Прикладная математика и механика. Том 36, 1972

УДК 517.9

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ СТРАТЕГИИ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

В. Н. Ушаков

(Свердловск)

Рассматривается игровая задача о приведении управляемого движения на заданное множество. Предполагается, что управляющие воздействия игроков стеснены интегральными ограничениями. Описана экстремальная стратегия первого игрока, формирующая управляющие воздействия по принципу обратной связи. Показано, что при условии стабильности поглощения экстремальная стратегия гарантирует завершение преследования к моменту программного поглощения. Предлагается модификация описанной в [1,2] экстремальной стратегии в дифференциальных играх с ограничениями на мгновенные значения управляющих воздействий игроков.

Данная работа примыкает к работам [2-6].

1. Пусть движение управляемой системы описывается дифференциальным уравнением

$$dx/dt = A(t)x + B(t)u - C(t)v, \quad x[t_0] = x_0 \tag{1.1}$$

Здесь $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ — n-мерный фазовый вектор системы; u, v— управляющие воздействия размерности r; $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ — матрицы соответствующих размерностей, зависящие от t непрерывно.

Реализации $u[t]$, $v[t]$ управляющих воздействий стеснены на $[t_0, \infty)$ условиями

$$\int_{t_0}^{\infty} \|u[\xi]\|^2 d\xi \leqslant \mu^2[t_0], \qquad \int_{t_0}^{\infty} \|v[\xi]\|^2 d\xi \leqslant \nu^2[t_0] \tag{1.2}$$

Здесь $\mu[t_0]$, $\nu[t_0]$ — ограничения на ресурсы управляющих воздействий.

Предположим далее, что изменения величин $\mu[t]$, $\nu[t]$ определяются расходуемыми ресурсами

$$\mu^2[t+\Delta] = \mu^2[t] - \int_t^{t+\Delta} \|u[\xi]\|^2 d\xi$$

$$\nu^2[t+\Delta] = \nu^2[t] - \int_t^{t+\Delta} \|v[\xi]\|^2 d\xi$$

Сопоставим этим изменениям дифференциальные уравнения

$$d\mu^2/dt = -\|u[t]\|^2, \qquad d\nu^2/dt = -\|v[t]\|^2 \tag{1.3}$$

Таким образом, системе (1.1) с ограничениями (1.2) сопоставлена система дифференциальных уравнений (1.1), (1.3) с начальными условиями $\mu^2[t_0] = \mu_0^2$, $\nu^2[t_0] = \nu_0^2$, $x[t_0] = x_0$.

Движение рассматривается в R^{n+2} — эвклидовом $(n+2)$-мерном пространстве точек $p = \{\sqrt{\mu^2}, \sqrt{\nu^2}, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

Задача первого игрока состоит в том, чтобы выбором воздействия $u[t]$ вывести точку $p[t]$ на множество M^*, где $M^* = \{\mu \geqslant 0, \nu \geqslant 0, M\}$. Здесь M — заданное ограниченное выпуклое множество из R^n. Второй игрок выбором $v[t]$ препятствует выводу точки $p[t]$ на множество M^*.

Считается, что в момент t игрокам известна позиция $(t, p[t])$, но не известно управление партнера, выбираемое в данный и последующий моменты времени.

Рассматривается задача, стоящая перед первым игроком: построить такое управление $u_e(t, p)$, которое при любом допустимом управлении $v(t, p)$ обеспечивает приведение точки $p[t]$ на M^* к некоторому моменту времени $t = \vartheta$.

Определение класса допустимых управлений и соответствующих им решений системы (1.1), (1.3) будет дано ниже.

Приведем вспомогательные положения, которые используются при доказательстве основной теоремы, содержащейся в п. 4.

Определение 1.1. Программным управлением первого (второго) игрока, допустимым для точки $p[t_0] = \{\mu[t_0], \nu[t_0], x[t_0]\}$, называется всякая вектор-функция $u(\xi)$ $(v(\xi))$ со значениями вектора $u(\xi)$ $(v(\xi))$ из R^r, удовлетворяющая условию (1.2).

Обозначим через $W(t, \vartheta)$ множество всех точек $p = \{\mu, \nu, x\}$, обладающих следующим свойством: для любого программного управления $v(\xi)$ $(t \leqslant \xi \leqslant \vartheta)$, допустимого для точки p, найдется программное управление $u(\xi)$ $(t \leqslant \xi \leqslant \vartheta)$ первого игрока, допустимое для точки p, такое, что пара $u(\xi)$, $v(\xi)$ переведет систему (1.1), (1.3) из состояния $p[t] = p$ в некоторое состояние $p[\vartheta]$ такое, что $p[\vartheta] \in M^*$.

Нетрудно проверить, что включение $p \in W(t, \vartheta)$ равносильно следующему неравенству (например [1,2]):

$$f'(l; t, \vartheta)\, p - \rho_{-M}(l) \leqslant 0 \quad \text{при } \|l\| = 1$$

Здесь $\rho_{-M}(l) = \max\limits_{q \in -M} q'l$ — опорная функция множества $-M$, штрих означает транспонирование, l — вектор пространства R^n, $f(l; t, \vartheta) = \{-\rho_1(l; t, \vartheta), \rho_2(l; t, \vartheta), -l'X[\vartheta, t]\}$ — вектор пространства R^{n+2}.

Будем предполагать здесь, что выполнены следующие условия: для любых двух моментов t_1, t_2 $(t_1 < t_2)$ для любого вектора l $(l \in R^n, l \neq 0)$ справедливы неравенства

$$\rho_i(l; t_1, t_2) > 0$$

$$\rho_i(l; t, \vartheta) = \left(\int_t^{\vartheta} \|l'H_i[\vartheta, \xi]\|^2 d\xi \right)^{1/2} \qquad (i = 1, 2)$$

$$H_1[\vartheta, \xi] = X[\vartheta, \xi] B(\xi), \quad H_2[\vartheta, \xi] = X[\vartheta, \xi] C(\xi)$$

где $X[\vartheta, \xi]$ — фундаментальная матрица системы (1.1).

Определение 1.2. Моментом поглощения $\vartheta^\circ = \vartheta^\circ(t, p)$, отвечающим позиции $(t, p,)$ называется наименьшее значение параметра ϑ, при котором имеет место включение $p \in W(t, \vartheta)$.

Это определение корректно в том смысле, что из существования моментов ϑ, удовлетворяющих включению $p \in W(t, \vartheta)$, и из непрерывной зависимости вектор-функции $f(l; t, \vartheta)$ от совокупности l, t, ϑ, следует существование наименьшего момента ϑ°, удовлетворяющего включению.

Примем, что выполнены следующие условия.

Условие 1.1. Существует момент поглощения $\vartheta^\circ = \vartheta(t_0, p_0) \geqslant t_0$, отвечающий исходной позиции (t_0, p_0) игры.

Условие 1.2. Поглощение сильно u-стабильно, т. е. для любой точки p ($p \in W(t, \vartheta^\circ)$) и любого программного $v(\xi)$ $(t \leqslant \xi \leqslant t + \Delta)$, допустимого для p, найдется программное управление $u(\xi)$ $(t \leqslant \xi \leqslant t + \Delta)$ такое, что пара $(u(\xi), v(\xi))$ переведет движение, соответствующее системе (1.1), (1.3), из положения $p = p[t]$ в некоторое состояние $p[t + \Delta]$ такое, что $p[t + \Delta] \in W(t + \Delta, \vartheta^\circ)$. Это условие должно выполняться при всех t, Δ, где $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta^\circ$ $(0 \leqslant \Delta \leqslant \vartheta^\circ - t)$.

2. Укажем некоторые свойства множеств $W(t, \vartheta^\circ)$, вытекающие из условий 1.1, 1.2 и определения 1.2.

Свойство 2.1. Множество $W(t, \vartheta^\circ)$ непусто, выпукло и замкнуто при любом t $(t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta^\circ)$.

Свойство 2.2. Справедливо равенство $W(\vartheta^\circ, \vartheta^\circ) = M^*$. Множество $W(t, \vartheta^\circ)$ неограничено. Для дальнейшего примем, что рассматриваются те и только те точки множества $W(t, \vartheta^\circ)$ (и других вспомогательных множеств), первая координата которых меньше некоторого фиксированного положительного числа μ_0 или же равна ему. Такое допущение обосновано тем, что с течением времени первая координата рассматриваемого движения не возрастает.

Свойство 2.3. При любом $t \in [t_0, \vartheta^\circ)$ множество $W(t, \vartheta^\circ)$ непрерывно зависит от t по включению и полунепрерывно сверху по включению слева по переменной t в точке $t = \vartheta^\circ$, т. е. если $t_k \to \vartheta^\circ$, $t_k < \vartheta^\circ$, $p_k \in W(t_k, \vartheta^\circ)$ и $\lim\limits_{k\to\infty} p_k = p_*$, то $p_* \in W(\vartheta^\circ, \vartheta^\circ)$.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $t < \vartheta^\circ$.

Предварительно докажем следующее утверждение.

Лемма 2.3.1. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех Δ $(0 \leqslant |\Delta| \leqslant \delta(\varepsilon))$ верно включение $W(t - \Delta, \vartheta^\circ) \subset W_\varepsilon(t, \vartheta^\circ)$, где $W_\varepsilon(t, \vartheta^\circ)$ — ε-окрестность множества $W(t, \vartheta^\circ)$.

Для доказательства леммы 2.3.1 рассмотрим множества $W^\omega(t, \vartheta^\circ)$ точек p, определяемые неравенством

$$f'(l; t, \vartheta) p - \rho_{-M}(l) \leqslant \omega \qquad (0 \leqslant \omega \leqslant \infty) \quad \text{при } \|l\| = 1$$

Справедливо утверждение

$$\lim_{\omega\to 0} W^\omega(t, \vartheta^\circ) = W(t, \vartheta^\circ) \tag{2.1}$$

равенство (2.1) вытекает из определения $W^\omega(t, \vartheta^\circ)$ и ограничения, наложенного на первые координаты точек множеств.

Из сделанного предположения об ограниченности первых координат точек p вытекает равноограниченность множеств $W(t-\Delta, \vartheta^\circ)$, где $|\Delta| \leqslant \Delta_0$, $0 < \Delta_0 < \vartheta^\circ - t$. Учитывая это и непрерывную зависимость функции $f(l; t, \vartheta)$ от переменных l, t, получим, что для любого $\omega > 0$ найдется $\delta(\omega) > 0$ $(\delta(\omega) \leqslant \Delta_0)$ такое, что при всех Δ $(|\Delta| \leqslant \delta(\omega))$, всех q $(q \in W(t-\Delta, \vartheta^\circ))$ верно неравенство

$$|(f(l; t, \vartheta^\circ) - f(l; t-\Delta, \vartheta^\circ))' q| \leqslant \omega \quad \text{при } \|l\| = 1$$

и, следовательно, верно включение $W(t-\Delta, \vartheta^\circ) \subset W^\omega(t, \vartheta^\circ)$. Отсюда и из условия (2.1) следует справедливость леммы 2.3.1.

Справедливы следующие утверждения: для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при всех Δ $(0 \leqslant \Delta \leqslant \delta(\varepsilon))$ верны включения

$$W(t, \vartheta^\circ) \subset W_\varepsilon(t+\Delta, \vartheta^\circ), \qquad W(t, \vartheta^\circ) \subset W_\varepsilon(t-\Delta, \vartheta^\circ)$$

Доказательство этих утверждений опирается на условия 1.1, 1.2 и тот факт, что множество $W(t, \vartheta^\circ)$ содержит внутреннюю точку.

Рассмотрим теперь случай $t = \vartheta^\circ$. Докажем полунепрерывность множества $W(t, \vartheta^\circ)$ при $t = \vartheta^\circ$ при изменении t слева. Возьмем произвольную сходящуюся последовательность точек p_k $(p_k \in W(t_k, \vartheta^\circ))$, где $t_k < \vartheta^\circ$ и $t_k \to \vartheta^\circ$ при $k \to \infty$.

Справедливо неравенство при $\|l\| = 1$

$$-\mu_k \rho_1(l; t_k, \vartheta^\circ) + \nu_k \rho_2(l; t_k, \vartheta^\circ) - l' X[\vartheta^\circ, t_k]\, x_k \leqslant \rho_{-M}(l)$$

Перейдя к пределу при $k \to \infty$, получим

$$-l' \lim_{k\to\infty} x_k \leqslant \rho_{-M}(l) \quad \text{при } \|l\| = 1$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{k\to\infty} p_k \in M^* = W(\vartheta^\circ, \vartheta^\circ)$$

Справедливость свойства 2.3 доказана.

Обозначим через $\varepsilon[t, p]$ расстояние от точки p до выпуклого множества $W(t, \vartheta^\circ)$

$$\varepsilon[t, p] = \begin{cases} \varkappa[t, p] & \text{при } \varkappa[t, p] > 0 \\ 0 & \text{при } \varkappa[t, p] \leqslant 0 \end{cases}$$

$$\varkappa[t, p] = \max_s \{s'p - \rho(s; t, \vartheta^\circ)\} \text{ при } \|s\| = 1 \tag{2.2}$$

$$\rho(s; t, \vartheta^\circ) = \max_w s'w \text{ при } w \in W(t, \vartheta^\circ),\ s = \{s_1, s_2, s^*\}\ (s^* \in R^n)$$

Свойство 2.4. Функция $\varepsilon = \varepsilon[t, p]$ непрерывна по совокупности $\{t, p\}$ при всех p, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta^\circ$.

Свойство 2.5. Если $\varepsilon[t, p] > 0$, то максимум в (2.2) достигается на единственном векторе $s = s(t, p)$.

Свойство 2.6. Пусть $\varepsilon[t_*, p_*] > 0$. Тогда вектор-функция $s = s(t, p)$ непрерывна по совокупности в окрестности точки (t_*, p_*).

Справедливость свойств 2.4, 2.6 вытекает из непрерывности изменения множества $W(t, \vartheta^\circ)$ при изменении t. Справедливость свойства 2.5 вытекает из условия выпуклости множества $W(t, \vartheta^\circ)$ в пространстве R^{n+2}.

3. Уточним предварительную постановку задачи.

Определение 3.1. Пусть $\{U\}$—совокупность выпуклых замкнутых множеств U из r-мерного пространства векторов. Функцию $U = U(t, p)$, которая вектору $\{t, p\}$ ставит в соответствие некоторое множество U из $\{U\}$, назовем допустимым управлением первого игрока, если

1) $U(t, p)$ зависит полунепрерывно сверху относительно включения по совокупности (t, p);

2) для любого $t_1 < \vartheta^\circ$ и любой ограниченной замкнутой области D из множества $[t_0, t_1] \times (p_1 \geqslant 0, p_2 \geqslant 0, p_3, \ldots, p_{n+2})$ существует такая суммируемая функция $B_*(t)$, что почти всюду в D выполняется условие: если $u \in U(t,p)$, то $\|u\|^2 \leqslant B_*(t)$;

3) $U(t, p) = 0$ при $p_1 < 0$.

Здесь $U(t, p)$ формально доопределили в области, где $p_1 < 0$.

Аналогичным образом определяется допустимое управление $V(t, p)$ второго игрока.

Определение 3.2. Решением системы (1.1), (1.3), порожденным парой допустимых управлений $U(t, p)$, $V(t, p)$ на отрезке $[t_0, t_1]$ $(t_1 < \vartheta^\circ)$ называется всякая абсолютно-непрерывная вектор-функция $\{p_1^2[t], p_2^2[t], q[t]\}$, принимающая при $t = t_0$ заданное значение $\{p_1^2[t_0], p_2^2[t_0], q[t_0]\} = \{p^2_{10}, p^2_{20}, q_0\}$, и при почти всех t, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, удовлетворяющая условию

$$dq[t]/dt = A(t)\, q[t] + B(t)\, u[t] - C(t)\, v[t] \qquad (3.1)$$
$$dp_1^2[t]/dt = -\|u[t]\|^2, \quad dp_2^2[t]/dt = -\|v[t]\|^2$$

где суммируемые функции $u[t]$, $v[t]$ удовлетворяют включениям

$$u[t] \in U(t, p[t]), \qquad v[t] \in V(t, p[t])$$
$$p[t] = \{\mu[t], \nu[t], x[t]\} = \{p_1[t], p_2[t], q[t]\}$$

Так как решение системы (1.1), (1.3), порожденное парой допустимых стратегий $U(t, p)$, $V(t, p)$, определено на любом отрезке $[t_0, t_1]$ $(t_1 < \vartheta^\circ)$ то его можно доопределить по непрерывности в точке ϑ°.

Существование решения и продолжаемость на промежуток времени $[t_0, \vartheta^\circ]$ вытекают из результатов работы [7] (см. теоремы 3, 4).

Таким образом, на отрезке $[t_0, \vartheta^\circ]$ определено решение системы (1.1), (1.3), порожденное парой допустимых стратегий $U(t, p)$, $V(t, p)$.

Задача. Требуется построить допустимое управление $U = U_e(t, p)$ такое, что для любого решения системы (3.1), порожденного парой $U = U_e(t, p)$ и $V = V(t, p)$ (здесь $V(t, p)$ — произвольное допустимое), условие $p[t] \in M^*$ должно осуществляться не позже некоторого конечного момента времени $t = \vartheta^\circ$.

4. Определим $U_e(t, p)$ для моментов $t < \vartheta^\circ$ следующим образом:

$$U_e(t, p) = \frac{B'(t)\, s^*(t, p)}{s_1(t, p)}\, p_1, \text{ если } \varkappa[t, p] > 0,\ p_1 > 0$$

$$U_e(t, p) = 0, \text{ если } \varkappa[t, p] \geqslant 0 \text{ и } p_1 \leqslant 0 \text{ или } \varkappa[t, p] < 0$$

$$U_e(t, p) = \mathrm{CO} \bigcup_{s(t, p) \in \Omega} \frac{B'(t)\, s^*(t, p)}{s_1(t, p)}\, p_1, \text{ если } \varkappa[t, p] = 0, p_1 > 0$$

Здесь СО означает замкнутую выпуклую оболочку, Ω — объединение множества векторов $s(t, p)$, удовлетворяющих условию (2.2), с 0-вектором пространства R^r.

Справедливо следующее утверждение: вектор $s(t, p)$, удовлетворяющий условию (2.2), таков, что $s_1(t,p) < 0$ в случае $t < \vartheta^\circ$.

Из свойства 2.6 и неравенства $s_1(t, p) < 0$ $(t < \vartheta^\circ)$ следует, что множество $U_e(t, p)$ полунепрерывно сверху по включению при изменении позиции (t,p), а также множества $U_e(t,p)$ равноограничены на любом компактном множестве D из множества $[t_0, t_1] \times R^{n+2}$, где t_1 — произвольное число, удовлетворяющее неравенству $t_1 < \vartheta^\circ$. Кроме того, $U_e(t, p) = 0$ при $p_1 < 0$.

Отсюда следует, что $U_e(t, p)$ — допустимое управление в классе управлений $U(t, p)$ с обратной связью.

Теорема 4.1. Пусть для позиции (t_0, p_0) выполняются условия 1.1, 1.2, тогда управление $U_e(t, p)$ гарантирует приведение системы (1.1), (1.3) из начального состояния $p_0 = p[t_0]$ на множество M^* не позже, чем к моменту ϑ°.

Доказательство. Исследуем изменение величины $\varepsilon[t, p[t]_{U_e,V}]$ на отрезке $[t_0, \vartheta^\circ]$ здесь $p[t]$ — движение, порожденное управлением $U_e(t, p)$ в паре с произвольным допустимым $V(t, p)$.

Покажем, что $\varepsilon[t, p[t]_{U_e,V}] \equiv 0$ на $[t_0, \vartheta]$ для любого $\vartheta < \vartheta^\circ$.

Предположим противное: существует допустимая стратегия $V(t, p)$ второго игрока такая, что пара $U_e(t, p)$, $V(t, p)$ порождает решение $p = p[t]$ на $[t_0, \vartheta]$, где $\vartheta < \vartheta^\circ$ и $u_e[t] = u_e(t, p[t]) \in U_e(t, p[t])$, $v[t] \in V(t, p[t])$ такие, что $\varepsilon[t, p[t]_{u_e,v}] \not\equiv 0$ на $[t_0, \vartheta]$.

Отсюда следует, что существуют $\tau \in [t_0, \vartheta]$ и Δ_* $(\tau + \Delta_* < \vartheta)$ такие, что при любом Δ $(0 < \Delta \leqslant \Delta_*)$ выполняются условия

$$p[\tau]_{w_e, \vartheta} \in W^\cdot(\tau, \vartheta^\circ), \quad p[\tau + \Delta]_{u_e,v} \notin W(\tau + \Delta, \vartheta^\circ)$$

Здесь символом $W^\cdot(\tau, \vartheta^\circ)$ обозначена граница множества $W(\tau, \vartheta^\circ)$ в пространстве R^{n+2}.

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 4.1.1. Найдутся Δ_0 $(0 < \Delta_0 < \Delta_*)$ и K $(0 < K < \infty)$ такие, что для любого $t \in [\tau, \tau + \Delta_0]$ и соответствующей ему точки $p_*[t]_{u_e,v} \in W^\cdot(t, \vartheta^\circ)$, любого Δ $(0 < \Delta \leqslant \Delta_0)$, любого $u_\Delta(\xi)$, $t \leqslant \xi \leqslant t + \Delta$ справедливо неравенство

$$I_1(\Delta) \leqslant K(I_2(\Delta) + \Delta), \quad I_1(\Delta) = \int_t^{t+\Delta} \|u_\Delta(\xi)\|^2 d\xi, \quad I_2(\Delta) = \int_t^{t+\Delta} \|v[\xi]\|^2 d\xi$$

Здесь через $p_*[t]_{u_e,v}$ обозначена точка множества $W^\cdot(t, \vartheta^\circ)$, ближайшая к точке $p[t]_{u_e,v}$. Напомним также, что символ $u_\Delta(\xi)$ $(t \leqslant \xi \leqslant t + \Delta)$ означает управление удовлетворяющее в паре с $v[\xi]$ $(t \leqslant \xi \leqslant t + \Delta)$ условию 1.2.

Доказательство леммы 4.1.1 опирается на конструкцию множеств $W(t + \Delta, \vartheta^\circ)$ $(0 \leqslant \Delta \leqslant \Delta_*)$ и на условия 1.1, 1.2 и проводится путем сведения к противоречию с предположением от противного.

Воспользуемся леммой 4.1.1 при оценке величины $\varepsilon^2[t + \Delta, p[t + \Delta]_{u_e,v}]$ в точках $t \in [\tau, \tau + \Delta_0]$ $(0 < \Delta \leqslant \Delta_0)$.

Сначала проведем вспомогательные оценки. Справедливо равенство

$$\begin{aligned}\|p^*_2[t+\Delta]_{u_\Delta, v}-p[t+\Delta]_{u_\Delta, v}\|^2 &= |p_1^*[t+\Delta]_{u_\Delta}-p_1[t+\Delta]_{u_\Delta}|^2+\\ &+|p_2^*[t+\Delta]_v-p_2[t+\Delta]_v|^2+\|q^*[t+\Delta]_{u_\Delta, v}-q[t+\Delta]_{u_\Delta, v}\|^2\end{aligned} \tag{4.2}$$

Здесь $p[t+\Delta]_{u_\Delta, v}$ ($p^*[t+\Delta]_{u_\Delta, v}$) — состояние в момент $t+\Delta$ движения (1.1), (1.3) с начальным условием $p[t]_{v_e, v}$ ($p_*[t]_{u_e, v}$), порожденного парой $u_\Delta(\xi)$, $v[\xi]$ $(t\leqslant\xi\leqslant t+\Delta)$.

Справедливы утверждения: существуют $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ $(0<\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3<\infty)$ такие, что для любых $t\in[\tau, \tau+\Delta_0]$ и Δ $(0<\Delta\leqslant\Delta_0)$ выполняются неравенства

$$\begin{aligned}|p_2^*[t+\Delta]_v-p_2[t+\Delta]_v|^2 &= |(p_{2*}[t]^2-I_2(\Delta))^{1/2}-(p_2[t]^2-I_2(\Delta))^{1/2}|\leqslant\\ &\leqslant|p_{2*}[t]-p_2[t]|^2\exp\lambda_1 I_2(\Delta)\end{aligned} \tag{4.3}$$

$$\|q^*[t+\Delta]_{u_\Delta, v}-p[t+\Delta]_{u_\Delta, v}\|^2\leqslant\|q_*[t]-q[t]\|^2\exp\lambda_2\Delta \tag{4.4}$$

$$|p_1^*[t+\Delta]_{u_\Delta}-p_1[t+\Delta]_{u_\Delta}|^2\leqslant|p_{1*}[t]-p_1[t]|^2\exp\lambda_3(I_2(\Delta)+\Delta) \tag{4.5}$$

Из соотношений (4.2) — (4.5) вытекает справедливость следующей леммы.

Лемма 4.1.2. Существует λ $(0<\lambda<\infty)$ такое, что для любого $t\in[\tau, \tau+\Delta_0]$, любого Δ $(0<\Delta\leqslant\Delta_0)$, любого $u_\Delta(\xi)$ $(t\leqslant\xi\leqslant t+\Delta)$ справедливо неравенство

$$\|p^*[t+\Delta]_{u_\Delta, v}-p[t+\Delta]_{u_\Delta, v}\|^2\leqslant\|p_*[t]-p[t]\|^2\exp\lambda(I_2(\Delta)+\Delta)$$

Отрезок $[\tau, \tau+\Delta_0]$ разобьем на два непересекающихся множества M_1 и M_2. Здесь M_1 — множество точек t таких, что существуют число $L=L(t)$ $(0<L<\infty)$ и последовательность $\{\Delta_n;\ \Delta_n>0,\ \Delta_n\to 0$ при $n\to\infty\}$ такая, что верно неравенство

$$\frac{1}{\Delta_n}I_2(\Delta_n)\leqslant L \tag{4.6}$$

где M_2 — множество точек t таких, что справедливо равенство

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}I_2(\Delta)=\infty \tag{4.7}$$

В случае $t\in M_1$, справедливы соотношения

$$\begin{aligned}&\varepsilon[t+\Delta,\ p[t+\Delta]_{u_e, v}]-\varepsilon[t+\Delta,\ p[t+\Delta]_{u_\Delta, v}]\leqslant\\ &\leqslant s'(t+\Delta,\ p[t+\Delta]_{u_e, v})(p[t+\Delta]_{u_e, v}-p[t+\Delta]_{u_\Delta, v})\end{aligned} \tag{4.8}$$

Здесь $s(t+\Delta,\ p[t+\Delta]_{u_e, v})=\{s_1(t+\Delta,\ p[t+\Delta]_{u_e, v}),\ s_2(t+\Delta,\ p[t+\Delta]_{u_e, v}),\ s^*(t+\Delta,\ p[t+\Delta]_{u_e, v})\}$ — единичный вектор из пространства R^{n+2}, удовлетворяющий условию (см. п. 2)

$$\begin{aligned}s'(t+\Delta,\ p[t+\Delta]_{u_e, v})\,p[t+\Delta]_{u_e, v}-\rho(s(t+\Delta,\ p[t+\Delta]_{u_e, v});\ t+\Delta,\ \vartheta^\circ)=\\ =\varkappa[t+\Delta,\ p[t+\Delta]_{u_e, v}]\end{aligned}$$

Из непрерывности вектор-функций $s^*(t+\Delta, p[t+\Delta]_{u_e, v})$, $s_1(t+\Delta, p[t+\Delta]_{u_e, v})$ по Δ в точке $\Delta=0$, непрерывности функции $u_e(\xi, p[\xi])$ по позиции в точке $(t, p[t]_{u_e, v})$

непрерывности матрицы B (ξ) следует, что правая часть неравенства (4.8) равна выражению

$$\int\limits_t^{t+\Delta} s^{*\prime}(t,\, p\,[t]_{u_e,v})\, B\,(t)\,(u_e\,[t] - u_\Delta\,(\xi))\, d\xi + s_1\,(t,\, p\,[t]_{u_e,v}) \times \tag{4.9}$$

$$\times \left\{ - \frac{\|u_e\,[t]\|^2}{2p_1\,[t]_{u_e}}\,\Delta + o_1\,(\Delta) + \frac{1}{2p_1\,[t]_{u_e}}\, I_1\,(\Delta) + o\,(I_1\,(\Delta)) \right\} + o_2\,(\Delta)$$

Здесь и далее o, o_1, o_2 — бесконечно малые величины по сравнению с величинами, стоящими рядом в скобках.

Из неравенства 4.5 и леммы 4.1.1 следует, что при $\Delta = \Delta_n$ выражение (4.9) равно

$$\int\limits_t^{t+\Delta_n} \left\{ s^{*\prime}(t,\, p\,[t]_{u_e,v})\, B\,(t)\,(u_e\,[t] - u_{\Delta_n}\,(\xi)) + \right. \tag{4.10}$$

$$\left. + s_1\,(t,\, p\,[t]_{u_e,v}) \left(- \frac{\|u_e\,[t]\|^2}{2p_1\,[t]_{u_e}} + \frac{\|u_{\Delta_n}\,(\xi)\|^2}{2p_1\,[t]_{u_e}} \right) \right\} d\xi + o\,(\Delta_n)$$

Из определения управления $U_e\,(t,\, p)$ следует, что подынтегральное выражение в (4.10) неположительно. Тогда в силу (4.8), (4.9) получим оценку

$$\varepsilon\,[t + \Delta_n,\, p\,[t + \Delta_n]_{u_e,v}] - \varepsilon\,[t + \Delta_n,\, p\,[t + \Delta_n]_{u_{\Delta_n} v}] \leqslant o\,(\Delta_n)$$

Здесь $o\,(\Delta_n)$ — бесконечно малая величина, зависящая от t.

Из этого неравенства и леммы 4.1.2 следует, что в случае $t \in M_1$ найдутся λ $(0 < \lambda < \infty)$ и последовательность $\{\Delta_n\}$ $(\Delta_n > 0,\ \Delta_n \to 0$ при $n \to \infty)$ такие, что верно неравенство

$$\varepsilon^2\,[t + \Delta_n,\, p\,[t + \Delta_n]_{u_e,v}] \leqslant \varepsilon^2\,[t,\, p\,[t]_{u_e,v}]\, \exp \lambda\,(I_2\,(\Delta_n) + \Delta_n)$$

В случае $t \in M_2$ при всех достаточно малых $\Delta > 0$ верно неравенство

$$\varepsilon^2\,[t + \Delta,\ p\,[t + \Delta]_{u_e,v}] - \varepsilon^2\,[t,\, p\,[t]_{u_e,v}] \leqslant 0$$

Доказательство этого утверждения существенно опирается на предельное соотношение (4.7), а также на ограниченность управления u_e $[\xi]$ $(t \leqslant \xi \leqslant t + \Delta_0)$.

Из всего сказанного вытекает справедливость следующей леммы.

Лемма 4.1.3. Для любой точки $t_* \in (\tau,\, \tau + \Delta_0]$ верно неравенство

$$\varepsilon^2\,[\tau + \Delta_0,\ p\,[\tau + \Delta_0]_{u_e,v}] \leqslant \varepsilon^2\,[t_*,\ p\,[t_*]_{u_e,v}]\, \exp\,(\lambda I)$$

$$I = \int\limits_{t_*}^{\tau+\Delta_0} \|v\,[\xi]\|^2\, d\xi + (\tau + \Delta_0 - t_*)$$

Из леммы 4.1.3 следует справедливость равенства $\varepsilon[\tau + \Delta_0,\ p\,[\tau + \Delta_0]_{u_e,v}] = 0$, что противоречит сделанному ранее предположению.

Выше был рассмотрен случай $p_{1*}\,[\tau] \neq 0$, $p_{2*}\,[\tau] \neq 0$. Рассмотрим оставшиеся возможные случаи.

Когда $p_{1*}\,[\tau] = 0$, справедливость теоремы (4.1) доказывается от противного.

В случае $p_{2*}\,[\tau] = 0$ можно доказать справедливость утверждения: найдутся K $(0 < K < \infty)$ и Δ_0 $(0 < \Delta_0 < \Delta_*)$ такие, что для любого $t \in (\tau,\, \tau + \Delta_0]$ и соответствующей точки $p_*\,[t]_{u_e,v} \in W^{\cdot}\,(t,\, \vartheta^\circ)$, любого $u_\Delta\,(\xi)$ $(t \leqslant \xi \leqslant t + \Delta,\ 0 < \Delta \leqslant \Delta_0)$ верно неравенство $I_1\,(\Delta) \leqslant K\Delta$.

Из этого утверждения следует неравенство

$$\varepsilon^2 [\tau + \Delta_0,\ p [\tau + \Delta_0]_{u_e, v}] \leqslant \varepsilon^2 [t_*,\ p [t_*]_{u_e, v}] \exp \lambda\Delta_0$$

при любых $t_* \in (\tau, \tau + \Delta_0]$, где λ — некоторое число ($0 < \lambda < \infty$). Отсюда следует равенство $\varepsilon [\tau + \Delta_0, p [\tau + \Delta_0]_{u_e, v}] = 0$, противоречащее условию 4.1.

Теорема 4.1 доказана.

Автор благодарит Н. Н. Красовского за постановку задачи и ценные советы.

Поступила 21 IX 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Красовский Н. Н. Игровые задачи о встрече движений. М., «Наука», 1970.
2. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Дифференциальная игра наведения. Дифференциальные уравнения, 1970, № 4.
3. Никольский М. С. Прямой метод в линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями. В сб.: Управляемые системы, вып. 2, 1969.
4. Понтрягин Л. С. К теории дифференциальных игр. Успехи математ. наук, 1966, т. 21, № 4.
5. Пшеничный Б. Н., Онопчук Ю. Н.. Линейные дифференциальные игры с интегральными ограничениями. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1968, № 1.
6. Третьяков В. Е. Регуляризация одной задачи о преследовании. Дифференциальные уравнения, 1967, № 12.
7. Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. Матем. сб., 1958. т. 51, № 1.