АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ КРИТЕРИЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ПАРАМЕТРИЧЕСКИМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ ТИПА БЕЛЫЙ ШУМ

М. В. Левит, В. А. Якубович

(Ленинград)

Исследуется класс линейных систем дифференциальных уравнений Ито. Дается алгебраический критерий экспоненциальной устойчивости в среднем квадратическом, легко применяемый в случае, когда система задана передаточной матрицей.

Устойчивость стохастических дифференциальных уравнений впервые рассматривалась в работах [1, 2]. В работах [3-8] детально исследовались линейные системы дифференциальных уравнений Ито. Необходимое и достаточное условие стохастической экспоненциальной устойчивости в среднем квадратическом таких систем можно найти в [3, 8]. Это условие заключается в том, что спектр некоторой квадратной матрицы, построенной по параметрам системы, лежит в открытой левой полуплоскости. На практике проверка последнего условия для системы порядка ν сводится к вычислению не менее чем $\nu(\nu+1)/2$ определителей порядков $1, 2, \ldots, \nu(\nu+1)/2$. Выполнение этой процедуры при больших ν становится затруднительным. Специальный вид рассматриваемых в данной работе систем, характерных для большого числа прикладных задач, позволяет установить другой, более удобный критерий устойчивости.

1. Постановка задачи. Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений Ито

$$x^{\cdot} = Px + \sum_{l=1}^{k} q_l \varphi_l, \qquad \sigma_l = r_l^* x \tag{1.1}$$

$$\varphi_l = \alpha_l \xi_l^{\cdot} \sigma_l \qquad (l = 1, 2, \ldots, k) \tag{1.2}$$

Здесь φ_l, σ_l, α_l — скалярные величины, x, q_l, r_l — векторы размерности ν, матрица P имеет размерность $\nu \times \nu$. Параметры системы α_l, q_l, r_l, P постоянны.

Предполагается, что $\xi_1^{\cdot}, \xi_2^{\cdot}, \ldots, \xi_k^{\cdot}$ представляют собой скалярные независимые гауссовские белые шумы с единичной спектральной плотностью [3]. Вещественные числа α_l имеют смысл интенсивностей шумов, возмущающих систему. Звездочка означает операцию транспонирования матрицы и комплексного сопряжения ее элементов.

Ниже используется следующее определение устойчивости уравнений (1.1), (1.2), введенное впервые в работах [1,2].

Определение 1. Система (1.1), (1.2) называется стохастически экспоненциально устойчивой в среднем квадратическом, если существуют положительные числа A и ε такие, что для любых $t \geqslant t_0$ и любого ν-мерного вектора x_0 справедливо неравенство $M|x(t)|^2 \leqslant A|x|^2 \exp(-\varepsilon(t-t_0))$, где $x(t)$ — решение системы (1.1), (1.2), определенное условием $x(t_0) = x_0$, символ M — знак математического ожидания.

Ради краткости устойчивость стохастической системы в смысле определения 1 будем называть просто устойчивостью.

В приложениях системы дифференциальных уравнений часто задаются в виде

$$\sigma = -\chi(p)\varphi, \ \sigma = \|\sigma_l\|, \ \varphi = \|\varphi_l\| \qquad (l = 1, 2, \ldots, k) \tag{1.3}$$

Здесь p — оператор дифференцирования по времени, $\chi(\lambda)$ — передаточная матрица системы от входов φ_m к выходам σ_l, элементы которой — правильные дробно-рациональные функции комплексного параметра λ.

Известно, что по заданной матрице $\chi(\lambda)$ правильных дробно-рациональных функций можно построить матрицу P и векторы q_m, r_l такие, что выполняются соотношения

$$\chi(\lambda) = \| \chi_{lm}(\lambda) \|_{l,\, m=1}^{k}, \qquad \chi_{lm} = r_l^* (P - \lambda I)^{-1} q_m \tag{1.4}$$

а система (1.1), (1.2) вполне управляема и наблюдаема. Любую такую систему (1.1), (1.2) будем называть нормальной формой системы (1.3), (1.2).

Ниже, как обычно, под решениями системы (1.3), (1.2) понимают решения $\sigma_l(t)$, соответствующие нормальной формы (1.1), (1.2).

Определение 2. Система (1.3), (1.2) называется устойчивой, если устойчива ее нормальная форма.

Отметим, что процедура определения матрицы P и векторов q_m, r_l по передаточной матрице $\chi(\lambda)$ системы часто затруднительна, особенно в случае кратных полюсов $\chi(\lambda)$. Поэтому условия устойчивости системы (1.3), (1.2) желательно получить именно в терминах передаточной матрицы.

Используя результаты работ [3,4], легко показать, что устойчивость системы сохраняется при снижении интенсивностей шумов. Точнее говоря, если система (1.3), (1.2) устойчива при значениях интенсивностей шумов $\alpha_1^\circ,\ldots,\alpha_k^\circ$, то она останется устойчивой при любых интенсивностях $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$, удовлетворяющих условиям $|\alpha_l| \leqslant |\alpha_l^\circ|$ $(l = 1, 2, \ldots, k)$.

Определение 3. Вектор интенсивностей $\alpha^\circ = \| \alpha_l^\circ \|$ называется критическим для системы (1.3), (1.2) или для ее нормального представления (1.1), (1.2), если система устойчива для всех векторов $\varepsilon\alpha^\circ$ при $0 \leqslant \varepsilon < 1$ и неустойчива для векторов интенсивностей $\varepsilon\alpha^\circ$ при $\varepsilon \geqslant 1$.

Если при нулевых интенсивностях $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$ детерминированная система (1.1), (1.2) асимптотически устойчива, то система (1.3), (1.2) будет устойчивой при достаточно малых интенсивностях [3,4]. Следовательно, в пространстве параметров $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ критические интенсивности выделяют область устойчивости системы (1.3), (1.2).

В случае однопараметрического возбуждения ($k = 1$) областью устойчивости системы (1.3), (1.2) служит интервал $(-\alpha^\circ, \alpha^\circ)$, где число α° представляет собой критическую интенсивность шума.

2. Основные результаты. Предположим сначала, что задана нормальная форма системы (1.1), (1.2). Будем считать, что P — матрица Гурвица, т. е. ее спектр лежит в открытой левой полуплоскости. Это условие необходимо для устойчивости. Обозначим через A — линейный оператор, сопоставляющий каждой $\nu \times \nu$ -мерной матрице G матрицу $A(G) = H$, где H — решение (единственное) матричного уравнения

$$P^* H + HP = -G \tag{2.1}$$

Известно, что, если G вещественна, симметрична, положительно определена или полуопределена, то этими же свойствами будет обладать и $H = A(G)$.

По коэффициентам системы (1.1), (1.2) составим $k \times k$-мерную матрицу

$$R = \| \alpha_l^2 \rho_{lm} \|_{lm=1}^{k}, \qquad \rho_{lm} = q_m^* A(r_l r_l^*)\, q_m \tag{2.2}$$

Из изложенного следует, что элементы R не отрицательны. Можно показать, что $\rho_{lm} = 0$ тогда и только тогда, когда $\chi_{lm}(\lambda) \equiv 0$.

Теорема 1. Система (1.1), (1.2) устойчива тогда и только тогда, когда P—матрица Гурвица и собственные числа R по модулю меньше единицы.

Матрицу R можно определить непосредственно по передаточной матрице системы $\chi(\lambda)$.

Лемма 1. Пусть $\chi_{lm}(\lambda) = \gamma_{lm}(\lambda) / \Delta_{lm}(\lambda)$, где $\Delta_{lm}(\lambda)$ — многочлен Гурвица. Тогда уравнение

$$\chi_{lm}(\lambda)\, \chi_{lm}(-\lambda) = \frac{\tau_{lm}(\lambda)}{\Delta_{lm}(\lambda)} + \frac{\tau_{lm}(-\lambda)}{\Delta_{lm}(-\lambda)} \tag{2.3}$$

имеет решением многочлен $\tau_{lm}(\lambda)$, степень которого меньше степени $\Delta_{lm}(\lambda)$. Такое решение единственно. Матрица R определяется формулами

$$R = \| \alpha_l^2 \rho_{lm} \|_{l,m=1}^k, \qquad \rho_{lm} = \lim_{|\lambda|\to\infty} \lambda \frac{\tau_{lm}(\lambda)}{\Delta_{lm}(\lambda)} \tag{2.4}$$

Теорема 2. Система (1.3), (1.2) устойчива тогда и только тогда, когда полюсы $\chi(\lambda)$ лежат в открытой левой полуплоскости и собственные числа R по модулю меньше единицы.

Доказательство. Лемма 1 утверждает эквивалентность теорем 1 и 2. Покажем, что числа ρ_{lm}, определяемые соотношением (2.2), могут быть вычислены по формулам (2.3), (2.4), т. е. докажем следующее утверждение. Пусть P-матрица Гурвица $H = A(rr^*)$, $\rho = q^*Hq$, $\chi(\lambda) = r^*(P - \lambda I)^{-1} q$ и справедливо $\chi(\lambda) = \gamma(\lambda) / \Delta(\lambda)$. Тогда справедливо соотношение

$$\rho = \lim_{|\lambda|\to\infty} \lambda \frac{\tau(\lambda)}{\Delta(\lambda)}$$

где $\tau(\lambda)$ — решение уравнения

$$\chi(\lambda)\chi(-\lambda) = \frac{\tau(-\lambda)}{\Delta(-\lambda)} + \frac{\tau(\lambda)}{\Delta(\lambda)} \tag{2.5}$$

Имеем равенство

$$-(P^*H + HP) = -[(P - i\omega I)^* H + H(P - i\omega I)] = rr^*$$

Умножая это равенство справа на $q_{i\omega} = -(P - i\omega I)^{-1} q$ и слева на $(q_{i\omega})^*$ получим $2\operatorname{Re} q^*Hq_{i\omega} = |\chi(i\omega)|^2$.

Следовательно, единственным решением уравнения (2.5) служит многочлен $\tau(\lambda)$ такой, что $\tau(\lambda)/\Delta(\lambda) = q^*Hq_\lambda$. Так как $q^*Hq = \lim\limits_{|\lambda|\to\infty} \lambda q^*Hq_\lambda$, то лемма 1 доказана.

Прежде чем перейти к доказательству теоремы *I*, установим следующее утверждение.

Лемма 2. Для квадратной матрицы $\zeta = \| \zeta_{ij} \|_{i,j=1}^k$ с неотрицательными элементами следующие утверждения эквивалентны:

а) существуют векторы $\varkappa$ и η с положительными компонентами, удовлетворяющими уравнению $(I - \zeta)\varkappa = \eta$;

б) все последовательные главные миноры θ_l $(l = 1, \ldots, k)$ матрицы $(I_k - \zeta)$ положительны;

в) собственные числа матрицы ζ по модулю меньше единицы.

Эквивалентность утверждений б), в) и следование из них пункта а) доказано в [9]. Покажем, как из пункта а) следует пункт б). Доказательство проведем по индукции. Так как

$$\eta_i = (1 - \zeta_{ii})\varkappa_i - \sum_{j\neq i,\ j=1}^{k} \zeta_{ij}\varkappa_j$$

то $(1 - \zeta_{ii}) \geqslant \eta_i / \varkappa_i > 0$ и, следовательно, $\theta_1 > 0$.

Предположим, что $\theta_l > 0$ $(l = 1, \ldots, m;\ m < k)$. Обозначим $U_l = \| \zeta_{ij} \|_{i,j=1}^l$, $f = \| \varkappa_i \|_{i=1}^m$. Матрицу $(I_{m+1} - U_{m+1})$ можно записать в виде

$$(I_{m+1} - U_{m+1}) = \left\| \begin{matrix} (I_m - U_m) & -b \\ -c^* & d \end{matrix} \right\|$$

где число $d > 0$, а m-мерные векторы b и c имеют неотрицательные компоненты. Компоненты вектора $g = (I_m - U_m)f - b\varkappa_{m+1}$ не меньше соответствующих компонент вектора η и, следовательно, положительны. Так как матрица $(I_m - U_m)^{-1}$ имеет неотрицательные компоненты, то

$$-c^*f \leqslant -c^*(I_m - U_m)^{-1} b\varkappa_{m+1}$$
$$0 < \eta_{m+1} \leqslant -c^*f + d\varkappa_{m+1} \leqslant \varkappa_{m+1}(d - c^*(I_m - U_m)^{-1} b)$$

Отсюда заключаем, что $\theta_{m+1} = \theta_m (d - c^*(I_m - U_m)^{-1} b) > 0$. Лемма 2 доказана.

Докажем теорему 1. Для устойчивости системы (1.1), (1.2) необходимо и достаточно (см. [3], гл. 6) чтобы существовали положительно определенные квадратичные формы $V(x) = x^*Hx$ и $W(x) = x^*Gx$, удовлетворяющие соотношению [3]

$$LV(x) = -W(x) \tag{2.6}$$

$$LV(x) = 2x^*HPx + \sum_{l=1}^{k} \alpha_l^2 x^* r_l q_l^* H q_l r_l^* x$$

Соотношение (2.6) эквивалентно матричному соотношению

$$-(P^*H + HP) - \sum_{l=1}^{k} \alpha_l^2 q_l^* H q_l r_l r_l^* = G \tag{2.7}$$

Применяя оператор A, определяемый (2.1), к обеим частям (2.7), получим

$$H - \sum_{l=1}^{k} \alpha_l^2 q_l^* H q_l A(r_l r_l^*) = A(G) \tag{2.8}$$

Покажем, что необходимым и достаточным условием существования $H > 0$ и $G > 0$, удовлетворяющих (2.8), является выполнение пункта а) леммы 2 для $\zeta = R^*$, где R определено в (2.2). Тем самым будет завершено доказательство теоремы 1.

Необходимость. Обозначим

$$\varkappa = \| q_l^* H q_l \|_{l=1}^{k}, \qquad \eta = \| q_l^* A(G) q_l \|_{l=1}^{k} \tag{2.9}$$

Из (2.8) следует, что $\varkappa$ и η удовлетворяют линейным уравнениям

$$\varkappa_m - \sum_{l=1}^{k} \alpha_l^2 \rho_{lm} \varkappa_l = \eta_m \tag{2.10}$$

Достаточность. Из пункта в) леммы 2 следует, что решение линейной системы (2.10) будет иметь положительные компоненты при любом векторе η с положительными компонентами. Возьмем любую положительно определенную матрицу G. Определим вектор η при помощи второй формулы (2.9), а матрицу H—формулой

$$H = A(G) + \sum_{l=1}^{k} \alpha_l^2 \varkappa_l A(r_l r_l^*) > 0$$

Здесь $\varkappa$ — решение (2.10). Легко проверить, что выполняется первое равенство (2.9). Следовательно, H удовлетворяет уравнению (2.8)

Замечание 1. Пусть полюсы передаточной матрицы $\chi(\lambda)$ лежат в открытой левой полуплоскости. Обозначим через $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$ последовательные главные миноры матрицы $(I_k - R)$. Тогда в пространстве интенсивностей $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ область устойчивости системы (1.3), (1.2) определяется неравенствами

$$\theta_1 > 0, \qquad \theta_2 > 0, \ldots, \qquad \theta_k > 0 \tag{2.11}$$

Критические векторы интенсивностей α^* образуют границу области устойчивости и удовлетворяют уравнению $\theta_k = 0$.

В случае однопараметрического возбуждения критическая интенсивность α° системы вычисляется по формуле $|\alpha^\circ| = \rho^{-1/2}$, где ρ определяется в (2.3), (2.4).

Доказательство. Достаточно доказать, что векторы критических интенсивностей α° удовлетворяют уравнению $\theta_k = \det(I_k - R) = 0$. Пусть вектору α° соответствует матрица $R = R^\circ$. Тогда при любом $\varepsilon(0 \leqslant \varepsilon < 1)$ модули собственных чисел матрицы εR меньше единицы. По непрерывности максимальное собственное число матрицы R не превосходит единицы. Но так как α°—критический вектор, то максимальное собственное число равно единице. Следовательно, $\theta_k = 0$.

Алгоритм вычисления матрицы R по формулам (2.3), (2.4). Пусть дана дробно-рациональная функция

$$\chi(\lambda) = \frac{\gamma_1\lambda^{\nu-1} + \gamma_2\lambda^{\nu-2} + \ldots + \gamma_\nu}{\lambda^\nu + \Delta_1\lambda^{\nu-1} + \ldots + \Delta_\nu} = \frac{\gamma(\lambda)}{\Delta(\lambda)}$$

Предположим, что

$$\chi(\lambda)\chi(-\lambda) = \frac{\tau(\lambda)}{\Delta(\lambda)} + \frac{\tau(-\lambda)}{\Delta(-\lambda)}, \qquad \rho = \lim_{|\lambda|\to\infty} \lambda\frac{\tau(\lambda)}{\Delta(\lambda)}$$

$$\tau(\lambda) = \tau_1\lambda^{\nu-1} + \ldots + \tau_\nu$$

где $\Delta(\lambda)$ — многочлен Гурвица. Тогда алгоритм вычисления ρ состоит из следующих операций:

1) вычисление вектора δ по формуле

$$\delta = \left\| \begin{matrix} \gamma_1 & 0 & 0 & \ldots 0 \\ \gamma_3 & \gamma_2 & \gamma_1 & \ldots 0 \\ - & - & - & - - \\ - & - & - & - - \\ 0 & 0 & 0 & \ldots \gamma_\nu \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} (-1)^{\nu-1}\gamma_1 \\ (-1)^{\nu-2}\gamma_2 \\ - - - - \\ - - - - \\ \gamma_\nu \end{matrix} \right\|$$

2) вычисление первого элемента φ_1 вектора φ, удовлетворяющего линейной алгебраической системе $H_\nu\varphi = \delta$, где

$$H_\nu = \left\| \begin{matrix} \Delta_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \Delta_3 & \Delta_2 & \Delta_1 & \ldots & 0 \\ - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \Delta_\nu \end{matrix} \right\|$$

3) вычисление искомой величины $\rho = {}^1/_2(-1)^{\nu-1}\varphi_1$.

3. **Некоторые результаты применения теоремы 2 к конкретным системам.** Приведем условия устойчивости для скалярного уравнения четвертого порядка с постоянными коэффициентами в случае стохастического возмущения одного из коэффициентов уравнения.

Пусть тривиальное решение уравнения

$$y^{(4)} + ay^{(3)} + by^{(2)} + cy^{(1)} + dy + \alpha\xi^{\cdot}\sigma = 0$$

асимптотически устойчиво при нулевом шуме ($\alpha = 0$). Условия устойчивости таковы:

$$\sigma = y: \quad \alpha^2 < \frac{d\beta}{ab - c}, \qquad \sigma = y^{(2)}: \quad \alpha^2 < \beta/c$$

$$\sigma = y^{(1)}: \quad \alpha^2 < \beta/a, \qquad \sigma = y^{(3)}: \quad \alpha^2 < \frac{\beta}{bc - ad}$$

$$\beta = 2(abc - c^2 - a^2d)$$

Условия устойчивости уравнений второго и третьего порядков можно найти в [3]. Отметим, что критерий устойчивости данной работы в применении к линейным уравнениям ν-го порядка близок к критерию работы [6].

Приведем условия устойчивости для системы двух уравнений второго порядка

$$y^{(2)} + ay^{(1)} + bz^{(1)} + cy + dz + \alpha\xi^{\cdot}\sigma = 0$$
$$z^{(2)} + ey^{(1)} + fz^{(1)} + gy + hz = 0$$

Обозначим $k = a + f$, $l = h + c - be + af$, $m = ah + cf - bg - de$, $n = ch - dg$. Пусть выполнены условия асимптотической устойчивости при нулевом шуме ($\alpha = 0$): $kl - m > 0$, $klm - k^2n - m^2 > 0$, $n > 0$. Условия устойчивости таковы:

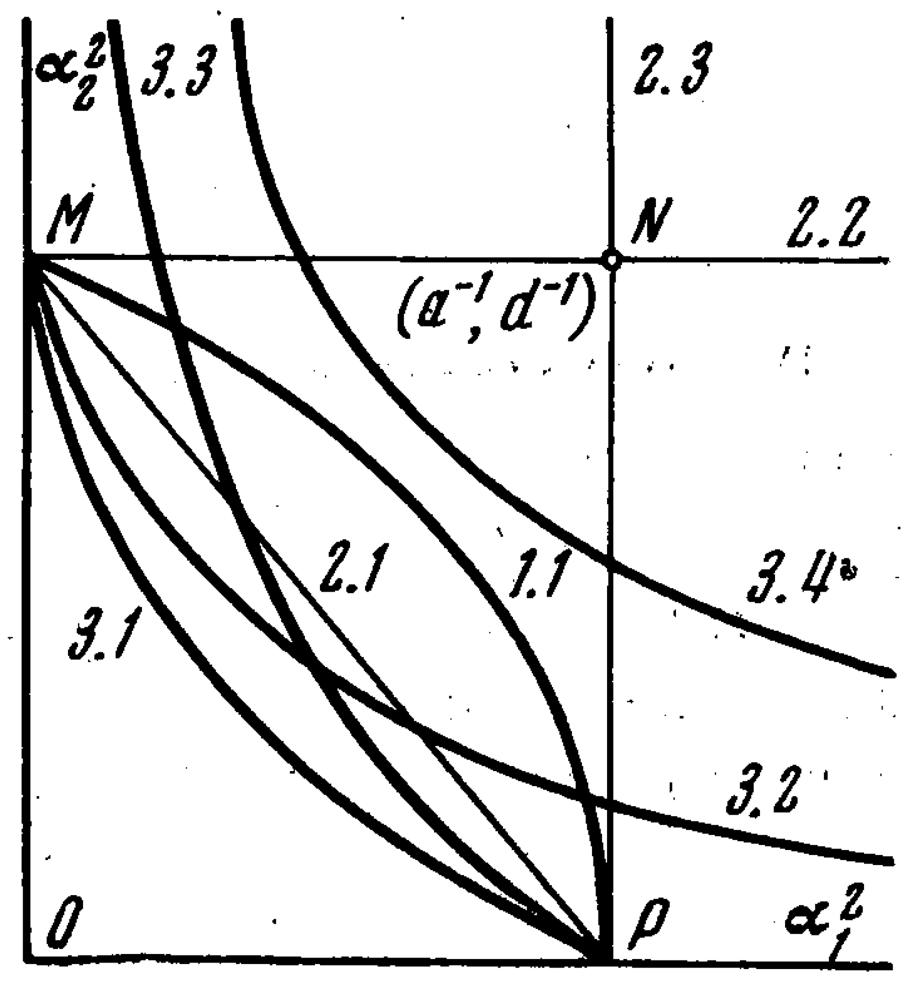
$$\sigma = y\colon \alpha^2 < \gamma n\{h^2(kl - m) + n[m + (f^2 - 2h)k]\}^{-1}$$
$$\sigma = y^{(1)}\colon \alpha^2 < \gamma[(n^2 - n)k + (l + f^2 - 2h)m]^{-1}$$
$$\sigma = z : \alpha^2 < \gamma n[g^2(kl - m) + kne^2]^{-1}$$
$$\sigma = z^{(1)}\colon \alpha^2 < \gamma(g^2k + e^2m)^{-1}$$
$$\gamma = 2(klm - k^2h - m^2)^1$$

Следующий пример интересен тем, что в нем строится область устойчивости для системы, подверженной воздействию двух независимых шумов с интенсивностями α_1 и α_2. Рассмотрим систему

$$\sigma_1 = \frac{1}{\Delta(p)}[(a_1p + a_2)\sigma_1\alpha_1\xi_1^{\cdot} + (b_1p + b_2)\sigma_2\alpha_2\xi_2^{\cdot}]$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{\Delta(p)}[(c_1p + c_2)\sigma_1\alpha_1\xi_1^{\cdot} + (d_1p + d_2)\sigma_2\alpha_2\xi_2^{\cdot}]$$

$$\Delta(p) = p^2 + \Delta_1 p + \Delta_2$$



где p — оператор дифференцирования, $\Delta(p)$ — многочлен Гурвица.

В соответствии с замечанием 1 область устойчивости системы определяется неравенствами

$$\theta_1 = 1 - \alpha_1^2 a > 0,\quad \theta_2 = 1 - \alpha_1^2 a - \alpha_2^2 d + \alpha_1^2\alpha_2^2(ad - bc) > 0$$

$$a = \frac{a_1^2\Delta_2 + a_2^2}{2\Delta_1\Delta_2},\qquad b = \frac{b_1^2\Delta_2 + b_2^2}{2\Delta_1\Delta_2}$$

$$c = \frac{c_1^2,\ \Delta_2 + c_2^2}{2\Delta_1\Delta_2},\qquad d = \frac{d_1^2\Delta_2 + d_2^2}{2\Delta_1\Delta_2}$$

На фигуре даны границы областей устойчивости для различных случаев. Приведем перечень рассматриваемых случаев в соответствии с номерами линий на фигуре (области устойчивости в плоскости α_1^2, α_2^2 ограничены осями координат и указанными линиями).

1. $ad - bc > 0$: 1.1. $abcd > 0$; 1.2. $bc = 0$, $ad > 0$ (отрезки MN и NP)

2. $ad - bc = 0$: 2.1. $abcd > 0$; 2.2. $a = b = c = 0$, $d > 0$; 2.3. $b = c = d = 0$, $a > 0$

3. $ad - bc < 0$: 3.1. $abcd > 0$; 3.2. $a = 0$, $bcd > 0$; 3.3. $abc > 0$, $d = 0$; 3.4. $a = d = 0$, $bc > 0$

Поступила 4 V 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Кац И. Я., Красовский Н. Н. Об устойчивости систем со случайными параметрами. ПММ, 1960, т. 27, вып. 5.
2. Bertram J. E., Carachik P. E. Stability of circuits with random ly time-varying parameters. Ptoc. Intern. Sympos. on Circuit and inform theory. Los-Angelos. Calif. IRE. Transactions CT-6, 1959.

3. Хасьминский Р. З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. М., «Наука», 1969.
4. Невельсон М. Б., Хасьминский Р. З. Об устойчивости стохастических систем. Проблемы передачи информации, 1968, т. 2, вып. 3.
5. Невельсон М. Б. Некоторые замечания относительно устойчивости линейной стохастической системы. ПММ, 1966, т. 30, вып. 6.
6. Невельсон М. Б., Хасьминский Р. З. Об устойчивости линейной системы при случайных возмущениях ее параметров. ПММ, 1966, т. 30, вып. 2.
7. Кушнер Г. Дж. Стохастическая устойчивость и управление. М., «Мир», 1969.
8. Гихман И. И. Об устойчивости решений стохастических дифференциальных уравнений. В сб.: Предельные теоремы и статистические выводы. Ташкент, «ФАН», 1966.
9. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц, 3-е изд. М., «Наука», 1967.

О ВОЛНАХ НА ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ ПРИ ДВИЖЕНИИ ПОГРУЖЕННОГО ЭЛЛИПСОИДА ВРАЩЕНИЯ

А. И. Смородин

(Ленинград)

Рассматривается задача об определении формы свободной поверхности идеальной жидкости неограниченной глубины при движении погруженного эллипсоида вращения.

Впервые задача такого типа (для случая движущегося импульса давления) была решена еще Кельвином [1]. Однако вследствие трудностей вычислительного порядка до сих пор удавалось найти только асимптотические значения ординат волн на больших расстояниях от источника возмущений [2–5].

Ниже изложен способ, позволяющий при весьма умеренном расходе машинного времени вычислять точные (в линейной постановке) значения ординат свободной поверхности при движении эллипсоида вращения большого удлинения. Полученные результаты могут найти применение в задачах теории корабля, гидротехники и т. п.

1. Полагая жидкость идеальной, а волны, возникающие на свободной поверхности, малыми, воспользуемся для решения задачи методом особенностей. Тогда потенциал скоростей, вызванных прямолинейным и равномерным движением эллипсоида со скоростью v, можно записать в виде [6]

$$\Phi(x, y, z) = \int_S \varphi_0(x, y, z, \xi, \eta, \zeta)\, q(\xi, \eta, \zeta)\, dS \tag{1.1}$$

Здесь φ_0 — потенциал единичного источника, удовлетворяющий граничному условию на свободной поверхности

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial \varphi_0}{\partial z}\bigg|_{z=0} = 0 \qquad (\nu = g / v^2) \tag{1.2}$$

и соответствующим условиям на бесконечности, q — интенсивность эквивалентных особенностей, определяемая из условия непротекания через поверхность эллипсоида S.

Следуя работе [6], интенсивность q примем в первом приближении такой же, как при движении эллипсоида в безграничной жидкости. (Погрешность, очевидно, будет тем меньше, чем глубже погружен эллипсоид и чем больше его удлинение). Поток около эллипсоида вращения в этом случае, как известно [7], эквивалентен обтеканию источников и стоков, непрерывно распределенных между его фокусами. Действитель-