

8. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. О конвективной неустойчивости теплового скин-слоя. Ж. прикл. матем. и теор. физ., 1965, № 6.
9. Venezian G. Effect of modulation on the onset of thermal convection. J. Fluid Mech., 1969, vol. 35.
10. Красносельский М. А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. М., «Наука», 1966.
11. Ильин А. М., Калашников А. С., Олейник О. А. Линейные уравнения второго порядка параболического типа. Успехи матем. н., 1962, т. 17, вып. 3.
12. Крейн С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М., «Наука», 1967.
13. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа, М., «Наука», 1968.

УДК 539.3

НЕКОТОРЫЕ КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УПРУГОГО БЕСКОНЕЧНОГО КЛИНА

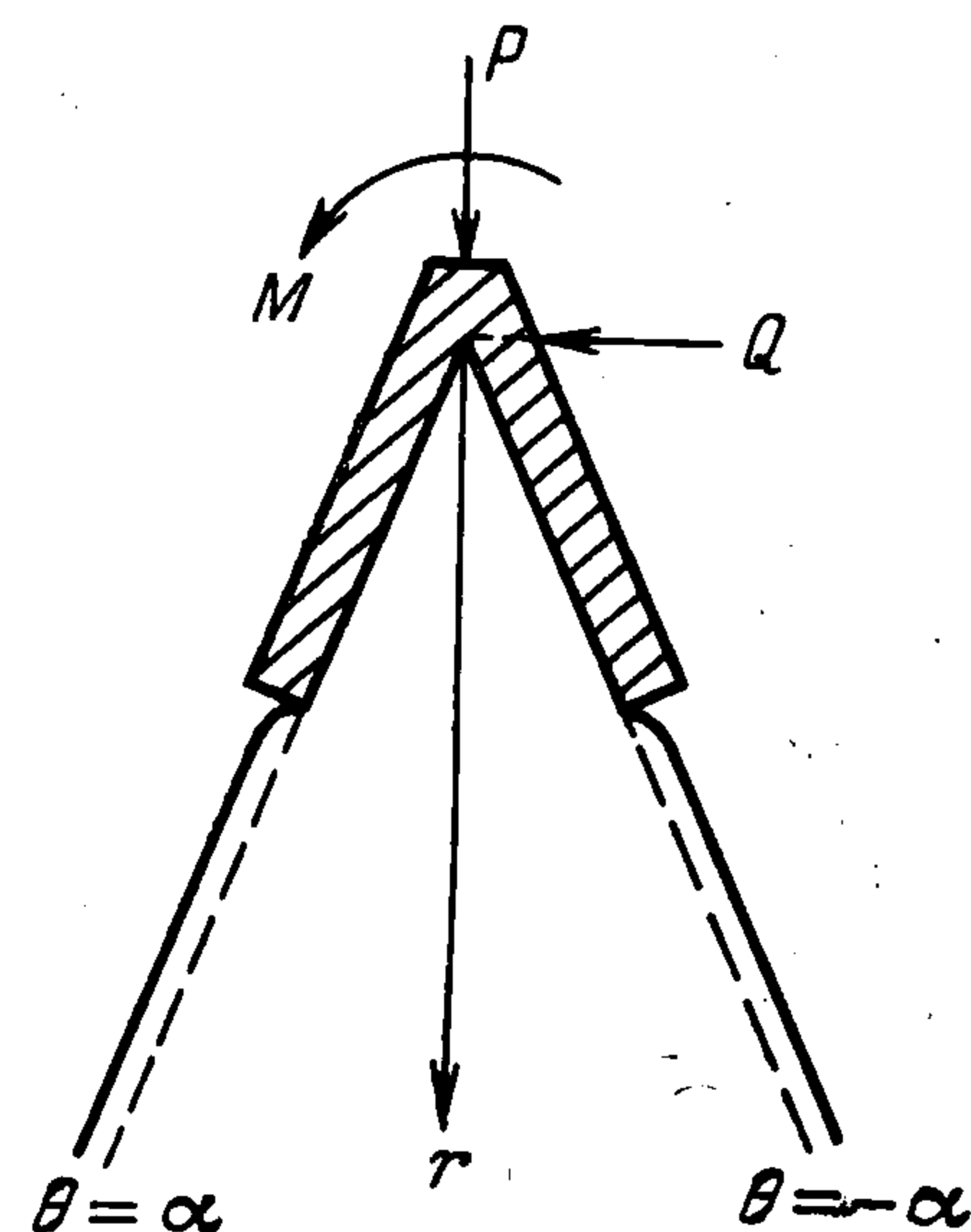
Б. М. Нуллер

(Ленинград)

Построены и исследованы несамоуравновешенные однородные решения смешанной плоской задачи теории упругости для бесконечного клина $-\alpha \leq \theta \leq \alpha$, $0 \leq r < \infty$, одна часть границы которого, $\theta = \pm \alpha$, $0 \leq r \leq 1$, находится в условиях скользящей заделки, а другая свободна от напряжений.

Решения представляют самостоятельный интерес, так как определяют напряженное состояние клина (клиновидной полости в упругой плоскости), на который через жесткую обойму (клиновидный штамп) действует нагрузка, эквивалентная продольной силе P , поперечной силе Q и моменту M (фигура). Вместе со статически уравновешенными однородными решениями они образуют систему функций, необходимую для решения смешанных задач об упругих конечных секториальных областях методом, изложенным в [1].

1. Симметричная задача. Запишем условия на границе клина при $\theta = \pm \alpha$:



$$u_\theta = 0 \quad \text{при } 0 \leq r \leq 1, \quad \sigma_\theta = 0 \quad \text{при } 1 < r < \infty \quad (1.1)$$

$$\tau_{r\theta} = 0 \quad \text{при } 0 \leq r < \infty \quad (1.2)$$

$$\sigma_\theta \sim (1-r)^{\varepsilon-1} \quad \text{при } r \rightarrow 1-0 \quad (\varepsilon > 0) \quad (1.3)$$

В формулах Папковича — Нейбера для упругих перемещений [2]

$$2Gu_r = \kappa (\Phi_1 \cos \theta + \Phi_2 \sin \theta) - r \left(\cos \theta \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} + \sin \theta \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} \right) - \frac{\partial \Phi_0}{\partial r} \quad (1.4)$$

$$[2Gu_\theta = \kappa (\Phi_2 \cos \theta - \Phi_1 \sin \theta) - \left(\cos \theta \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} + \sin \theta \frac{\partial \Phi_2}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_0}{\partial \theta}$$

(G — модуль сдвига, $\kappa = 3-4\nu$, ν — коэффициент Пуассона) положим

$$\Phi_0 = 0, \Phi_1 = F_1, \Phi_2 = F_2 \quad (1.5)$$

$$F_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_L [A_1(p) + A_2(p)] \cos p\theta r^{-p} dp, \quad F_2 = \frac{1}{2\pi i} \int_L [A_1(p) - A_2(p)] \sin p\theta r^{-p} dp \quad (1.6)$$

Путь интегрирования L выберем между мнимой осью и ближайшим к ней в полуплоскости $\operatorname{Re} p < 0$ полюсом λ подынтегральных функций. Вводя при $\theta = \alpha$ трансформанты Меллина

$$\sigma^+(p) = \int_0^1 \sigma_\theta r^p dr, \quad u^-(p) = \int_1^\infty u_\theta r^{p-1} dr \quad (1.7)$$

и используя их обращения, из условий (1.1), (1.2) получим систему

$$A_1(p)(p + \kappa) \sin(p - 1)\alpha + A_2(p)(p - \kappa) \sin(p + 1)\alpha = 2Gu^-(p) \quad (1.8)$$

$$A_1(p)(p + \kappa) \cos(p - 1)\alpha + A_2(p)(p - 1) \cos(p + 1)\alpha = p^{-1}\sigma^+(p) \quad (1.9)$$

$$A_1(p)p(p + \kappa) \sin(p - 1)\alpha + A_2(p)(p + 1)p \sin(p + 1)\alpha = 0 \quad (1.10)$$

Из уравнений (1.9), (1.10) находим

$$(1.11)$$

$$A_1(p) = -\sigma^+(p)(p + 1)p \sin(p + 1)\alpha D_2^{-1}(p), \quad A_2(p) = \sigma^+(p)p(p + \kappa) \sin(p - 1)\alpha D_2^{-1}(p) \\ D_2(p) = -p^2(p + \kappa)(p \sin 2\alpha + \sin 2p\alpha) \quad (1.12)$$

Согласно (1.8) функции $\sigma^+(p)$ и $u^-(p)$ связаны уравнением Винера — Хопфа

$$\sigma^+(p) = K(p)u^-(p), \quad K(p) = D_2(p)D_1^{-1}(p) \quad (1.13)$$

$$D_1(p) = -2G^{-1}p(p + \kappa)(1 - \nu) \sin(p - 1)\alpha \sin(p + 1)\alpha \quad (1.14)$$

Функция $K(p)$ мероморфна и четна. Ее полюсы в правой полуплоскости $\operatorname{Re} p > 0$ определяются формулами

$$p_{k1}^{(1)} = k\pi\alpha^{-1} - 1, \quad p_{k1}^{(2)} = (k - 1)\pi\alpha^{-1} + 1 \quad (k = 1, 2, \dots)$$

а асимптотика больших комплексных нулей $p_{k2}^{(1)}, p_{k2}^{(2)}$ имеет вид [3,4]: $p_{k2}^{(2)} = \bar{p}_{k2}^{(1)}$,

$$p_{k2}^{(1)} = (k - 1/4)\pi\alpha^{-1} + i(2\alpha)^{-1} \ln [(k - 1/4)\pi\alpha^{-1} \sin 2\alpha] + O(k^{-1} \ln k) \quad \text{при } \alpha < 1/2\pi \quad (1.15)$$

$$p_{k2}^{(1)} = (k - 3/4)\pi\alpha^{-1} + i(2\alpha)^{-1} \ln [(3/4 - k)\pi\alpha^{-1} \sin 2\alpha] + O(k^{-1} \ln k) \quad \text{при } \alpha > 1/2\pi \quad (1.16)$$

При $\alpha \rightarrow 1/2\pi$ пары комплексных нулей поочередно переходят в пары вещественных; тогда считается $p_{k2}^{(2)} \geq p_{k2}^{(1)}$.

Характер распределения полюсов и нулей функции $K(p)$ позволяет в общем случае факторизовать ее следующим образом:

$$K(p) = K^* p^2 K^-(p) [K^+(p)]^{-1} \quad (1.17)$$

$$K^* = -\frac{G(2\alpha + \sin 2\alpha)}{2(1 - \nu) \sin^2 \alpha}, \quad K^-(p) = \frac{1}{K^+(-p)} \quad (1.18)$$

$$K^+(p) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 + p/p_{k1}^{(1)}) (1 + p/p_{k1}^{(2)}) (1 + p/p_{k2}^{(1)})^{-1} (1 + p/p_{k2}^{(2)})^{-1} \quad (1.19)$$

При $\alpha = 1/2\pi$ целесообразна другая факторизация

$$K(p) = K^* p^2 K^-(p) [K^+(p)]^{-1}, \quad K^* = -1/2G(1 - \nu)^{-1} \\ K^+(p) = [K^+(-p)]^{-1} = \Gamma(1 + 1/2p) \Gamma^{-1}(1/2 + 1/2p)$$

Обоснование абсолютной и равномерной сходимости бесконечного произведения (1.19) и его асимптотическое поведение в правой полуплоскости $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} \lambda$,

имеющее вид

$$K^+(p) \sim (\sin \alpha)^{-1} \sqrt{(\alpha + 1/2 \sin 2\alpha)p} \quad \text{при } p \rightarrow \infty \quad (1.20)$$

нетрудно получить, следуя работе [4]. Впервые круг вопросов, связанных с точной факторизацией типа (1.17) — (1.19), был детально исследован И. Г. Альпериним [3].

Структура произведения (1.19) такова, что при p^* — вещественном и положительном имеют место неравенства

$$K^+(p^*) > 0, \quad K^-(-p^*) > 0 \quad (1.21)$$

Учитывая регулярность функций с индексами плюс и минус соответственно в полуплоскостях $\text{Re } p > \text{Re } \alpha$ и $\text{Re } p < 0$, на основе условия (1.3), оценки (1.20) и обобщенной теоремы Лиувилля [5] получим решение уравнения (1.13) в виде

$$\sigma^+(p) = \gamma_1 [K^+(p)]^{-1} \quad (1.22)$$

Подставляя (1.22) в (1.11), а затем в (1.6) и (1.4), найдем симметричное решение задачи (1.1) — (1.3)

$$u_r = \frac{1}{4\pi i G} \int_L B(p) [(p + \kappa) \sin(p-1)\alpha \cos(p+1)\theta - (p+1) \sin(p+1)\alpha \cos(p-1)\theta] \frac{dp}{r^p}$$

$$u_\theta = \frac{1}{4\pi i G} \int_L B(p) [(p - \kappa) \sin(p-1)\alpha \sin(p+1)\theta - (p+1) \sin(p+1)\alpha \sin(p-1)\theta] \frac{dp}{r^p} \quad (1.23)$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{1}{2\pi i} B(p) p(p+1) [\sin(p+1)\alpha \sin(p-1)\theta - \sin(p-1)\alpha \sin(p+1)\theta] \frac{dp}{r^{p+1}}$$

$$\sigma_\theta = \frac{1}{2\pi i} \int_L B(p) p [(p-1) \sin(p-1)\alpha \cos(p+1)\theta - (p+1) \sin(p+1)\alpha \cos(p-1)\theta] \times$$

$$\times \frac{dp}{r^{p+1}}$$

$$\sigma_r = \frac{1}{2\pi i} \int_L B(p) p [(p+1) \sin(p+1)\alpha \cos(p-1)\theta - (p+3) \sin(p-1)\alpha \cos(p+1)\theta] \times$$

$$\times \frac{dp}{r^{p+1}}$$

$$B(p) = \gamma_1 p(p + \kappa) [K^+(p) D_2(p)]^{-1} = \gamma_1 p^{-1} (p + \kappa) [K^* K^-(p) D_1(p)]^{-1} \quad (1.24)$$

Согласно первой части тождества (1.24), при $r > 1$ интегралы (1.23) можно разложить в ряды по вычетам, взятым в нулях функции $D_2(p)$ из полуплоскости $\text{Re } p > \text{Re } \alpha$. При этом напряжения, определяемые всеми нулями, кроме $p=0$, самоуравновешены. Вычет в полюсе $p=0$ связывает величины P и γ_1 соотношением

$$\gamma_1 = -P(2 \sin \alpha)^{-1} \quad (1.25)$$

Он же дает рост перемещений на бесконечности, имеющий вид

$$\frac{u_\theta}{\sin \theta} = -\frac{u_r}{\cos \theta} = \frac{P(1-\nu) \ln r}{G(2\alpha + \sin 2\alpha)} + O(1)$$

Согласно второй части (1.24), напряжения в вершине клина определяются первыми членами разложения интегралов (1.23) в ряды по вычетам в отрицательных нулях функции $D_1(p)$. При $\alpha < 1/2\pi$ эти напряжения в силу (1.21) будут сжимающими, конечными и не зависящими от угла θ

$$\sigma_\theta = \sigma_r = -\frac{P \sin \alpha K^+(1)}{\alpha(2\alpha + \sin 2\alpha)} + O(r^{\pi/\alpha-2}), \quad \tau_{r\theta} = O(r^{\pi/\alpha-2}) \quad (1.26)$$

При $\alpha > 1/2\pi$ напряжения в вершине клиновидной выемки обращаются в бесконечность, причем их интенсивность и порядок роста зависят от θ и α :

$$\frac{\sigma_\theta}{\cos(\pi\alpha - \theta)} = -\frac{\sigma_r}{\cos(\pi\alpha - \theta)} = \frac{\tau_{r\theta}}{\sin(\pi\alpha - \theta)} = \frac{P(\alpha - 1/2\pi) \sin \alpha r^{\pi/\alpha - 2}}{\alpha(\pi - \alpha)(2\alpha + \sin 2\alpha) K^{-1}(1 - \pi/\alpha)} + O(1) \quad (1.27)$$

Соотношения (1.27) показывают, что наибольшие разрывные σ_θ и сжимающие σ_r нормальные напряжения возникают на продолжении оси выемки, наибольшие касательные — на биссектрисах $\theta = \pm 1/2\alpha$, отделяющих зоны растяжения от зон сжатия. При изменении угла α от $1/2\pi$ до π порядок роста напряжений при $r \rightarrow 0$ монотонно увеличивается от r^0 до r^{-1} .

Оценки (1.26), (1.27) расходятся с соответствующей формулой (2.6) работы [6]. При $\alpha = 3/4\pi$ показатели степени r различаются на 12%, при $\alpha < 1/2\pi$ формула (2.6) дает в вершине клина бесконечные напряжения.

Причина такого расхождения, возможно, состоит в том, что линия $u_\theta = \delta$, описывающая в [6] границу плоского штампа, является гиперболической спиралью, и брать ее в качестве прямой можно только в тех случаях, когда плоский штамп достаточно удален от вершины клина.

Это замечание относится и к работе [7], в которой при $\theta = 0$ вместо условий $u_\theta = \pm h (0 \leq r \leq a)$, $u_\theta = 0 (b \leq r < \infty)$ — в задаче (1) несовместимых с условием $u_\theta = 0$ при $\theta = h \pm \alpha$, $r = 0$ — правильно было бы поставить условия $u_\theta = 0 (0 \leq r \leq a)$, $u_\theta = \mp h (b \leq r < \infty)$.

При указанных изменениях в вершинах клина задачи (2) возникнут растягивающие напряжения $\sigma_\theta > 0$, т. е. берега щели отстанут от вложенной в нее гладкой пластинки.

Из-за возникновения зоны растяжения также не могут быть реализованы решения смешанной задачи для бесконечного клина, рассмотренной в работе [8], где главный вектор напряжений при $r > 1$ равен нулю, и, следовательно, любая зона сжимающих напряжений под поверхностью контакта может быть уравновешена только зоной растяжения.

Найдем распределение напряжений под краем обоймы (штампа). Подставив (1.20) и (1.25) в (1.22), получим

$$\sigma^+(p) \sim -P [2(2\alpha + \sin 2\alpha) p]^{-1/2} \quad \text{при } p \rightarrow \infty, \quad \operatorname{Re} p > 0 \quad (1.28)$$

Из соотношений, связывающих асимптотики функций с их преобразованиями Меллина [5] и из оценки (1.28), следует, что эти напряжения сжимающие:

$$\sigma_\theta \sim -P [2\pi(2\alpha + \sin 2\alpha)(1 - r)]^{-1/2} \quad \text{при } r \rightarrow 1 - 0, \quad \theta = \alpha \quad (1.29)$$

2. Кососимметричная задача. Рассмотрим вначале задачу с неоднородным граничным условием

$$u_\theta = \delta r \quad \text{при } 0 \leq r \leq 1, \quad \sigma_\theta = 0 \quad \text{при } 1 < r < \infty \quad (\theta = \pm \alpha) \quad (2.1)$$

и условиями (1.2), (1.3). Полагая в формулах (1.4) $\Phi_0 = 0$, $\Phi_2 = F_1$, $\Phi_1 = -F_2$, из (2.1) и (1.2) получим систему уравнений

$$\begin{aligned} A_2(p)(\kappa - p) \cos(p + 1)\alpha + A_1(p)(\kappa + p) \cos(p - 1)\alpha &= 2G[u^-(p) + \delta(p + 1)^{-1}] \\ A_2(p)(p - 1) \sin(p + 1)\alpha - A_1(p)(\kappa + p) \sin(p - 1)\alpha &= p^{-1}\sigma^+(p) \\ A_2(p)(p + 1) \cos(p + 1)\alpha - A_1(p)(\kappa + p) \cos(p - 1)\alpha &= 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Отсюда неизвестные $A_1(p)$ и $A_2(p)$ выражаются формулами

$$\begin{aligned} A_1(p) &= \sigma^+(p)p(p + 1) \cos(p + 1)\alpha D_4^{-1}(p) \\ A_2(p) &= \sigma^+(p)p(p + \kappa) \cos(p - 1)\alpha D_4^{-1}(p) \\ D_4(p) &= p^2(p + \kappa)(p \sin 2\alpha - \sin 2p\alpha) \end{aligned} \quad (2.3)$$

уравнение Винера — Хопфа принимает вид

$$\begin{aligned} \sigma^+(p) &= N(p)[u^-(p) + \delta(p+1)^{-1}] \\ N(p) &= D_4(p)D_3^{-1}(p), \quad D_3(p) = 2G^{-1}p(p+\kappa)(1-\nu)\cos(p+1)\alpha\cos(p-1)\alpha \end{aligned} \quad (2.4)$$

При $\alpha \neq 1/2\pi$ функция $N(p)$, имеющая в точке $p=0$ двукратный нуль, факторизуется так же, как функция $K(p)$:

$$\begin{aligned} N(p) &= \frac{N^* p^2 N^-(p)}{N^+(p)}, \quad N^* = \frac{G(\sin 2\alpha - 2\alpha)}{2(1-\nu)\cos^2\alpha}, \quad N^-(p) = \frac{1}{N^+(-p)} \\ N^+(p) &= \prod_{k=1}^{\infty} (1+p/p_{k3}^{(1)})(1+p/p_{k3}^{(2)})(1+p/p_{k4}^{(1)})^{-1}(1+p/p_{k4}^{(2)})^{-1} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Здесь $p_{k3}^{(1)}$, $p_{k3}^{(2)}$ и $p_{k4}^{(1)}$, $p_{k4}^{(2)}$ — полюса и нули функции $N(p)$ в полуплоскости $\operatorname{Re} p > 0$.

Асимптотика больших комплексных нулей $p_{k4}^{(1)}$ при $\alpha < 1/2\pi$ и $\alpha > 1/2\pi$ определяется соответственно формулам (1.16) и (1.15), $p_{k4}^{(2)} = -\bar{p}_{k4}^{(1)}$, формулы для полюсов имеют вид

$$\begin{aligned} p_{k3}^{(1)} &= p_{k3}^{(2)} - 2 = (k - 1/2)\pi\alpha^{-1} - 1 \quad \text{при } \alpha < 1/2\pi \quad (k=1, 2, \dots) \\ p_{k3}^{(1)} &= (k + 1/2)\pi\alpha^{-1} - 1, \quad p_{k3}^{(2)} = (k - 3/2)\pi\alpha^{-1} + 1 \quad \text{при } \alpha > 1/2\pi \quad (k=1, 2, \dots) \end{aligned}$$

При $\alpha = 1/2\pi$ $N(0) \neq 0$, поэтому функция $N(p)$ факторизуется в виде

$$\begin{aligned} N(p) &= \pi N(0) N^-(p) [N^+(p)]^{-1}, \quad N(0) = 2G\pi^{-1}(1-\nu)^{-1} \\ N^+(p) &= [N^+(-p)]^{-1} = \Gamma(1/2 + 1/2p) \Gamma^{-1}(1 + 1/2p) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Из уравнения (2.4) обычным путем получим

$$\begin{aligned} \sigma^+(p) &= [\gamma_2 + \delta(p+1)^{-1}N^+(-1)N^*] [N^+(p)]^{-1} \quad \text{при } \alpha \neq 1/2\pi \\ \sigma^+(p) &= \delta(p+1)^{-1}\pi N^+(-1)(0) [N^+(p)]^{-1} \quad \text{при } \alpha = 1/2\pi \end{aligned} \quad (2.7)$$

Подставив (2.3) в (1.6) и (1.4), найдем кососимметричное решение задачи (1.1) — (1.3), в котором поворот клина, вносимый условием (2.1), учитывается в u_θ слагаемым δr :

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{1}{4\pi i G} \int_L C(p) [(p+\kappa)\cos(p-1)\alpha\sin(p+1)\theta - (p+1)\cos(p+1)\alpha\sin(p-1)\theta] \times \\ &\quad \times r^{-p} dp \\ u_\theta &= -\delta r + \frac{1}{4\pi i G} \int_L C(p) [(\kappa-p)\cos(p-1)\alpha\cos(p+1)\theta + \\ &\quad + (p+1)\cos(p+1)\alpha\cos(p-1)\theta] r^{-p} dp \\ \tau_{r\theta} &= \frac{1}{2\pi i} \int_L C(p) p(p+1) [\cos(p-1)\alpha\cos(p+1)\theta - \cos(p+1)\alpha\cos(p-1)\theta] r^{-p-1} dp \\ \sigma_\theta &= \frac{1}{2\pi i} \int_L C(p) p [(p-1)\cos(p-1)\alpha\sin(p+1)\theta - \\ &\quad - (p+1)\cos(p+1)\alpha\sin(p-1)\theta] r^{-p-1} dp \\ \sigma_r &= \frac{1}{2\pi i} \int_L C(p) [(p+1)\cos(p+1)\alpha\sin(p-1)\theta - \\ &\quad - (p+3)\cos(p-1)\alpha\sin(p+1)\theta] r^{-p-1} dp \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$C(p) = p(p+\kappa)\sigma^+(p)D_4^{-1}(p) = p(p+\kappa)[u^-(p) + \delta(p+1)^{-1}]D_3^{-1}(p)$$

Подсчитав вычеты подынтегральных функций (2.8) в полюсах $p = 0$ и $p = 1$, из уравнений равновесия получим

$$\gamma_2 = -\frac{Q}{2 \cos \alpha} - MN^+(1), \quad \delta = \frac{N^+(1)}{N^*} \left[\frac{Q}{\cos \alpha} + MN^+(1) \right] \quad \text{при } \alpha \neq 1/2\pi$$

$$\delta = -2M(1 - \nu)G^{-1}\pi^{-1} \quad \text{при } \alpha = 1/2\pi$$

Перемещения на бесконечности и напряжения в вершине клина и под краем обоймы (штампа) находятся по аналогии с предыдущим пунктом. При $r \rightarrow \infty$ и $\alpha \neq 1/2\pi$ имеем

$$u_\theta \sim -\delta r + O(\ln r), \quad u_r \sim \frac{(1 - \nu) \sin \theta}{G(\sin 2\alpha - \dots)} \quad (2.9)$$

При $r \rightarrow 0$ и $\alpha < 1/2\pi$, учитывая, что в точке $p = -1$ подынтегральные функции (2.8) имеют устранимые особенности, и первый полюс находится в точке $p = p_{13}^{(1)}$, получим

$$-\frac{\sigma_\theta}{\sin \beta\theta} = \frac{\sigma_r}{\sin \beta\theta} = \frac{\tau_{r\theta}}{\cos \beta\theta} = -\frac{r^{\beta-2} \cos \alpha N^+(\beta-1)}{\alpha(2\alpha - \sin 2\alpha)} [MN^+(1) \cos \alpha + \frac{Q\pi}{2\pi - 4\alpha}] + O(r^\beta), \quad \beta = 1/2\pi\alpha^{-1} \quad (2.10)$$

Таким образом, напряжения в вершине клина бесконечны при $\alpha > 1/4\pi$.

При $r \rightarrow 0$ и $\alpha > 1/2\pi$ вычеты в полюсе $p = p_{13}^{(2)}$ дают

$$\frac{\sigma_\theta}{(4\alpha - \pi) \sin \beta\theta} = -\frac{\sigma_r}{(4\alpha + \pi) \sin \beta\theta} = \frac{\tau_{r\theta}}{\pi \cos \beta\theta} = \frac{r^{-\beta} \cos \alpha N^+(1-\beta)}{\pi\alpha(2\alpha - \sin 2\alpha)} \left[\frac{Q(4\alpha - \pi)}{4\alpha - 2\pi} + [MN^+(1) \cos \alpha] + O(r^{3\beta-2}) \right] \quad (2.11)$$

При $r \rightarrow 1 - 0$, $\theta = \alpha$, $\alpha \neq 1/2\pi$ получим

$$\sigma_\theta \sim -\frac{|\cos \alpha|}{\sqrt{\pi(2\alpha - \sin 2\alpha)(1-r)}} \left[2MN^+(1) + \frac{Q}{\cos \alpha} \right] \quad (2.12)$$

3. Для использования рассмотренных решений в контактных задачах необходимо, чтобы в вершине клина и под краями обоймы (штампа) нормальные напряжения не были растягивающими, т. е. должно выполняться условие

$$\sigma_\theta \leq 0 \quad \text{при } \theta = \pm \alpha, \quad r \rightarrow 0 \text{ и } r \rightarrow 1 - 0 \quad (3.1)$$

Как показывают формулы (1.26), (1.27) и (1.29), симметричное решение удовлетворяет этому условию при всех α . Кососимметричное решение, очевидно, всегда имеет на линии контакта зону растяжения и отдельно реализовано быть не может.

Напряжения в вершине клина согласно формулам (1.26), (1.27) и (2.10), (2.11) в общем случае имеют вид

$$\sigma_\theta = s_1(\alpha) r^{t_1(\alpha)} \pm s_2(\alpha) r^{t_2(\alpha)} \pm s_3(\alpha) r^{t_3(\alpha)} \quad \text{при } \theta = \pm \alpha \quad (3.2)$$

Здесь первое слагаемое характеризует симметричную часть, в которой $s_1(\alpha) < 0$ при $P > 0$, второе и третье — кососимметричную. Легко проверить, что $t_1(\alpha) < t_3(\alpha)$ при всех α , в интервалах $(0, 1/4\pi)$ и $(3/4\pi, \pi)$ $t_1(\alpha) < t_2(\alpha)$, в интервале $(1/4\pi, 3/4\pi)$ $t_1(\alpha) > t_2(\alpha)$.

Таким образом, если $0 < \alpha < 1/4\pi$ или $3/4\pi < \alpha < \pi$, то для любых значений Q и M и для $P > 0$ найдется такое r_1 , что на отрезках $0 \leq r < r_1$, $\theta = \pm \alpha$ возникнут сжимающие напряжения $\sigma_\theta < 0$. Для удовлетворения оставшейся части условия (3.1) в силу оценок (1.29) и (2.12) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$P \sqrt{2\alpha - \sin 2\alpha} > |2MN^+(1) \cos \alpha + Q| \sqrt{4\alpha + 2 \sin 2\alpha} \quad (3.3)$$

При $1/4\pi < \alpha < 3/4\pi$ согласно (2.10), (2.11) и (3.2) условие (3.1) будет иметь место лишь в том случае, когда наряду с условием (3.3) $s_2(\alpha) = 0$, т. е. когда сила и момент связаны равенствами

$$Q\pi = M(4\alpha - 2\pi)N^+(1) \cos \alpha \text{ при } 1/4\pi < \alpha < 1/2\pi$$

$$Q(\pi - 4\alpha) = M(4\alpha - 2\pi)N^+(1) \cos \alpha \text{ при } 1/2 < \alpha < 3/4\pi$$

Гарантировать строгое соблюдение этих равенств практически нельзя. Поэтому правильно считать, что при $1/4\pi < \alpha < 1/2\pi$ и при $1/2 < \alpha < 3/4\pi$ даже в симметричном случае решение (1.23) механически неосуществимо, — обойма (штамп) отстанет от упругого клина при малейшем нарушении симметрии.

Вопрос о достаточности условия (3.1) для плотного прилегания контактирующих поверхностей требует совсем иного подхода и будет рассмотрен отдельно.

Поступила 18 V 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Нуллер Б. М. Контактные задачи для упругого полубесконечного цилиндра. ПММ, 1970, т. 34, вып. 4.
2. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. М.—Л., Изд-во АН СССР, 1963.
3. Альперин И. Г. Напряжения в бесконечной полосе, равномерно сжатой по половине длины. Уч. зап. Харьковск. ун-та 1950, № 20.
4. Нуллер Б. М. Контактная задача для упругого бесконечного конуса. ПММ, 1970, т. 34, вып. 2.
5. Нобл Б. Применение метода Винера — Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
6. Александров В. М. Контактные задачи для упругого клина. Инж. ж. МТИ, 1967, № 2.
7. Сметанин Б. И. О расклинивании упругого бесконечного клина. ПММ, 1969, т. 33, вып. 5.
8. Matczynski M. Elastic wedge with discontinuous boundary conditions. Arch. Mech. Stos., 1963, vol. 15, No. 6.

УДК 531.31

ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ С МНОЖИТЕЛЯМИ СВЯЗЕЙ

А. С. Сумбатов

(Москва)

Обобщив незавершенное исследование К. Г. Якоби [1], Г. К. Суслов [2,3] показал, что, зная полный интеграл W одного уравнения в частных производных первого порядка, можно составить некоторую совокупность первых интегралов уравнений движения механической системы с множителями связей. Г. К. Суслов ограничился случаем, когда наложенные на систему связи заданы в конечном виде. Для таких систем указанная совокупность первых интегралов определяет общее решение уравнений движения, следовательно, имеем метод интегрирования этих уравнений.

Распространением этого метода на неголономные системы занимались И. С. Аржаных [4-10], Ш. А. Гумеров [9-12], М. Ф. Шульгин [13,14], Э. Х. Назиев. И. С. Аржаных [6] установил, что в случае неголономных связей интеграл W должен удовлетворять дополнительной системе уравнений, поэтому указанная Суловым совокупность первых интегралов определяет, вообще говоря, частное решение уравнений движения.