Надо отметить, что полученное резонансное решение системы (1.5) справедливо и для нерезонансного случая $\beta \neq 1$. Из (2.10) видно, что тогда $n \to \infty$, а из рассмотренных случаев вытекает, что фазовые траектории являются концентрическими окружностями, т. е. A и B — постоянные.

Поступила 10 XII 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Витт А., Горелик Г. Колебания упругого маятника как пример колебаний двух параметрически связанных линейных систем. Ж. техн. физ., 1933, т. 3, вып. 2—3.
2. Struble R. A., Heinbockel J. H. Resonant oscillations of a beam — pendulum system. Trans. ASME, Ser. E. J. Appl. Mech., 1963, vol. 30, No. 2, p. 181—188.
3. Heinbockel J. H., Struble R. A. Resonant oscillations of extensible pendulum. Z. angew. Math. and Phys., 1963, vol. 14, No. 3, p. 263—269.
4. Struble R. A., Warmbrod G. K. Free resonant oscilliations of a conservative two-degree-of freedom system. J. Franklin Inst., 1964, vol. 278, No. 3, p. 195—209.
5. Чешанков Б. И. Резонансные колебания специального двойного маятника. ПММ, 1969, т. 33, вып. 6.
6. Чешанков Б. И. Резонансни трептения на две свързани махала. Българска акад. на науките, Теоретична и приложна механика, София, 1970, год. I, № 1, с. 81—91.
7. Struble R. A. Nonlinear differential equations. N. Y., McGraw-Hill, 1962, ch. 8.
8. Бейтман Г., Эрдейн А. Высшие трансцендентные функции. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье. М., «Наука», 1967.

УДК 531.381

О ДВИЖЕНИИ ГИРОСКОПА КОВАЛЕВСКОЙ В СЛУЧАЕ ДЕЛОНЕ

Ю. А. Архангельский

(Москва)

Общая качественная картина движения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки в предположении Ковалевской в случае Делоне была выяснена в работах [1–4].

В данной работе движение твердого тела исследуется в предположении, что телу сообщена большая угловая скорость вокруг оси, близкой к большой оси эллипсоида инерции. Получаемые при этом явные зависимости углов Эйлера от времени позволяют достаточно просто провести подробный анализ движения гироскопа Ковалевской в случае Делоне.

1. Как известно [1,2,5], уравнения движения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки в предположении Ковалевской

$$\begin{gathered}A = B = 2C, \qquad y_0 = z_0 = 0, \qquad c = Mgx_0C^{-1} \neq 0 \\ 2p^{\cdot} = qr, \qquad 2q^{\cdot} = -pr - c\gamma'', \qquad r^{\cdot} = c\gamma' \\ \gamma^{\cdot} = r\gamma' - q\gamma'', \qquad \gamma'^{\cdot} = p\gamma'' - r\gamma, \qquad \gamma''^{\cdot} = q\gamma - p\gamma' \end{gathered} \tag{1.1}$$

обладают при определенных условиях, как заметил Делоне, пятью алгебраическими интегралами

$$\begin{gathered}2p^2 + 2q^2 + r^2 = 2c\gamma - 6l', \qquad 2p\gamma + 2q\gamma' + r\gamma'' = 2l \\ \gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 = 1, \qquad p^2 - q^2 + c\gamma = 0, \qquad 2pq + c\gamma' = 0\end{gathered} \tag{1.2}$$

(l', l — произвольные постоянные), и общее решение этих уравнений (1.1) выражается в эллиптических функциях времени.

Предположим, что в начальный момент времени главная ось инерции тела Oy лежит в горизонтальной плоскости, главная ось инерции Oz составляет с вертикалью угол θ_0, $0 < \theta_0 \leqslant \pi / 2$ (случай $\theta_0 = 0$ будет рассмотрен ниже), и проекция начальной угловой скорости на ось Oz — большая величина. Тогда

$$\gamma_0 = \sin\,\theta_0, \qquad \gamma_0' = 0, \qquad \gamma_0'' = \cos\theta_0 \tag{1.3}$$

а последние два соотношения (1.2) будут удовлетворены при условии

$$p_0 = 0, \qquad q_0^2 = c\gamma_0 \tag{1.4}$$

Допустим, что

$$c > 0, \qquad r_0 > 0, \qquad q_0 > 0 \tag{1.5}$$

Здесь и ниже для любой функции $F(t)$ введено обозначение $F_0 = F(0)$.

Получая из соотношений (1.2) формулы [2]

$$4p^2 + r^2 = 6l', \qquad \gamma'' = 2r^{-1}[l + c^{-1}p(p^2 + q^2)] \tag{1.6}$$

$$p^2 + q^2 = -\frac{2lc}{3l'}\,p + \frac{c}{6l'}\,r\,\sqrt{6l' - 4l^2} \tag{1.7}$$

в которых в силу условий (1.3) и (1.4) нужно положить

$$6l' = r_0^2, \qquad 2l = r_0\gamma_0'', \qquad 6l' - 4l^2 = r_0^2\,\gamma_0^2 \tag{1.8}$$

будем иметь на основании (1.5) и (1.7)

$$q = (-p^2 - 2c\gamma_0''r_0^{-1}\,p + c\gamma_0 r_0^{-1} r)^{1/2} \tag{1.9}$$

Введя новую переменную σ и параметр μ

$$\sqrt{r_0^2 - 4p^2} = r_0 + 2p\mu^{-1}\sigma, \qquad \mu = \sqrt{c\gamma_0}\,/\,r_0 \quad (\sigma_0 = 0) \tag{1.10}$$

из соотношений (1.6), (1.9), (1.10) и первого уравнения системы (1.1), получим

$$p = -r_0\mu\,(\mu^2 + \sigma^2)^{-1}\,\sigma, \qquad q = r_0\mu\,(\mu^2 + \sigma^2)^{-1}\,\sqrt{R(\sigma)}$$

$$r = r_0\,(\mu^2 - \sigma^2)\,(\mu^2 + \sigma^2)^{-1} \tag{1.11}$$

$$2\sigma^{\cdot} = -r_0\,\sqrt{R(\sigma)}, \qquad R(\sigma) = -(\sigma^4 - 2\alpha\mu\sigma^3 + \sigma^2 - 2\alpha\mu^3\sigma - \mu^4)$$

$$\alpha = \gamma_0''\gamma_0^{-1} \tag{1.12}$$

Определение зависимости величины σ от времени проведем методом Л. Н. Сретенского [6]. Для этой цели найдем разложение корней σ_1, σ_2, σ_3, σ_4 уравнения $R(\sigma) = 0$ в ряды по малому параметру μ

$$\sigma_1 = -\mu^2 + \alpha\mu^3 + O(\mu^4), \qquad \sigma_2 = \mu^2 + \alpha\mu^3 + O\,(\mu^4) \tag{1.13}$$
$$\sigma_3 = -i + \mu\alpha + O(\mu^2), \qquad \sigma_4 = i + \mu\alpha + O(\mu^2)$$

и перейдем к новой переменной ν

$$2\sigma = (\sigma_1 + \sigma_2) + (\sigma_2 - \sigma_1)\cos\nu = \mu^2\cos\nu + \mu^3\alpha + O\,(\mu^4) \tag{1.14}$$

$$\nu_0 = {}^1/_2\pi + \mu\alpha + O(\mu^2)$$

Подставляя соотношения (1.13), (1.14) в уравнение (1.12) и интегрируя его, получим

$$\nu = {}^1/_2\pi + {}^1/_2 r_0 t + O\,(\mu) \tag{1.15}$$

Из формул (1.2), (1.6), (1.11), (1.14) получим

$$p = -\sqrt{c\gamma_0}(\cos\nu + \mu\alpha) + O(\mu^2), \qquad q = \sqrt{c\gamma_0}\sin\nu + O(\mu^2)$$

$$r = r_0 + O(\mu)$$

$$\gamma = -\gamma_0(\cos 2\nu + 2\mu\alpha\cos\nu), \qquad \gamma' = \gamma_0(\sin 2\nu + 2\mu\alpha\sin\nu)$$

$$\gamma'' = \gamma_0'' - 2\mu\gamma_0\cos\nu + O(\mu^2) \tag{1.16}$$

2. Для анализа движения введем углы Эйлера θ, φ, ψ

$$\cos\theta = \gamma'', \qquad \psi^{\boldsymbol\cdot} = (p\gamma + q\gamma')(1 - \gamma''^2)^{-1}, \qquad \varphi^{\boldsymbol\cdot} = r - \psi^{\boldsymbol\cdot}\cos\theta \tag{2.1}$$

Из первой формулы (2.1) и последней формулы (1.16) вытекает следующее выражение для угла нутации:

$$\theta = \theta_0 + 2\mu\cos\nu + O(\mu^2) \tag{2.2}$$

Подставляя выражения (1.16) во вторую формулу (2.1), которую на основании соотношений (1.2) перепишем в виде $\psi^{\boldsymbol\cdot} = -cp(p^2 + q^2)^{-1}$, и интегрируя, получим формулу для угла процессии

$$\psi = \psi_0 + 2\mu\gamma_0^{-1}\sin\nu + \mu^2\alpha\gamma_0^{-1}\sin 2\nu + O(\mu^3) \tag{2.3}$$

Угол собственного вращения найдем из третьего соотношения (2.1)

$$\varphi = {}^1/_2\pi + r_0 t + O(\mu) \tag{2.4}$$

Для определения движения гироскопа Ковалевской в случае Делоне при помощи формул (2.2) — (2.4) возьмем на неподвижной единичной сфере с центром в неподвижной точке сферический прямоугольник, образованный параллелями, отстоящими от средней параллели θ_0 на угол $\pm 2\mu$, и меридианами, отстоящими от среднего меридиана $(\psi_0 - {}^1/_2\pi)$ на угол $\pm 2\mu\gamma_0^{-1}$. Тогда траекторией оси Oz на указанной единичной сфере будет эллипс

$$\frac{\theta_1^2}{4\mu^2} + \frac{\psi_1^2}{4\mu^2\gamma_0^{-2}} = 1 \qquad (\theta_1 = \theta - \theta_0, \psi_1 = \psi - \psi_0) \tag{2.5}$$

Описывая этот эллипс, ось Oz гироскопа будет совершать в первом приближении периодическое движение с периодом $T = 4\pi / r_0$, проходя в моменты времени t_n и t_m

$$t_n = 2\pi n r_0^{-1}, \qquad t_m = (2m + 1)\pi r_0^{-1}\,(m, n = 0, \pm 1, \ldots)$$

через точки пересечения средней параллели с крайними меридианами и среднего меридиана с крайними параллелями.

Собственное вращение тела, как это следует из формулы (2.4), будет мало отличаться от равномерного вращения с большой угловой скоростью r_0.

3. Рассмотрим теперь движение гироскопа при условии $\theta_0 = 0$, из которого, с учетом формул (1.3), (1.4), вытекают соотношения

$$p_0 = q_0 = \gamma_0 = \gamma_0' = 0, \qquad \gamma_0'' = 1, \qquad 6l' - 4l^2 = 0 \tag{3.1}$$

Тогда из формул (1.5) — (1.7) следует

$$q = -\sqrt{-p(p + 2\mu_1\sqrt{c})}, \quad r = r_0\sqrt{1 - 4\mu_1^2 c^{-1} p^2}, \quad \mu_1 = \sqrt{c} / r_0 \tag{3.2}$$

Знак минус перед первым из радикалов выбран в силу условия $q_0 = 0$ и условия $q_0^{\boldsymbol\cdot} = -\gamma_0'' c < 0$, получающегося из второго уравнения системы (1.1) и соотношений (3.1) и (1.5).

Для определения зависимости p от времени перепишем первое из уравнений системы (1.1) при помощи соотношений (3.2) в виде

$$[f(\xi)]^{-1/2}d\xi = -{}^1/_2 r_0 dt, \qquad \xi = 2\mu_1 c^{-1/2} p$$
$$f(\xi) = (1-\xi^2)(-\xi^2 - 4\mu_1^2\xi) \qquad (\xi_0 = 0) \tag{3.3}$$

и перейдем, аналогично сделанному выше, к новой переменной u

$$\xi = 2\mu_1^2(\cos u - 1) \qquad (u_0 = 0) \tag{3.4}$$

Подставляя соотношение (3.4) в уравнение (3.3) и интегрируя его, получим

$$u = {}^1/_2 r_0\, t + 0(\mu_1^3)$$

Из формул (3.2) — (3.4), (1.2) будем иметь

$$p = -\mu_1 \sqrt{c}(1-\cos u), \quad q = -\mu_1 \sqrt{c}\sin u, \quad r = r_0 + O(\mu_1^3)$$
$$\gamma = -\mu_1^2(1 - 2\cos u + \cos 2u), \qquad \gamma' = -\mu_1^2(2\sin u - \sin 2u)$$
$$\gamma'' = 1 - 2\mu_1^4(1-\cos u)^2 + O(\mu_1^8) \tag{3.5}$$

Из соотношений для углов Эйлера, θ, φ, ψ, получаемых на основании формул (2.1) и (3.5)

$$\theta = 2\mu_1^2(1-\cos u) + O(\mu_1^6), \qquad \psi - \psi_0 = {}^1/_2 r_0 t$$
$$\varphi = {}^1/_2\pi + {}^1/_2 r_0 t + O(\mu_1^3) \tag{3.6}$$

следует, что траекторией оси Oz на неподвижной сфере единичного радиуса будет кардиоида [7]

$$\theta = 2\lambda(1-\cos\psi_1) \qquad (\lambda = \mu_1^2,\ \psi_1 = \psi - \psi_0).$$

Описывая эту кардиоиду, ось Oz будет совершать в первом приближении периодическое движение периода $T = 4\pi / r_0$.

Собственное вращение тела, как это следует из последней формулы (3.6), будет мало отличаться от равномерного с большой угловой скоростью ${}^1/_2\, r_0$.

Приведенный анализ позволяет в достаточной мере проследить за движением гироскопа Ковалевской в случае Делоне и выявить зависимость этого движения от конструктивных параметров гироскопа и начальных условий движения.

Поступила 22 1 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Делоне Н. Б. Алгебраические интегралы движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки. Спб, 1892.
2. Аппельрот Г. Г. Некоторые дополнения к сочинению Н. Делоне Алгебраические интегралы движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки. Тр. отд. физ. наук о-ва любителей естествознания, 1893, т. 6.
3. Аппельрот Г. Г. Не вполне симметричные тяжелые гироскопы. В сб.: Движение твердого тела вокруг неподвижной точки. М., Изд-во АН СССР, 1940.
4. Горр Г. В., Савченко А. Я. Об одном случае движения тяжелого твердого тела в решении С. В. Ковалевской. В сб.: Механика твердого тела, вып. 2, Киев, «Наукова думка», 1970.
5. Голубев В. В. Лекции по интегрированию уравнений движения твердого тела около неподвижной точки. М., Гостехиздат, 1953.
6. Сретенский Л. Н. Движение гироскопа Горячева — Чаплыгина. Изв. АН СССР, ОТН, 1953, № 1.
7. Савелов А. А. Плоские кривые. М., Физматгиз, 1960.