

3. Хасьминский Р. З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. М., «Наука», 1969.
4. Невельсон М. Б., Хасьминский Р. З. Об устойчивости стохастических систем. Проблемы передачи информации, 1968, т. 2, вып. 3.
5. Невельсон М. Б. Некоторые замечания относительно устойчивости линейной стохастической системы. ПММ, 1966, т. 30, вып. 6.
6. Невельсон М. Б., Хасьминский Р. З. Об устойчивости линейной системы при случайных возмущениях ее параметров. ПММ, 1966, т. 30, вып. 2.
7. Кушнер Г. Дж. Стохастическая устойчивость и управление. М., «Мир», 1969.
8. Гихман И. И. Об устойчивости решений стохастических дифференциальных уравнений. В сб.: Предельные теоремы и статистические выводы. Ташкент, «ФАН», 1966.
9. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц, 3-е изд. М., «Наука», 1967.

О ВОЛНАХ НА ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ ПРИ ДВИЖЕНИИ ПОГРУЖЕННОГО ЭЛЛИпсоИДА ВРАЩЕНИЯ

А. И. Смородин

(Ленинград)

Рассматривается задача об определении формы свободной поверхности идеальной жидкости неограниченной глубины при движении погруженного эллипсоида вращения.

Впервые задача такого типа (для случая движущегося импульса давления) была решена еще Кельвином [1]. Однако вследствие трудностей вычислительного порядка до сих пор удавалось найти только асимптотические значения ординат волн на больших расстояниях от источника возмущений [2-5].

Ниже изложен способ, позволяющий при весьма умеренном расходе машинного времени вычислять точные (в линейной постановке) значения ординат свободной поверхности при движении эллипсоида вращения большого удлинения. Полученные результаты могут найти применение в задачах теории корабля, гидротехники и т. п.

1. Полагая жидкость идеальной, а волны, возникающие на свободной поверхности, малыми, воспользуемся для решения задачи методом особенностей. Тогда потенциал скоростей, вызванных прямолинейным и равномерным движением эллипсоида со скоростью v , можно записать в виде [6]

$$\Phi(x, y, z) = \int_S \Phi_0(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) q(\xi, \eta, \zeta) dS \quad (1.1)$$

Здесь Φ_0 — потенциал единичного источника, удовлетворяющий граничному условию на свободной поверхности

$$\frac{\partial \Phi_0}{\partial x^2} + v \frac{\partial \Phi_0}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0 \quad (v = g/v^2) \quad (1.2)$$

и соответствующим условиям на бесконечности, q — интенсивность эквивалентных особенностей, определяемая из условия непротекания] через поверхность эллипсоида S .

Следуя работе [6], интенсивность q примем в первом приближении такой же, как при движении эллипсоида в безграничной жидкости. (Погрешность, очевидно, будет тем меньше, чем глубже погружен эллипсоид и чем больше его удлинение). Поток около эллипсоида вращения в этом случае, как известно [7], эквивалентен обтеканию источников и стоков, непрерывно распределенных между его фокусами. Действитель-

но, если в выражении потенциала для эллипсоида вращения, движущегося вдоль оси x [1], перейти к цилиндрическим координатам x, ρ_0, θ , то можно получить

$$\Phi = \frac{A}{2l} \left[x \ln \left| \frac{r_1 + r_2 + 2l}{r_1 + r_2 - 2l} \right| - r_1 + r_2 \right]$$

$$r_1 = [(x + l)^2 + \rho_0^2]^{1/2}, \quad r_2 = [(x - l)^2 + \rho_0^2]^{1/2}$$

Здесь l — отстояние фокусов от начала координат. Полученное выражение представляет собой результат интегрирования потенциала распределенных вдоль оси x элементарных источников, интенсивность которых меняется по линейному закону

$$\Phi = \int_{-l}^l \varphi(x - \xi) q(\xi) d\xi \quad (1.3)$$

$$\varphi(x - \xi) = \frac{-1}{4\pi} \sqrt{(x - \xi)^2 + \rho_0^2}, \quad q = 2\pi A \frac{\xi}{l}$$

$$A = va \left[\frac{1}{1 - e^2} - \frac{1}{2e} \ln \left| \frac{1 + e}{1 - e} \right| \right], \quad e = \frac{l}{a}, \quad a = \zeta l$$

Таким образом, при принятых выше допущениях для решения поставленной задачи достаточно подставить в правую часть (1.3) потенциал источника вблизи свободной поверхности, удовлетворяющий граничному условию (1.2).

2. Соответствующее представление потенциала для единичного источника, расположенного в точке $(0, 0, z_1)$ подвижной системы координат, может быть получено путем предельного перехода при $t \rightarrow \infty$ в задаче с начальными условиями [3]. Тогда

$$\Phi = \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{1}{r'} - \frac{1}{r} - \frac{v}{\pi} \int_0^\infty e^{k(z+z_1)} \int_C e^{ik(x \cos \theta + y \sin \theta)} \frac{d\theta dk}{v - k \cos^2 \theta} \right\}$$

$$r = [x^2 + y^2 + (z - z_1)^2]^{-1/2}, \quad r' = [x^2 + y^2 + (z + z_1)^2]^{-1/2} \quad (2.1)$$

Контур C должен проходить вдоль вещественной оси от $\theta = -\pi$ до $\theta = \pi$ и в соответствии с условием отсутствия волн далеко впереди обходить особые точки $\theta = \pm \arccos(v/k)$ при $\theta > 0$ снизу, а при $\theta < 0$ сверху.

Для устранения особенности в знаменателе внутреннего интеграла (2.1), существенно осложняющей расчеты, контур C может быть преобразован в замкнутый путем замены переменной $\beta = e^{i\theta}$. Тогда после вычисления соответствующих вычетов и подстановки $k/v = 1 - t^2$ при $k < v$ и $k/v = 1 + t^2$ при $k > v$ получим

$$\Phi = \frac{v}{\pi} \left\{ \frac{1}{4r'} - \frac{1}{4r} - \int_0^1 e^{(1-t^2)(z+z_1)} \cos(x \sqrt{1-t^2}) \operatorname{ch}(yt \sqrt{1-t^2}) dt + \right.$$

$$+ \int_0^\infty e^{(1+t^2)(z+z_1)} \sin(x \sqrt{1+t^2}) \cos(yt \sqrt{1-t^2}) dt + \int_0^1 e^{(1-t^2)(z+z_1)} \sum_{m=1}^\infty (-1)^m \left[\left(\frac{1+t}{1-t} \right)^m - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{1-t}{1+t} \right)^m \right] J_{2m}[\rho(1-t^2)] \cos 2m\psi dt + 2 \int_0^\infty e^{(1+t^2)(z+z_1)} \sum_{m=1}^\infty (-1)^m \sin(2m \operatorname{arctg} t) \times$$

$$\left. \times J_{2m}[\rho(1+t^2)] \cos 2m\psi dt \right\} \quad (2.2)$$

$$\rho = (x^2 + y^2)^{1/2}, \quad \psi = \operatorname{arctg}(y/x)$$

Здесь J_{2m} — функция Бесселя первого рода, а все координаты отнесены к v^{-1} .

Недостаток приведенного выше представления потенциала заключается в медленной сходимости несобственных интегралов при малых значениях $|z + z_1|$ и в необходимости вычисления значительного числа членов сумм при больших ρ . Для таких значений координат в интеграле (2.1) удобно перейти к интегрированию по мнимой оси [8] и получить

$$\varphi = \frac{\nu}{\pi} \left\{ \frac{1}{4r'} - \frac{1}{4r} + [1 - \text{sign}(x)] \int_0^{\infty} e^{(1+t^2)(z+z_1)} \sin(x \sqrt{1+t^2}) \cos(yt \sqrt{1+t^2}) dt - \right. \\ \left. - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-|x|t} dt \int_0^1 \cos(\alpha ty) \frac{\sqrt{1-\alpha^2} \cos[(z+z_1)t \sqrt{1-\alpha^2}] - t \sin[(z+z_1)t \sqrt{1-\alpha^2}]}{1-\alpha^2+t^2} d\alpha \right\}$$

3. Подставим полученные выражения в (1.3). Для ординат свободной поверхности ζ_w можно получить

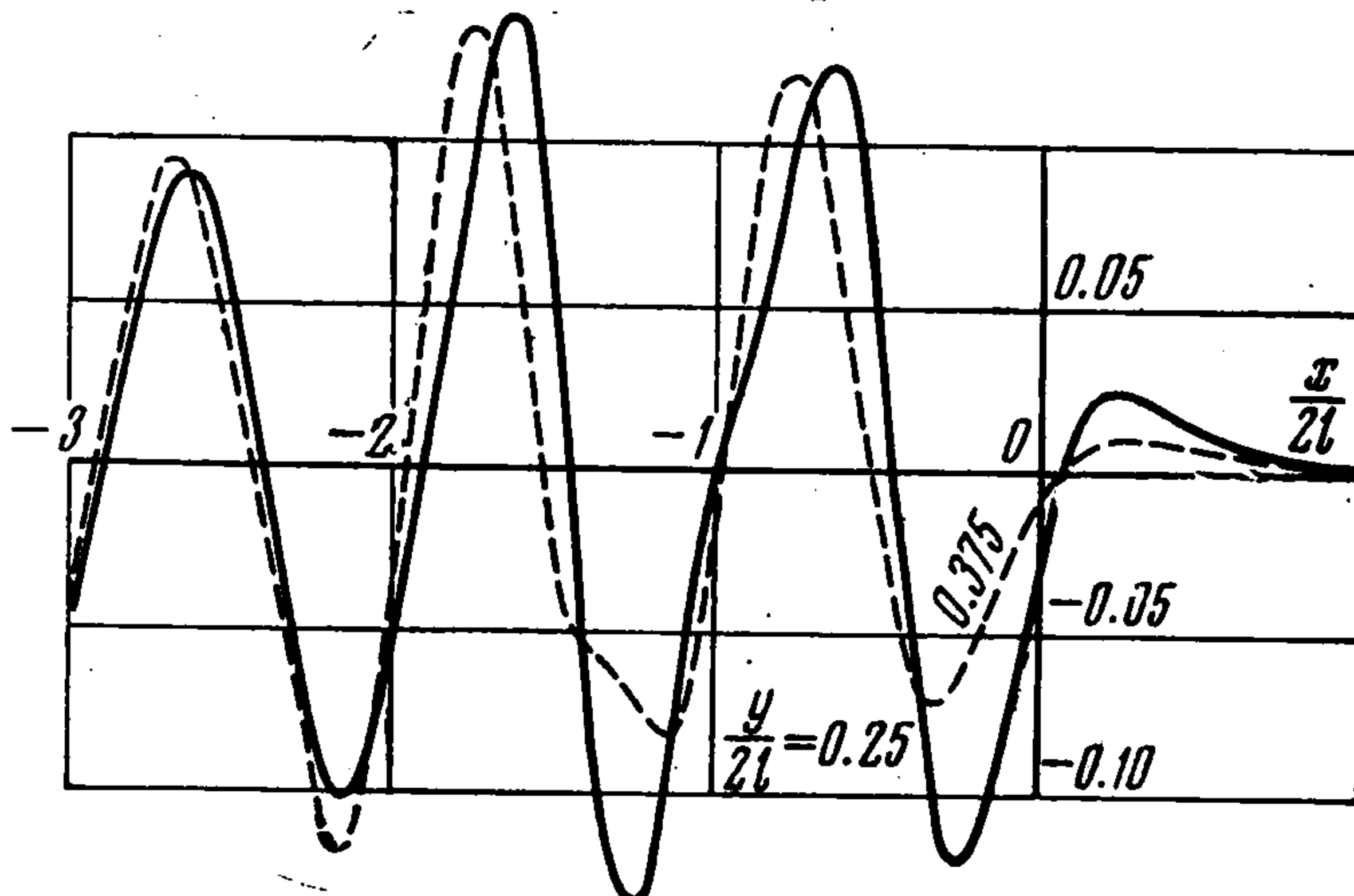
$$\zeta_w = \frac{\zeta_w g}{v^2} = \frac{1}{v} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{2\pi A}{vl} [\varphi^*(x+l) - \varphi^*(x-l) - l\varphi(x+l) - l\varphi(x-l)] \quad (3.1)$$

$$\varphi^*(x) = \int_0^x \varphi(\xi) d\xi$$

Здесь $\varphi^*(x)$ представляет собой сумму интегралов, аналогичных (2.2). Так, например, последний несобственный интеграл из (2.2) после интегрирования приводится к виду

$$2 \int_0^{\infty} e^{(1+t^2)(z+z_1)} \sum_{m=1}^{\infty} \{(-1)^m \sqrt{1+t^2} \sin[(2m+1) \text{arctg } t] - t\} \times \\ \times J_{2m+1}[\rho(1+t^2)] \cos(2m+1)\psi \frac{dt}{1+t^2}$$

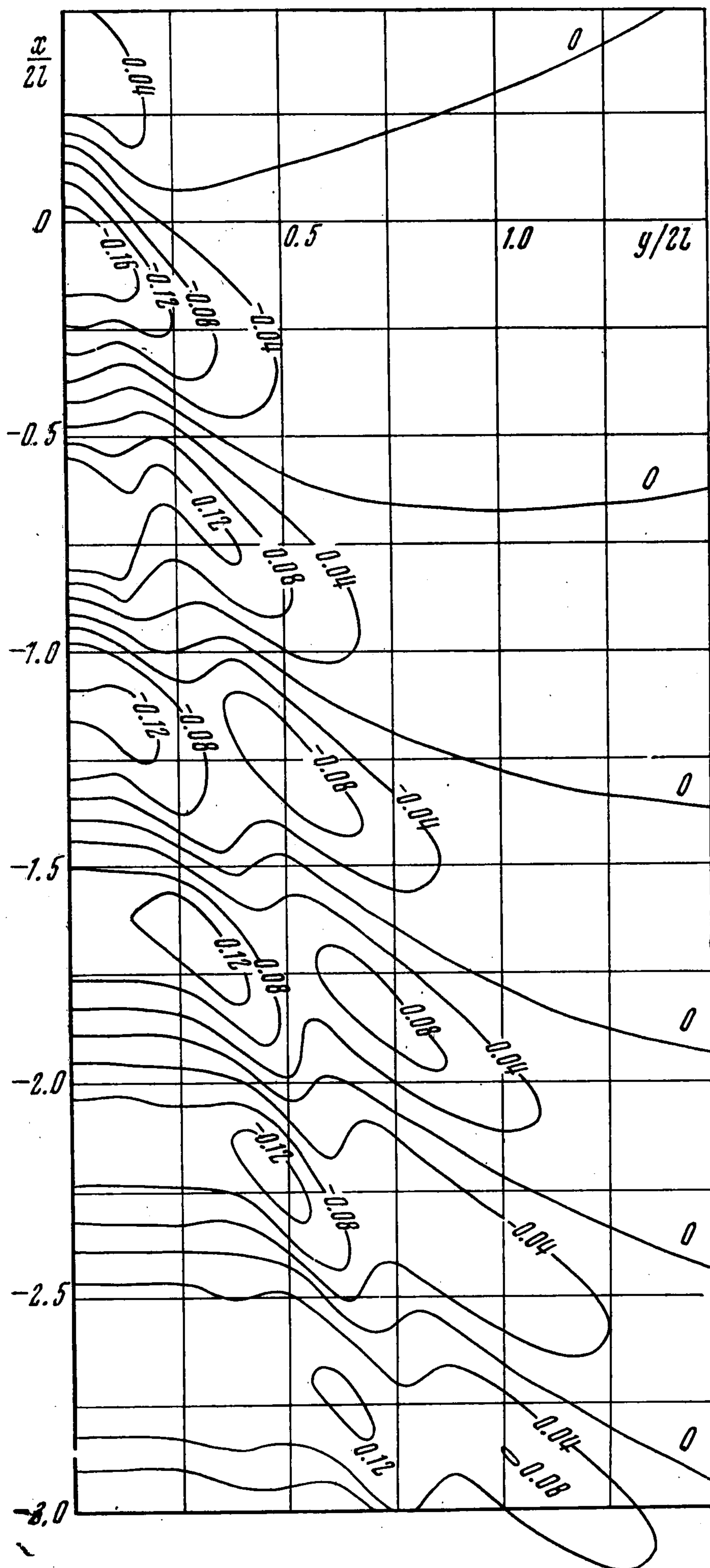
Это обстоятельство существенно сокращает объем расчетов, так как позволяет оба типа интегралов (для φ и φ^*) вычислять параллельно.



Фиг. 1

Расчеты проводились на ЭЦВМ М-20 для эллипсоида с удлинением восемь при $\nu = 0.4 \sqrt{2gl}$ и различных погружениях $|z_1| > 0.39\nu^{-1}$.

Для двух точек, удовлетворяющих условию $x_1 = x_2 + 2l$, имеем $\varphi(x_1 - l) = \varphi(x_2 + l)$, поэтому для каждого значения y и z_1 в оперативном запоминающем устройстве машины составляли таблицу φ , при помощи которой путем соответствующих выборок вычисляли правую часть первого соотношения (3.1). Таким же путем определяли необходимые значения φ^* , причем для $|x| \leq 2.5\nu^{-1}$ использовали представление (2.2), а для больших $|x|$ — (2.3).



Фиг. 2

На фиг. 1 в качестве примера представлен разрез свободной поверхности при $\frac{1}{2} y / l = 0.25$ и 0.375 . На расчет одной кривой такого вида требовалось, как правило, не более 10 минут. Общий вид свободной поверхности, который был получен на

основании вычисления волнового профиля в девяти продольных сечениях, представлен на фиг. 2. Из этой фигуры, на которой показаны линии равного уровня, построенные через $0.04v^{-1}$, следует, что картина волн за движущимся эллипсоидом оказывается значительно сложнее, чем это следует из асимптотической теории [1,5].

Поступила 3 XII 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Л а м б Г. Гидродинамика. М.—Л., Гостехиздат, 1947.
2. К о с т ю к о в А. А. Исследование профиля поперечных волн на поверхности жидкости за движущимся телом. Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение, 1959, № 6.
3. С м о р о д и н А. И. О применении асимптотического метода для анализа волн при неустановившемся движении источника. ПММ, 1965, т. 29, вып. 1.
4. Ч е р к е с о в Л. В. Развитие корабельных волн в жидкости конечной глубины. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 4.
5. Т к а л и ч Е. Ф., Ш а й б о Н. В. О волнообразовании погруженного эллипсоида. В сб.: Гидромеханика, вып. 15. Гидродинамика больших скоростей, 1969.
6. К о ч и н Н. Е. О волновом сопротивлении и подъемной силе погруженных в жидкость тел. Собрание сочинений. т. 2. М.—Л., Изд-во АН СССР, 1949.
7. Аэродинамика. Под общ. ред. В. Ф. Дюрэнд, т. 1, М.—Л., ОНТИ, 1937.
8. P e t e r s A. S. A new treatment of the ship wave problem. Commun Pure and Appl. Math., 1949, vol. 2, No. 2-3.

УДК 532.517

О КОНВЕКТИВНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ СЛОЯ ЖИДКОСТИ В МОДУЛИРОВАННОМ ПОЛЕ ВНЕШНИХ СИЛ

Г. С. Маркман

(Ростов-на-Дону)

Рассматривается возникновение конвекции в слое вязкой несжимаемой жидкости со свободными границами. Температура на границах слоя, плотность внутренних источников тепла и напряженность поля силы тяжести предполагаются периодическими по времени с одним и тем же периодом T . Для случая, когда невозмущенный градиент температуры в слое всюду отрицателен, доказано существование критического числа Релея и T -периодизм нейтрального возмущения. Эти результаты получены путем сведения линеаризованной задачи к обыкновенному дифференциальному уравнению в некотором банаховом пространстве и применения теории линейных положительных операторов [1].

Возникновению конвекции под действием периодических по времени сил посвящены работы [2-9]. Рассматривалась устойчивость равновесия горизонтального слоя со свободными и твердыми границами; в предположении, что градиент температуры не зависит от вертикальной координаты, численными методами определены границы устойчивости [2]. Методом осреднения по малым колебаниям исследовано влияние высокочастотных вертикальных вибраций на возникновение конвекции [3,4]. Дано обоснование метода осреднения для абстрактных параболических уравнений и, в частности, для задачи конвекции [5,6]. Рассматривалась конвекция в полости квадратного сечения в случае, когда жидкость подогревается снизу и находится под действием вибрационных сил; дано численное решение нелинейных уравнений конвекции [7]. Исследовалась устойчивость равновесия в случае, когда градиент температуры зависит от вер-