динамики. Докл. АН СССР, 1949, т. 65, № 5.
5. Аржаных И. С. О делении консервативных систем на голономные и неголономные. Тр. Ин-та матем. и механ. АН УзССР, 1950, вып. 6.
6. Аржаных И. С. Условия применимости потенциального метода интегрирования уравнений движения неголономных консервативных систем. Докл. АН СССР, 1952, т. 87, № 1.
7. Аржаных И. С. Качественное отличие систем голономных от неголономных. Тр. Ин-та матем. и механ. АН УзССР, ч. 2, 1953, вып. 10.
8. Аржаных И. С. Поле импульсов. Ташкент, «Наука», 1965.
9. Аржаных И. С., Гумеров Ш. А. Об условиях применимости потенциального метода интегрирования уравнений движения неголономных систем в случае, когда функция Гамильтона явно зависит от времени. Докл. АН УзССР, 1959, № 10.
10. Аржаных И. С., Гумеров Ш. А. Об условиях частичной применимости метода типа Гамильтона — Якоби для интегрирования уравнений движения неголономных консервативных систем. Тр. Межвузовской конф. по прикл. теории устойчивости движения и аналит. механики, Казань, 1964.
11. Гумеров Ш. А. Об одном примере применимости метода Гамильтона — Якоби к неголономным консервативным системам. Докл. АН УзССР, 1958, № 11.
12. Гумеров Ш. А. О новой формулировке условий применимости метода Гамильтона — Якоби для неголономных консервативных систем. Изв. АН УзССР, сер. физ.-матем. наук 1959, № 1.
13. Шульгин М. Ф. Условия применимости метода Гамильтона — Якоби к интегрированию уравнений динамики с множителями связай. Научн. тр. Ташкентского ун-та. Механика, 1963, вып. 222.
14. Шульгин М. Ф. Об одном методе интегрирования уравнений движения неголономных систем. Научн. тр. Ташкентского ун-та. Механика, 1963, вып. 222.
15. Гюнтер Н. М. Интегрирование уравнений первого порядка в частных производных. М.—Л., Гостехиздат, 1934, стр. 243—244.
16. Аппель П. Теоретическая механика, т. 2. М., Физматгиз, 1960, стр. 219—222.
17. Шульгин М. Ф. К теории уравнений динамики с импульсивными множителями связей, Научн. тр. Ташкентского ун-та, Механика, 1971, вып. 397.