основании вычисления волнового профиля в девяти продольных сечениях, представлен на фиг. 2. Из этой фигуры, на которой показаны линии равного уровня, построенные через $0.04\nu^{-1}$, следует, что картина волн за движущимся эллипсоидом оказывается значительно сложнее, чем это следует из асимптотической теории [1,5].

Поступила 3 XII 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Ламб Г. Гидродинамика. М.—Л., Гостехиздат, 1947.
2. Костюков А. А. Исследование профиля поперечных волн на поверхности жидкости за движущимся телом. Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение, 1959, № 6.
3. Смородин А. И. О применении асимптотического метода для анализа волн при неустановившемся движении источника. ПММ, 1965, т. 29, вып. 1.
4. Черкесов Л. В. Развитие корабельных волн в жидкости конечной глубины. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 4.
5. Ткалич Е. Ф., Шайбо Н. В. О волнообразовании погруженного эллипсоида. В сб.: Гидромеханика, вып. 15. Гидродинамика больших скоростей, 1969.
6. Кочин Н. Е. О волновом сопротивлении и подъемной силе погруженных в жидкость тел. Собрание сочинений. т. 2. М.—Л., Изд-во АН СССР, 1949.
7. Аэродинамика. Под общ. ред. В. Ф. Дюрэнд, т. 1, М.-Л., ОНТИ, 1937.
8. Peters A. S. A new treatment of the ship wave problem. Communs Pure and Appl. Math., 1949, vol. 2, No. 2-3.

УДК 532.517

О КОНВЕКТИВНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ СЛОЯ ЖИДКОСТИ В МОДУЛИРОВАННОМ ПОЛЕ ВНЕШНИХ СИЛ

Г. С. Маркман

(Ростов-на-Дону)

Рассматривается возникновение конвекции в слое вязкой несжимаемой жидкости со свободными границами. Температура на границах слоя, плотность внутренних источников тепла и напряженность поля силы тяжести предполагаются периодическими по времени с одним и тем же периодом T. Для случая, когда невозмущенный градиент температуры в слое всюду отрицателен, доказано существование критического числа Релея и T-периодизм нейтрального возмущения. Эти результаты получены путем сведения линеаризованной задачи к обыкновенному дифференциальному уравнению в некотором банаховом пространстве и применения теории линейных положительных операторов [1].

Возникновению конвекции под действием периодических по времени сил посвящены работы [2–9]. Рассматривалась устойчивость равновесия горизонтального слоя со свободными и твердыми границами; в предположении, что градиент температуры не зависит от вертикальной координаты, численными методами определены границы устойчивости [2]. Методом осреднения по малым колебаниям исследовано влияние высокочастотных вертикальных вибраций на возникновение конвекции [3,4]. Дано обоснование метода осреднения для абстрактных параболических уравнений и, в частности, для задачи конвекции [5,6]. Рассматривалась конвекция в полости квадратного сечения в случае, когда жидкость подогревается снизу и находится под действием вибрационных сил; дано численное решение нелинейных уравнений конвекции [7]. Исследовалась устойчивость равновесия в случае, когда градиент температуры зависит от вертикальной координаты [8,9]; а именно конвекция в глубоком бассейне, температура поверхности которого периодически меняется со временем [8]; конвекция в горизонтальном слое с периодическим изменением температуры на свободных границах при малых амплитудах модуляции [9].

Рассматривается возникновение конвекции в горизонтальном слое вязкой несжимаемой жидкости, ограниченном плоскостями $z = 0,\ h$. В жидкости распределены источники тепла с плотностью $aF(z, t)$. Температура на горизонтальных границах задана и меняется по закону $a\varphi(z, t)$. Слой жидкости совершает вертикальные колебания с ускорением $g[\Phi(t) - 1]$.

Будем считать, что гладкие функции F, Φ, φ периодически зависят от t с периодом T.

Предположим, что относительная скорость движения жидкости v' и температура θ' периодичны по x, y с периодами $2\pi/\alpha_1$, $2\pi/\alpha_2$ соответственно и что слой жидкости не может смещаться как целое вдоль плоскости x, y

$$\int\limits_{-\pi/\alpha_2}^{\pi/\alpha_2}\int\limits_0^1 v_x' dydz = \int\limits_{-\pi/\alpha_1}^{\pi/\alpha_1}\int\limits_0^1 v_y' dxdz = 0$$

Далее рассмотрим устойчивость состояния покоя, при котором

$$\mathrm{v}_0' = 0, \quad \theta_0' = a\theta_0(z, t), \quad P_0' = \beta g a \Phi(t)\int\limits_0^z \theta_0 dz + \psi(t) \tag{1}$$

где $\psi(t)$ — произвольная функция времени. Функция $\psi(t)$ определяется однозначно, если известно давление в какой-либо точке области при всех t.)

Равновесная температура θ_0 определяется из задачи

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = \chi\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2} + F(z, t)$$

$$\theta|_{z=0} = \varphi(0, t), \quad \theta|_{z=1} = \varphi(1, t), \quad \theta(z, t) = \theta(z, t + T)$$

Будем считать, что F, φ — бесконечно дифференцируемые функции, тогда и $\theta_0(z, t)$ — бесконечно дифференцируемая функция.

Линеаризованные уравнения малых возмущений равновесия в безразмерной форме имеют вид

$$\frac{1}{\sqrt{p}}\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial t} = -\nabla P + \Delta \mathrm{v} + \mathbf{j}R\Phi(t)\theta$$

$$\sqrt{p}\frac{\partial\theta}{\partial t} = \Delta\theta + \mathbf{j}Rc(z, t)\mathrm{v}, \qquad \operatorname{div}\mathrm{v} = 0 \tag{2}$$

$$R^2 = \mathrm{Ra} = \frac{g\beta a h^4}{\nu\chi}, \qquad p = \frac{\nu}{\chi}, \qquad c(z, t) = -\frac{\partial\theta_0}{\partial z}$$

Здесь Ra, p — числа Релея и Прандтля, $\mathbf{j}$ — единичный вектор, направленный вертикально вверх.

Условия периодичности по x, y и равенства нулю соответствующих интегралов остаются прежними.

Решение системы (2) ищем в виде

$$v_x = v_1(z, t)\sin k_1\alpha_1 x \cos k_2\alpha_2 y \tag{3}$$

$$v_y = v_2(z, t)\cos k_1\alpha_1 x \sin k_2\alpha_2 y$$

$$(v_z, \theta, P) = (w(z, t), \tau(z, t), q(z, t))\cos k_1\alpha_1 x \cos k_2\alpha_2 y$$

(k_1, k_2 — натуральные числа).

Подставляя (3) в уравнения системы (2), исключая компоненты скорости v_1, v_2 и давление q, получим для w и τ систему уравнений

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \sqrt{p}L\right) Lw = -R\alpha^2 \sqrt{p}\Phi(t)\tau, \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{\sqrt{p}} L\right)\tau = R\frac{c(z,t)}{\sqrt{p}} w \tag{4}$$

$$L = \partial^2/\partial z^2 - \alpha^2, \qquad \alpha^2 = (k_1\alpha_1)^2 + (k_2\alpha_2)^2$$

Краевые условия на свободных границах слоя

$$w = \partial^2 w / \partial z^2 = 0, \qquad \tau = 0 \qquad (z = 0,1) \tag{5}$$

Теорема. Пусть $\Phi(t) > 0$, $c(z, t) > 0$ при всех $z \in [0, 1]$, $t > 0$. Тогда существует критическое значение Ra_* числа Релея такое, что при $R > \sqrt{\mathrm{Ra}_*}$ состояние покоя (1) неустойчиво: существует ненулевое решение задачи (4), (5)

$$w = e^{\sigma t}\tilde{w}(z, t), \qquad \tau = e^{\sigma t}\tilde{\tau}(z, t) \tag{6}$$

где $\sigma > 0$; функции $\tilde{w}$, $\tilde{\tau}$ периодичны по t с периодом T.

Доказательство. Пусть G — оператор Грина дифференциального оператора $-L$ с краевыми условиями $w(0) = w(1) = 0$.

Используя оператор G, имеем

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \sqrt{p}L\right) w = R\alpha^2 \sqrt{p}\Phi(t) G\tau, \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{\sqrt{p}} L\right)\tau = R\frac{c(z,t)}{\sqrt{p}} w$$

$$w|_{z=0,\,1} = \tau|_{z=0,\,1} = 0 \tag{7}$$

Введем пространство $E = L_p(0, 1) + L_p(0, 1)$, $p \geqslant 1$ — прямая сумма двух пространств L_p. Элементом пространства E является пара $\xi = (w, \tau)$, а норма определяется равенством

$$\|\xi\|_E = \|w\|_{L_p} + \|\tau\|_{L_p}, \qquad \xi = (w, \tau)$$

Систему (7) будем трактовать как дифференциальное уравнение в E

$$\frac{d\xi}{dt} = N\xi, \qquad N = \left\|\begin{matrix} \sqrt{p}L & R\alpha^2\sqrt{p}\Phi G \\ R\dfrac{c}{\sqrt{p}} & \dfrac{1}{\sqrt{p}}L \end{matrix}\right\| \tag{8}$$

Определим оператор сдвига $U(t)$ по траекториям дифференциального уравнения (8) за время $0 \leqslant t \leqslant T$ [10], полагая $\xi(t) = U(t)\xi(0)$.

В пространстве E рассмотрим конус K неотрицательных вектор-функций: $\xi = (w, \tau) \in K$ тогда и только тогда, когда $w(z)$, $\tau(z) \geqslant 0$ для $z \in [0, 1]$. Конус K воспроизводящий и нормальный [1].

Оператор $U(t)$ положителен относительно конуса K, что следует из принципа максимума для параболического уравнения второго порядка [11] и положительности оператора G.

Покажем, что оператор монодромии $U_T = U(T)$ имеет в конусе K собственный вектор, которому отвечает положительное и простое собственное значение ρ.

Рассмотрим вначале однородное уравнение

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{\sqrt{p}} Lf = 0, \qquad f|_{z=0,\,1} = 0$$

Его решение, удовлетворяющее начальному условию $f(z, 0) = f_0 \in D(L)$, дается [12] формулой

$$f(t) = V(t) f_0$$

где $V(t)$ — сильно непрерывная при $t > 0$ полугруппа линейных ограниченных операторов в $L_p(0, 1)$.

Задачу (8) можно записать в виде

$$\xi(t) = \zeta + R(B\xi)(t), \qquad \xi = (w, \ \tau) \tag{9}$$

$$\zeta = A(t)\,\xi_0 = \begin{Vmatrix} V(pt)\,w_0 \\ V(t)\,\tau_0 \end{Vmatrix}, \quad (B\xi)(t) = \begin{Vmatrix} \alpha^2 \sqrt{p} \int\limits_0^{pt} V(pt-s)\,\Phi(s)\,G\tau(s)\,ds \\ \dfrac{1}{\sqrt{p}} \int\limits_0^{t} V(t-s)\,c(z,s)\,w(s)\,ds \end{Vmatrix}$$

Здесь $\xi_0 = (w_0, \tau_0)$ — начальное значение; интегралы в (9) понимаются как пределы по норме соответствующих римановых интегральных сумм.

Оператор монодромии U_T представим в виде

$$U_T\xi_0 = \sum_{k=0}^{\infty} R^k C_k \xi_0 = \sum_{k=0}^{\infty} R^k B^k \zeta\,|_{t=T} \tag{10}$$

Ряд в (10) сходится равномерно на любом шаре в пространстве E.

Докажем, что оператор U_T вполне непрерывен в E. Для этого установим, что каждое слагаемое в (10) есть вполне непрерывный оператор.

Оператор $V(t)$ при любом фиксированном $t > 0$ вполне непрерывен в L_p. Следовательно, оператор $C_0 = A(T)$ вполне непрерывен в E.

Рассмотрим операторы B_ε

$$B_\varepsilon = \int\limits_0^{T-\varepsilon} V(T-s)\,A(s)\,ds$$

Операторы B_ε вполне непрерывны в E. Это следует из вполне непрерывности оператора, стоящего под знаком интеграла, при любом фиксированном s и сходимости по норме интегральных римановых сумм [13]. Операторы B_ε при $\varepsilon \to 0$ равномерно сходятся к оператору C_1, откуда и следует вполне непрерывность последнего.

Вполне непрерывность оператора C_2 вытекает из вполне непрерывности оператора G в L_p и равенства

$$C_2\xi_0 = (\alpha^2 G H_1 w_0, \ \alpha^2 G H_2 \tau_0)$$

где H_1, H_2 — ограниченные операторы.

Вполне непрерывность операторов $C_k (k = 3,4,\ldots)$ доказывается аналогично, Из (10) выводим теперь, что оператор U_T вполне непрерывен. Покажем, что он η_0 — положителен относительно конуса K при $\eta_0 = (\varphi_0, \varphi_0)$; $\varphi_0(z) = \sin\pi z$ — собственная функция оператора G, отвечающая наименьшему характеристическому числу $\lambda = \pi^2 + \alpha^2$.

Оператор $V(t)$, как известно, φ_0-положителен относительно конуса K_0 неотрицательных функций, и имеют место соотношения

$$b(u, \ t)\varphi_0 \leqslant V(t)u \leqslant d(u, \ t)\varphi_0 \quad (u \in K_0, \ b, \ d > 0) \tag{11}$$

В силу условия теоремы существуют такие постоянные m_1, m_2, n_1, n_2, при которых выполняются неравенства

$$m_1 \leqslant \Phi \leqslant m_2, \quad n_1 \leqslant c \leqslant n_2, \quad z \in [0,1], \quad t \in [0,T] \tag{12}$$

Для того чтобы доказать η_0-ограниченность оператора U_T снизу, заметим, что для любого $\xi_0 = (w_0, \tau_0) \in K$ имеем

$$U_T\xi_0 \geqslant RB\zeta\,|_{t=T} = \tag{13}$$

$$= R\left(\alpha^2 \sqrt{p} \int\limits_0^{pT} V(pT-s)\,\Phi(s)\,GV(s)\,\tau_0 ds, \ \frac{1}{\sqrt{p}} \int\limits_0^{T} V(T-s)\,c(s)\,V(ps)\,w_0 ds\right)$$

Это вытекает из (10) и положительности операторов A и B. Непосредственно проверяется, что

$$V(t)\varphi_0 = \varphi_0 \exp\left(-\frac{\lambda}{\sqrt{p}}t\right) \tag{14}$$

Теперь из (11) — (14) выводим оценку

$$U_T\xi_0 \geqslant RM_1(\xi_0)\eta_0, \qquad \eta_0 = (\varphi_0, \varphi_0)$$

$$M_1(\xi_0) = \min\left\{\frac{\alpha^2 m_1 \sqrt{p}}{\lambda}\int_0^T e^{-\lambda\sqrt{p}(T-s)} b(\tau_0, ps)\,ds,\ \frac{n_1}{\sqrt{p}}\int_0^T e^{-\lambda/\sqrt{p}(T-s)} b(w_0, s)\,ds\right\}$$

Для доказательства η_0-ограниченности оператора U_T сверху из (9), (11) и (14) получим

$$U_T\xi_0 \leqslant M_2(\xi_0)\eta_0$$

$$M_2(\xi_0) = R\gamma\delta e^{\gamma RT}, \quad \delta = \max\left\{\int_0^T d(\tau_0, ps)\,ds,\ \int_0^T d(w_0, s)\,ds\right\}$$

$$\gamma = \max\{\alpha^2 m_2 \sqrt{p},\ n_2/\sqrt{p}\}$$

Итак, показано, что оператор U_T вполне непрерывен и η_0-положителен относительно воспроизводящего конуса K. Из теорем работы [1] следует, что оператор U_T имеет в конусе K единственный собственный вектор $\xi_0' = (w_0', \tau_0')$

$$U_T\xi_0' = \rho\xi_0', \qquad \rho \geqslant RM_1(\eta_0) > 0 \tag{15}$$

причем, положительный мультипликатор ρ — простой и больше абсолютных величин всех остальных собственных значений.

Из оценки (15) следует, что при $R > R_* = 1 / M_1(\eta_0)$ мультипликатор $\rho > 1$. Решение (6) получится, если положить $\xi = U(t)\xi_0'$.

Заметим, что решение (6) бесконечно дифференцируемо при $t > 0$. Действительно, функции $\Phi(t)$, $c(z, t)$, $V(t)\,w_0$, $V(t)\tau_0$ бесконечно дифференцируемы при $t > 0$. Теперь бесконечная дифференцируемость решения (6) следует из (10), так как оператор G действует из L_p в W_p^2, а из $W_p^{(l)}$, в $W_p^{(l+2)}$ при любом $p \geqslant 1$.

Теорема доказана.

Как показано выше, наибольший по модулю мультипликатор ρ — положительный. Отсюда вытекает аналог принципа смены устойчивости: значению $R_*(\alpha^2) = 1 / M_1(\eta_0)$ соответствует T-периодическое решение (6) с $\sigma = 0$.

Поступила 27 IV 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Красносельский М. А. Положительные решения операторных уравнений. М., Физматгиз, 1962.
2. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Юрков Ю. С. О конвективной устойчивости при наличии периодически меняющегося параметра. ПММ, 1970, т. 34, вып. 3.
3. Зеньковская С. М., Симоненко И. Б. О влиянии вибраций высокой частоты на возникновение конвекции. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 5.
4. Зеньковская С. М. Исследование конвекции в слое жидкости при наличии вибрационных сил. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 1.
5. Симоненко И. Б. Обоснование метода осреднения для абстрактных параболических уравнений. Матем. сб., 1970, т. 18 (123), вып. 1.
6. Симоненко И. Б. Обоснование метода осреднения для задачи конвекции. В сб.: Математический анализ и его приложения. Изд. Ростовск. ун-та, 1969, т. 1.
7. Бурдэ Г. И. Численное исследование конвекции, возникающей в модулированном поле внешних сил. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 2.

8. Г е р ш у н и Г. З., Ж у х о в и ц к и й Е. М. О конвективной неустойчивости теплового скин-слоя. Ж. прикл. матем. и теор. физ., 1965, № 6.
9. V e n e z i a n G. Effect of modulation on the onset of thermal convection. J. Fluid Mech., 1969, vol. 35.
10. К р а с н о с е л ь с к и й М. А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. М., «Наука», 1966.
11. И л ь и н А. М., К а л а ш н и к о в А. С., О л е й н и к О. А. Линейные уравнения второго порядка параболического типа. Успехи матем. н., 1962, т. 17, вып. 3.
12. К р е й н С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М., «Наука», 1967.
13. К о л м о г о р о в А. Н., Ф о м и н С. В. Элементы теории функций и функционального анализа, М., «Наука», 1968.

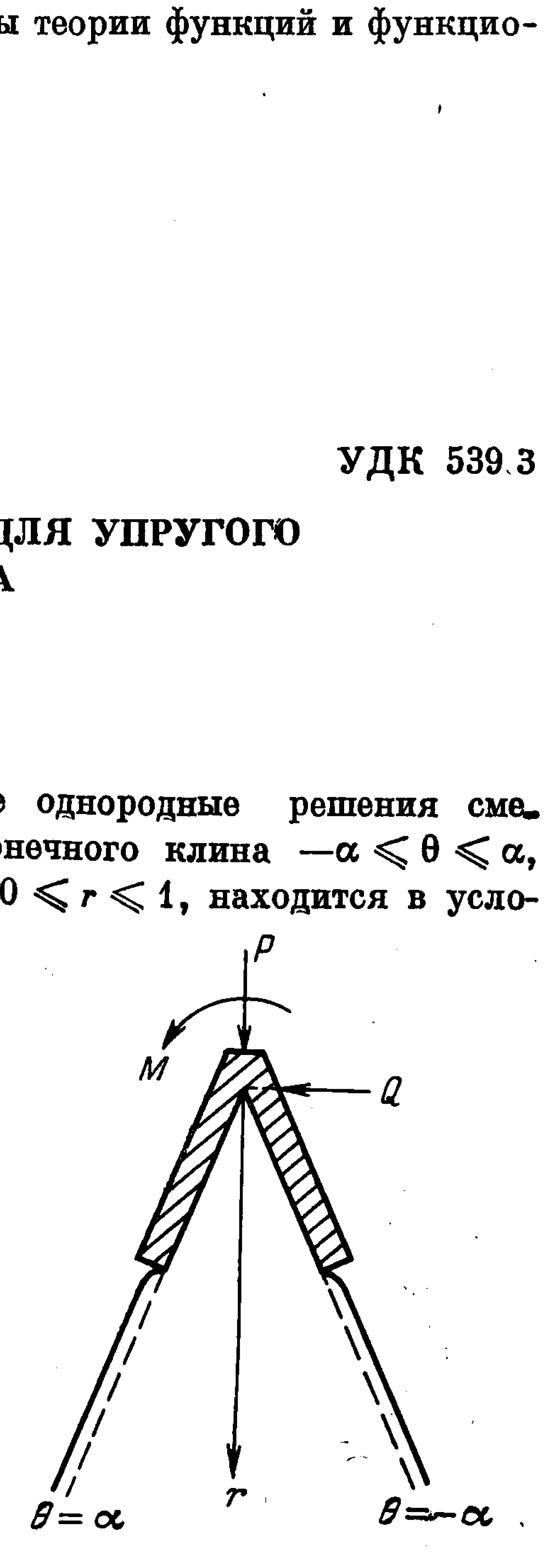
УДК 539.3

НЕКОТОРЫЕ КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УПРУГОГО БЕСКОНЕЧНОГО КЛИНА

Б. М. Нуллер

(Ленинград)

Построены и исследованы несамоуравновешенные однородные решения смешанной плоской задачи теории упругости для бесконечного клина $-\alpha \leqslant \theta \leqslant \alpha$, $0 \leqslant r < \infty$, одна часть границы которого, $\theta = \pm\alpha$, $0 \leqslant r \leqslant 1$, находится в условиях скользящей заделки, а другая свободна от напряжений.



Решения представляют самостоятельный интерес, так как определяют напряженное состояние клина (клиновидной полости в упругой плоскости), на который через жесткую обойму (клиновидный штамп) действует нагрузка, эквивалентная продольной силе P, поперечной силе Q и моменту M (фигура). Вместе со статически уравновешенными однородными решениями они образуют систему функций, необходимую для решения смешанных задач об упругих конечных секториальных областях методом, изложенным в [1].

1. Симметричная задача. Запишем условия на границе клина при $\theta = \pm\alpha$:

$$u_\theta = 0 \quad \text{при } 0 \leqslant r \leqslant 1, \qquad \sigma_\theta = 0 \quad \text{при } 1 < r < \infty \tag{1.1}$$

$$\tau_{r\theta} = 0 \quad \text{при } 0 \leqslant r < \infty \tag{1.2}$$

$$\sigma_\theta \sim (1 - r)^{\varepsilon - 1} \quad \text{при } r \to 1 - 0 \qquad (\varepsilon > 0) \tag{1.3}$$

В формулах Папковича — Нейбера для упругих перемещений [2]

$$2Gu_r = \varkappa(\Phi_1 \cos\theta + \Phi_2 \sin\theta) - r\left(\cos\theta \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} + \sin\theta \frac{\partial \Phi_2}{\partial r}\right) - \frac{\partial \Phi_0}{\partial r} \tag{1.4}$$

$$2Gu_\theta = \varkappa(\Phi_2 \cos\theta - \Phi_1 \sin\theta) - \left(\cos\theta \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} + \sin\theta \frac{\partial \Phi_2}{\partial \theta}\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi_0}{\partial \theta}$$