

Видно, что вторая координата — циклическая, а первая — скрытая циклическая. Заметим, что в случае 2 нельзя ввести такую замену переменных, чтобы оба линейных интеграла отвечали циклическим координатам. Как известно, для этого необходимо, чтобы группу можно было преобразовать в абелеву. С другой стороны, при замене переменных каждая группа преобразуется в подобную ей группу [2], а у подобных групп при подходящем подборе базисных векторов будут одинаковые структурные константы. Согласно указанному выше следствию, существует замена координатной системы, преобразующая первую координату в циклическую, но при этом вторая координата перейдет в скрытую циклическую.

Поступила 17 III 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. И л и е в И. О линейных интегралах голономной механической системы. ПММ, 1970, т. 34, вып. 4.
2. Э й з е н х а р т Л. П. Непрерывные группы преобразований. М., Изд-во иностр. лит., 1947.
3. Н е й м а р к Ю. И., Ф у ф а е в Н. А. Динамика неголономных систем. М., «Наука», 1967.
4. У и т т е к е р Е. Т. Аналитическая динамика. М.—Л., Гостехиздат, 1937.

УДК 534.013

РЕЗОНАНСНЫЕ КОЛЕБАНИЯ КРУТИЛЬНОГО ФИЗИЧЕСКОГО МАЯТНИКА

Б. И. Чешанков

(София)

Колебания консервативных систем с двумя степенями свободы при внутреннем резонансе рассматривались в [1-6]. Исследуются резонансные колебания одной механической системы и выясняются особенности ее поведения.

1. Рассмотрим систему, показанную на фиг. 1. Она состоит из диска, прикрепленного к тонкому упругому валу, который имеет коэффициент упругости c . Вокруг оси $O\eta$, принадлежащей диску и перпендикулярной оси вращения диска (на фигуре эта ось перпендикулярна плоскости чертежа), вращается физический маятник. Будем считать, что ξ, η, ζ — главные оси инерции и относительно них физический маятник имеет главные моменты инерции I_ξ, I_η, I_ζ . I — момент инерции диска относительно оси вращения.

Обозначим центр тяжести физического маятника через C , расстояние $OC = e, \varphi_1$ — угол вращения диска из положения равновесия, φ_2 — угол отклонения физического маятника от вертикали, m — масса физического маятника. В этих обозначениях имеем:

для кинетической энергии системы

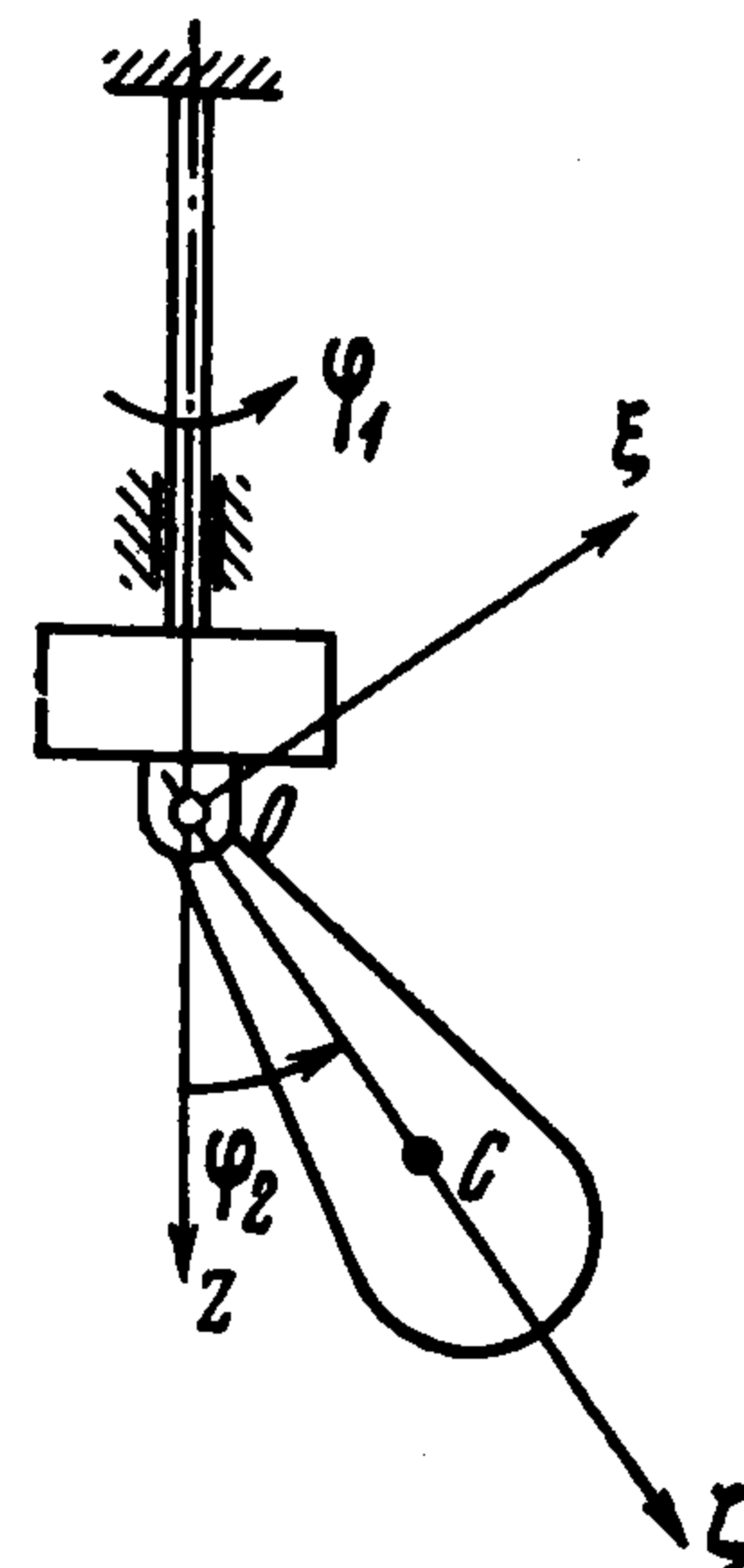
$$T = 1/2 (I + I_\xi \sin^2 \varphi_2 + I_\zeta \cos^2 \varphi_2) \dot{\varphi}_1^2 + 1/2 I_\eta \dot{\varphi}_2^2 \quad (1.1)$$

для потенциальной энергии системы

$$\Pi = 1/2 c \varphi_1^2 - mge \sin \varphi_2 \quad (1.2)$$

Учитывая (1.1) и (1.2), находим уравнения движения

$$\begin{aligned} I\ddot{\varphi}_1 + (I_\xi \sin^2 \varphi_2 + I_\zeta \cos^2 \varphi_2) \ddot{\varphi}_1 + (I_\xi - I_\zeta) \sin 2\varphi_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 + c\varphi_1 &= 0 \\ I_\eta \ddot{\varphi}_2 - 1/2 (I_\xi - I_\zeta) \sin 2\varphi_2 \dot{\varphi}_1^2 + mge \sin \varphi_2 &= 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$



Фиг. 1

Положим

$$\varphi_1 = \varepsilon^{1/2} z_1, \quad \varphi_2 = \varepsilon^{1/2} z_2 \quad (\varepsilon — \text{малый параметр}) \quad (1.4)$$

После некоторых преобразований из (1.3) получаем

$$z_1'' + \beta^2 z_1 = -\varepsilon a (z_1'' z_2^2 + 2z_2 z_1' z_2') + \varepsilon^2 a (4/3 z_2^3 z_1' z_2' + 1/8 z_2^4 z_1'') + \dots \quad (1.5)$$

$$z_2'' + z_2 = \varepsilon (b z_1'^2 z_2 + 1/6 z_2^3) - \varepsilon^2 (2/3 b z_1'^2 z_2^3 + 1/120 z_2^5) + \dots$$

$$\tau = \left(\frac{mge}{I_n} \right)^{1/2} t, \quad a = \frac{I_\xi - I_\zeta}{I + I_\zeta}, \quad b = \frac{I_\xi - I_\zeta}{I_n}, \quad \beta^2 = \frac{c}{I + I_\zeta} \frac{I_n}{mge} \quad (1.6)$$

Штрих означает производные относительно безразмерного времени.

2. Будем искать решение системы (1.5), используя одно дополнение к существующим асимптотическим методам [7]. Найдем решение в виде

$$\begin{aligned} z_1 &= A \cos(\beta\tau - \varphi) + \varepsilon z_{11} + \varepsilon^2 z_{12} + \dots \\ z_2 &= B \cos(\tau - \psi) + \varepsilon z_{21} + \varepsilon^2 z_{22} + \dots \end{aligned} \quad (2.1)$$

где A, B, φ, ψ — медленно меняющиеся функции τ , а z_{11}, z_{21}, \dots — аддитивные поправки. Подставляя (2.1) в (1.5), находим

$$\begin{aligned} (A'' + 2\beta A\varphi' - A\varphi'^2) \cos(\beta\tau - \varphi) + (A\varphi'' - 2\beta A' + 2A'\varphi') \sin(\beta\tau - \varphi) + \\ + \varepsilon(z_{11}'' + \beta^2 z_{11}) + \dots = \varepsilon \{ 1/2 a \beta^2 A B^2 \cos(\beta\tau - \varphi) + \\ + 1/4 a \beta(\beta + 2) A B^2 \cos[(\beta + 2)\tau - \varphi - 2\psi] + \\ + 1/4 a \beta(\beta - 2) A B^2 \cos\{(\beta - 2)\tau - \varphi + 2\psi\} \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} (B'' + 2B\psi' - B\psi'^2) \cos(\tau - \psi) + (B\psi'' - 2B' + 2B'\psi') \sin(\tau - \psi) + \varepsilon(z_{21}'' + z_{21}) + \dots = \\ = \varepsilon \{ (1/2 b \beta^2 A^2 B + 1/8 B^3) \cos(\tau - \psi) + 1/24 B^3 \cos(3\tau - 3\psi) - \\ - 1/4 b \beta^2 A^2 B \cos[(2\beta - 1)\tau - 2\varphi + \psi] - \\ - 1/4 b \beta^2 A^2 B \cos[(2\beta + 1)\tau - 2\varphi - \psi] \} \end{aligned}$$

Здесь члены, содержащие ε в степени выше первой, отброшены. Если $\beta \neq 1$, решение нерезонансное и получается без особых затруднений. Для A и B получаются постоянные, определяемые из начальных условий. Рассмотрим резонансное решение, когда $\beta \approx 1$ и $\beta = 1$.

Используем тождества

$$\cos[(\beta - 2)\tau - \varphi + 2\psi] = \cos\lambda \cos(\beta\tau - \varphi) + \sin\lambda \sin(\beta\tau - \varphi) \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \cos[(2\beta - 1)\tau - 2\varphi + \psi] = \cos\lambda \cos(\tau - \psi) - \sin\lambda \sin(\tau - \psi) \\ \lambda = 2(\beta - 1)\tau - 2\varphi + 2\psi \end{aligned} \quad (2.4)$$

Из (2.2) находим системы

$$\begin{aligned} A'' + 2\beta A\varphi' - A\varphi'^2 &= \varepsilon^{1/2} a \beta^2 A B^2 - \varepsilon^{1/4} a \beta(2 - \beta) A B^2 \cos\lambda \\ A\varphi'' - 2\beta A' + 2A'\varphi' &= -\varepsilon^{1/4} a \beta(2 - \beta) A B^2 \sin\lambda \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} B'' + 2B\psi' - 2\psi'^2 &= \varepsilon(1/2 b \beta^2 A^2 B + 1/8 B^3) - \varepsilon^{1/4} b \beta^2 A^2 B \cos\lambda \\ B\psi'' - 2B' + 2B'\psi' &= \varepsilon^{1/4} b \beta^2 A^2 B \sin\lambda \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_{11}'' + \beta^2 z_{11} &= 1/4 a \beta(\beta + 2) A B^2 \cos[(\beta + 2)\tau - \varphi - 2\psi] \\ z_{21}'' + z_{21} &= -1/4 b \beta^2 A^2 B \cos[(2\beta + 1)\tau - 2\varphi - \psi] + 1/24 B^3 \cos(3\tau - 3\psi) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Уравнения (2.5) называются вариационными, а (2.6) — уравнения для возмущений.

Учитывая медленное изменение A, B, φ и ψ , из (2.6) находим

$$z_{11} = -1/16 a \beta \frac{\beta + 2}{\beta + 1} A B^2 \cos[(\beta + 2)\tau - \varphi - 2\psi] \quad (2.7)$$

$$z_{21} = 1/16 \frac{b\beta}{\beta + 1} A^2 B \cos[(2\beta + 1)\tau - 2\varphi - \psi] - 1/192 B^3 \cos(3\tau - 3\psi)$$

Легко проверить, что любое решение системы

$$\begin{aligned} dA/\varepsilon d\tau &= 1/8 a\beta(2 - \beta)AB^2 \sin\lambda & d\varphi/\varepsilon d\tau &= 1/4 a\beta B^2 - 1/8 a\beta(2 - \beta)B^2 \cos\lambda \\ dB/\varepsilon d\tau &= -1/8 b\beta A^2 B \sin\lambda & d\psi/\varepsilon d\tau &= 1/4 b\beta A^2 + 1/16 B^2 - 1/8 b\beta A^2 \cos\lambda \end{aligned} \quad (2.8)$$

удовлетворяет системе (2.5) с точностью до членов первого порядка по ε . Из первых двух уравнений (2.8) после исключения τ и интегрирования находим

$$\sigma^2 A^2 + B^2 = \sigma^2 \kappa^2 \quad \left(\sigma^2 = \frac{b}{a(2 - \beta)} \right) \quad (2.9)$$

Здесь κ^2 — постоянная интегрирования. Из (2.8), (2.9) и (2.4) получаем относительно двух переменных A^* и λ автономную систему

$$\begin{aligned} dA^*/du &= A^*(1 - A^{*2}) \sin\lambda, & d\lambda/du &= -2n + 4qA^{*2} + 2(1 - 2A^{*2}) \cos\lambda & \left(A^* = \frac{A}{\kappa} \right) \\ u &= 1/8 \beta b \kappa^2 \varepsilon \tau, & 2n &= -\frac{16}{b\beta \kappa^2} \frac{\beta - 1}{\varepsilon} + \frac{4a\beta - 1}{b\beta}, & 4q &= \sigma^2 \frac{4a\beta - 1}{b\beta} - 4\beta \end{aligned} \quad (2.10)$$

Из (2.10) находим

$$[-2nA^* + 4qA^{*3} + 2A^*(1 - 2A^{*2}) \cos\lambda] dA^* - A^{*2}(1 - A^{*2}) \sin\lambda d\lambda = 0 \quad (2.11)$$

Это уравнение имеет общий интеграл

$$-nA^{*2} + qA^{*4} + A^{*2}(1 - A^{*2}) \cos\lambda = c_0 \quad (2.12)$$

Здесь c_0 — постоянная интегрирования.

3. Исследуем фазовые траектории для автономной системы (2.10) в плоскости $x y$, для которой $x = A^* \cos\lambda$, $y = A^* \sin\lambda$, т. е. A^* и λ будут естественными полярными координатами. Фазовые траектории определяются выражением (2.12), и все они симметричны относительно оси Ox . Ввиду (2.9) все реальные траектории лежат на границе или внутри круга $A^* = 1$.

В первую очередь, определим особые точки системы (2.10). Из условий

$$dA^*/du = 0, \quad d\lambda/du = 0 \quad (3.1)$$

находим особые точки

$$\begin{aligned} \text{(а)} \quad \lambda_1 &= 0, & A_1^* &= \left(\frac{1 - n}{2(1 - q)} \right)^{1/2} \\ \text{(б)} \quad \lambda_2 &= \pi, & A_2^* &= \left(\frac{1 + n}{2(1 + q)} \right)^{1/2} \\ \text{(в)} \quad \cos\lambda_3 &= 2q - n, & A_3^* &= 1 \end{aligned} \quad (3.2)$$

На самом деле точка (в) — две особые точки на граничной окружности, расположенные симметрично относительно оси x . Начало координат тоже особая точка, так как $dA^*/du = 0$ при $A^* = 0$. Эти три типа особых точек зависят от параметров q и n . При некоторых значениях параметров q и n они существуют, а при других — не существуют. Особо наглядно изъясняется эта связь для точек (а) и (б), если второе из уравнений (3.1) запишем в виде

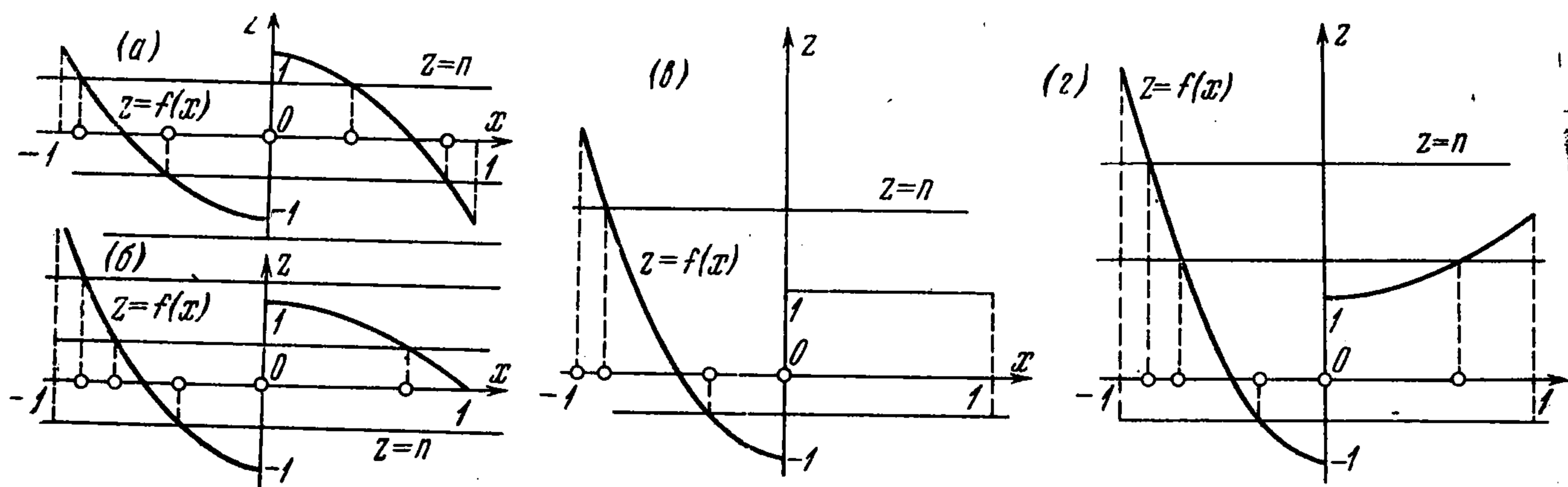
$$n = f(x), \quad f(x) = \begin{cases} 1 + 2(q - 1)x^2 & (0 < x < 1) \\ -1 + 2(q + 1)x^2 & (-1 < x < 0) \end{cases} \quad (3.3)$$

и решим его графически. Ввиду зависимости (2.9) рассмотрим только интервал $[-1, 1]$ для x .

Видно, что параметр q имеет одно граничное значение $q = 1$, которое выделяет два типа параболы $z = f(x)$. Отметим еще и случай $q = 0$, при котором члена qA^{*4} в выражении (2.12) не будет.

Рассмотрим следующие случаи: А. Значение $q = 0$. Б. Значение q ниже граничного ($q = 0.5$). В. Граничное значение $q = 1$. Г. Значение q выше граничного ($q = 1.5$)

Графики функции $z = f(x)$ для четырех случаев показаны соответственно на фиг. 2, а, б, в, г. Параллельно оси x проведены прямые $z = n$. Абсциссы точки пересечения этих прямых с линией $z = f(x)$ дают искомые особые точки.



Фиг. 2

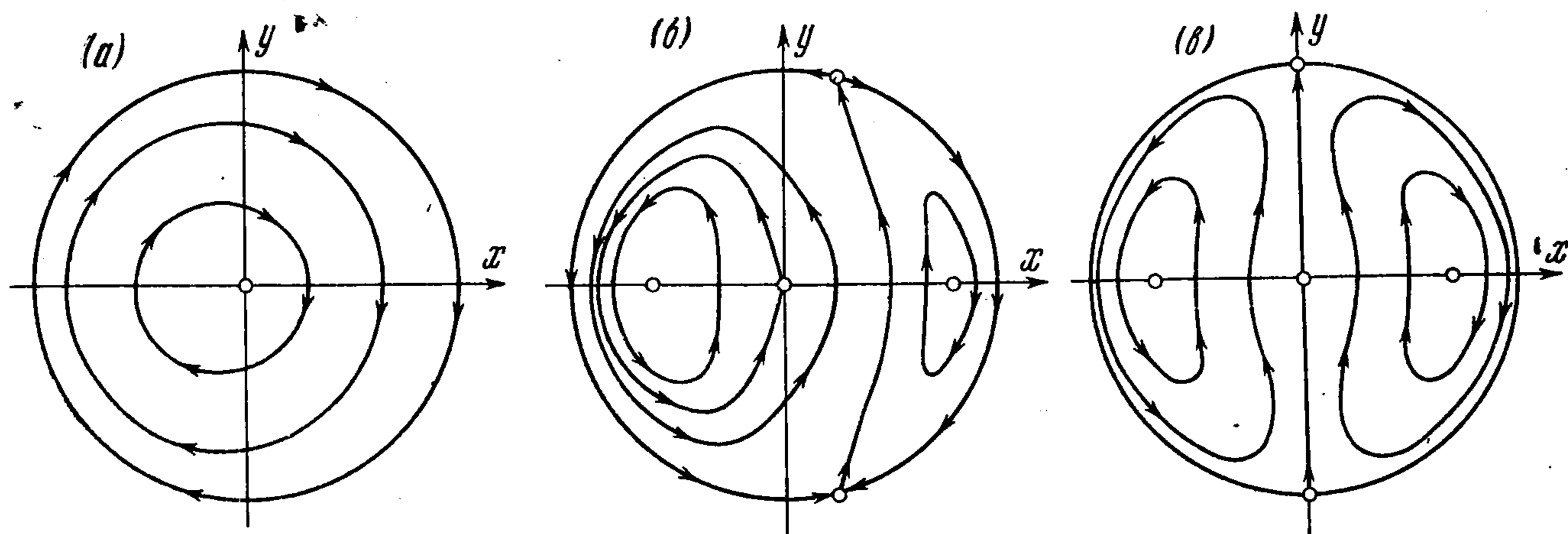
При движении прямой $z = n$ от $-\infty$ до $+\infty$ (т. е. для интервала $-\infty < n < +\infty$) очень ясно видно, когда существуют особые точки (а) и (б) и как они двигаются по оси x .

Рассмотрим перечисленные случаи.

А. $q = 0$. Здесь в интервале $-1 \leq n \leq 1$ существуют особые точки (а), (б) и (в), которые двигаются влево. В зависимости от n выделяются следующие подслучаи.

А.1. $n < -1$. Существует только одна особая точка — начало отсчета, которая является центром. Фазовые траектории для такого случая ($n = 1.5$) показаны на фиг. 3, а. Видно, что амплитуда A^* изменяется незначительно.

А.2. $-1 < n < 0$. Здесь существуют все особые точки (а), (б), которые будут центрами, а точки (в) — седлами. Начало отсчета — несколько необычная



Фиг. 3

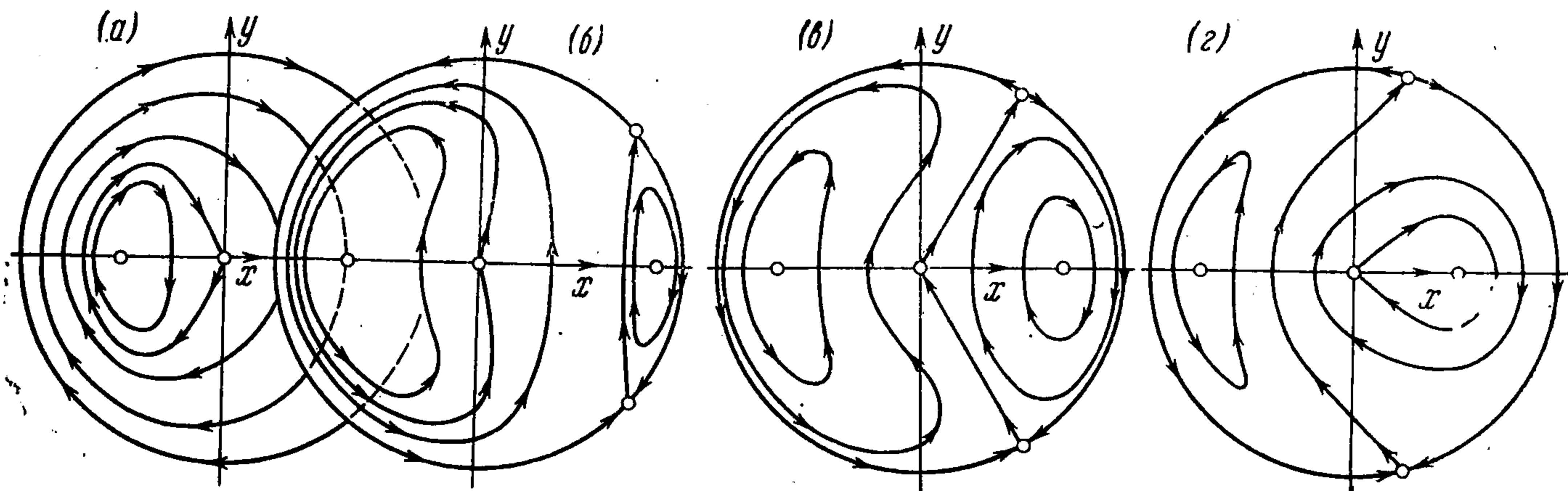
особая точка, индекс которой равен нулю. Ее можно рассматривать как результат совпадения центра и седла. Фазовые траектории для такого случая ($n = -0.25$) показаны на фиг. 3, б. Видно, что амплитуда A^* для некоторых фазовых траекторий будет иметь значительное изменение.

А.3. $n = 0$. Это несколько особый граничный случай (фиг. 3, в). Фазовые траектории симметричны еще и относительно оси y . Для всех точек граничной окружности условия (3.1) выполняются, так что ее можно рассматривать как особую линию.

При дальнейшем изменении n (для положительных значений) рассмотренные картины фазовых траекторий повторяются, но в обратном порядке с той разницей, что

фазовые траектории для некоторого положительного значения n будут зеркально-симметричными относительно оси y для фазовых траекторий при том же отрицательном значении n . Например, для $n = 0.25$ имеем фазовые траектории фиг. 3, б только оси x надо повернуть влево.

Б. $q = 0.5$. Здесь особая точка (а) существует в интервале $-1 < n < 2$, особая точка (б) — в интервале $0 < n < 1$, особые точки (в) — в интервале $0 < n < 2$.



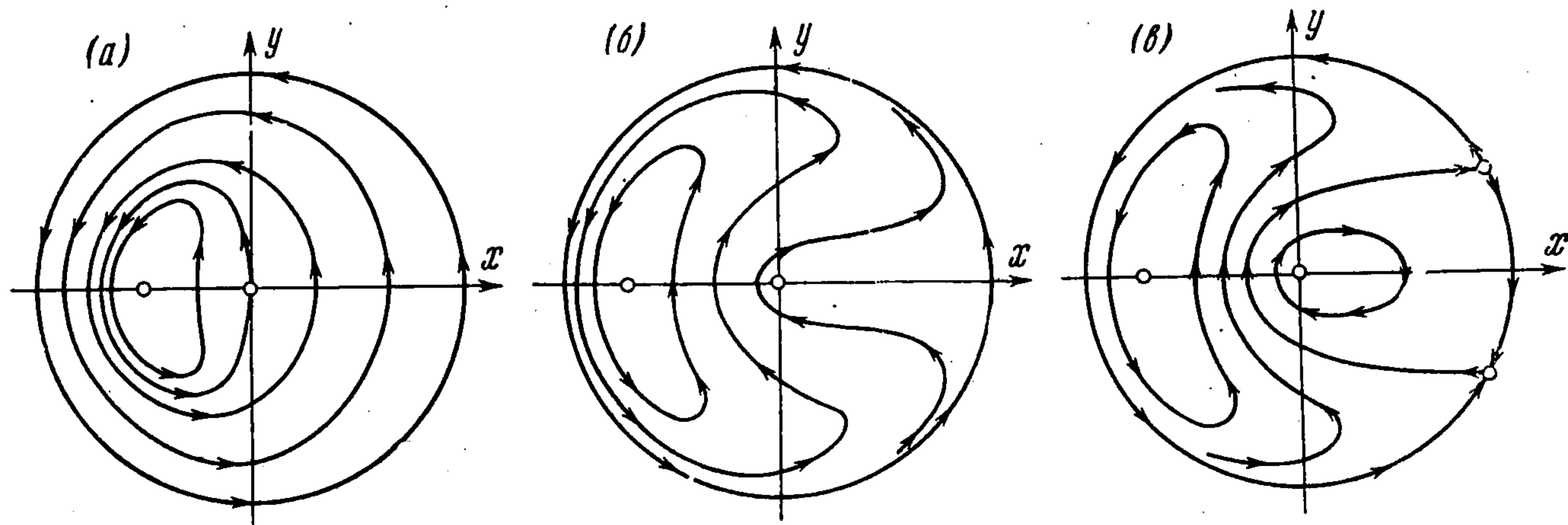
Фиг. 4

Поэтому выделяются следующие подслучаи:

Б.1. $n < -1$. Этот подслучай аналогичен А.1. Особенности не появляются.

Б.2. $-1 < n < 0$. Здесь существуют две особые точки (б), центр и начало координат, индекс которого равен нулю. Фазовые траектории для такого случая ($n = -0.25$) показаны на фиг. 4, а.

Б.3. $0 < n < 1$. Здесь существуют все особые точки. В этом подслучае можно выделить три различные картины поведения фазовых траекторий.



Фиг. 5

Б.3.1. $0 < n < 0.5$. Фазовая траектория, которая проходит через начало отсчета, замыкается около центра (б). Такой случай ($n = 0,25$) показан на фиг. 4, б.

Б.3.2. $n = 0.5$. Это граничный случай (фиг. 4, в). Фазовая траектория, проходящая через начало координат, изображается двумя прямыми.

Б.3.3. $0.5 < n < 1$. Здесь фазовая траектория, которая проходит через начало координат, замыкается около центра (а). Такой случай ($n = 0.65$) изображен на фиг. 4, г.

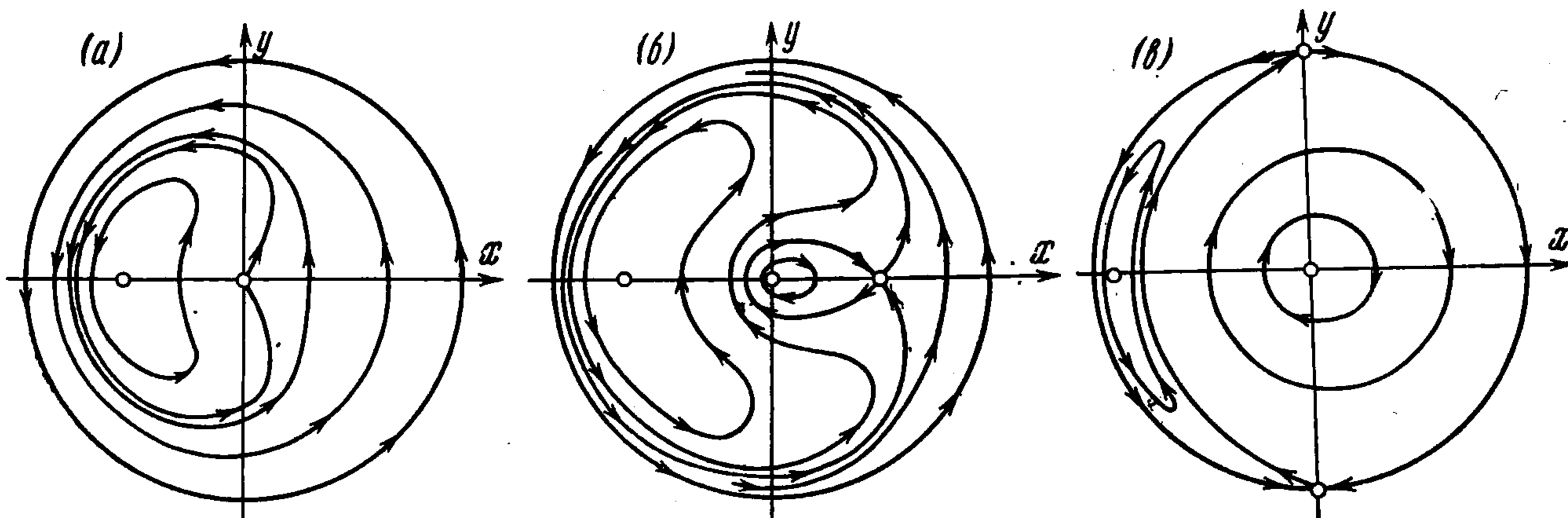
Б.4. $1 < n < 2$. Здесь существуют, как и в Б.2., две особые точки (б) и начало отсчета (0.0), только теперь начало (0.0) будет центром, а точка (б) — особой точкой с индексом, равным нулю. Фазовые траектории для этого случая специально не показаны, но они аналогичны В.4. (фиг. 5, в).

Б.5. $2 < n$. Снова, как и в Б.1, имеем только одну особую точку — начало координат (0.0), которая будет центром.

В. $q = 1$ (граничный случай). Здесь особая точка (а) не существует. Точка (б) существует в интервале $-1 < n < 3$ и точки (в) — в интервале $1 < n < 3$. Поэтому выделяются пять подслучаев:

В.1. $n < -1$. Этот случай, аналогичный А.1 и Б.1.

В.2. $-1 < n < 1$. Существуют две особые точки (б), одна будет центром, вторая — началом отсчета, которое будет особой точкой с индексом, равным нулю.



Фиг. 6

В зависимости от вида траектории, проходящей через начало координат, можно выделить три картины.

В.2.1 $-1 < n < 0$. Фазовая траектория, проходящая через начало координат и замыкающаяся около центра (б), имеет для начала координат две касательные, которые образуют острый угол.

В.2.2. $n = 0$. Фазовая траектория, проходящая через начало отсчета (фиг. 5, а), имеет касательную — ось y .

В.2.3. $0 < n < 1$. Фазовая траектория, проходящая через начало координат, имеет для него две касательные, образующие тупой угол.

Картины фазовых траекторий для случаев В.2.1 и В.2.3. на фигурах специально не показаны, но они аналогичны соответственно на Б.2. (фиг. 4, а) и Г.2.3. (фиг. 6, а).

В.3. $n = 1$. Это специальный граничный подслучай. Здесь для всех точек оси x в интервале $0 \leq x \leq 1$ условия (3.1) выполнены, так что этот отрезок можно рассматривать как особую линию. Фазовые траектории для такого подслучая показаны на фиг. 5, б. Видно, что амплитуда для некоторых траекторий имеет значительное изменение.

В.4. $1 < n < 3$. Здесь существуют особые точки (б) и начало отсчета, которые являются центрами и точки (б), которые являются седлами. Фазовые траектории для такого случая ($n = 1.125$) показаны на фиг. 5, в.

В.5. $3 < n$. Здесь, как и в В.5., имеем только одну особую точку (0.0) — центр.

Г. $q = 1.5$. Здесь (фиг. 2, г) особая точка (а) существует в интервале $1 < n < 2$, точка (б) — в интервале $-1 < n < 4$ и точки (в) — в интервале $2 < n < 4$. Такой случай качественно исследован в [5]; следует отметить, что рассмотренные случаи А, Б, В там не наблюдаются. Поэтому подробно на этом случае останавливаться не будем. Имеем

Г.1 $n < -1$. Этот подслучай, аналогичный на А.1., Б.1., В.1.

Г.2.1. $-1 < n < 0$; картина аналогична В.2.1

Г.2.2. $n = 0$; картина аналогична В.2.2

Г.2.3. $0 < n < 1$; картина аналогична (фиг. 6, а для $n < 0,5$)

Г.3. $1 < n < 2$. Этот подслучай существенно отличается от рассмотренных выше. Здесь точка (а) — седло. Через нее проходит сепаратрисса, часть которой

охватывает центр (б), а другая часть охватывает другой центр — начало отсчета (фиг. 6, б).

Г.4. $2 < n < 4$. Здесь существуют особые точки (б) и начало отсчета, которые являются центрами точки (в) и которые будут седлами. Этот подслучай, аналогичный В.4. Фазовые траектории для такого подслучая показаны на фиг. 6, в.

Г.5. $4 < n$. Этот подслучай, аналогичный Б.5., В.5.

Если вместо $q = 1.5$ возьмем некоторое другое значение $q (q > 1)$ качественные результаты изменяться не будут.

Фазовые траектории рассмотрены для положительных значений параметра q и для всех значений параметра n . Отрицательные значения параметра q не рассматриваются, так как если в (2.12) изменить знак q , n , $\cos \lambda$, c_0 одновременно на обратные, то это равенство не изменится. Это показывает, что проведенные исследования для положительных значений q относятся и для отрицательных значений q , если только повернуть оси x влево и заменить n на $-n$. Из (2.10) следует еще, что надо повернуть и все стрелки фазовых траекторий.

Фазовые траектории позволяют проанализировать картину движений системы. Очевидно, что возможны движения с постоянной амплитудой; им отвечают точки типа центра, возможны движения с периодическими колебаниями амплитуды, которым отвечают замкнутые фазовые траектории. Сепаратриссы и особые седловые точки соответствуют переходным изменениям амплитуды.

В подслучаях А.2.— А.4., Б.2.— Б.4., В.2.— В.4., Г.2.— Г.4. для некоторых фазовых траекторий можно наблюдать перебрасывание энергии с вращающегося диска на физический маятник, где амплитуда крутильного колебания A^* значительно уменьшается, в то время как амплитуда колебания физического маятника B тоже значительно возрастает, ввиду зависимости (2.9). Потом A^* возрастает, а B уменьшается. Энергия перебрасывается с физического маятника на вращающийся диск.

4. Найдем еще и амплитуду A^* как функцию переменной u . Из (2.12) и (2.10) получаем

$$\frac{d\theta}{\pm \sqrt{(1-\theta)^2 \theta^2 - (c_0 + n\theta - q\theta^2)^2}} = 2du \quad (\theta = A^{*2}) \quad (4.1)$$

Рассмотрим полином

$$G(\theta) = (1-\theta)^2 \theta^2 - (c_0 + n\theta - q\theta^2)^2 \quad (4.2)$$

Корни полинома (4.2) совпадают с корнями (для A^{*2}) уравнения (2.12) при $\cos \lambda = \pm 1$. Полином (4.2) для различных значений n , q и c_0 имеет четыре реальных корня или два комплексных и два реальных корня, т. е. его можно записать в виде

$$G(\theta) = (1-q^2)(\theta - \theta_1)(\theta - \theta_2)(\theta - \theta_3)(\theta - \theta_4) \quad (\theta_4 < \theta_3 < \theta_2 < \theta_1) \quad (4.3)$$

или в виде

$$G(\theta) = (1-q^2)(\theta - \theta_1)(\theta - \theta_2)[(\theta - \nu)^2 + \omega^2] \quad (0 < \theta_2 < \theta_1 < 1) \quad (4.4)$$

$$\nu = \frac{nq - 1}{q^2 - 1} - 1/2(\theta_1 + \theta_2) \quad \omega^2 = \frac{c_0}{(q^2 - 1)\theta_1\theta_2} - \nu^2 \quad (\omega > 0)$$

Каждая фазовая траектория пересекает ось X в двух точках, квадраты полярных радиусов которых будут корнями θ_i . Для различных случаев (А, ..., Г) полином (4.2) представляется по-разному.

В случаях А и Б полином $G(\theta)$ всегда имеет вид (4.3), но $\theta_4 < 0$, а $\theta_1 > 1$, т. е. им реальные точки в плоскости xu не соответствуют. Тогда, пользуясь [8], получим для θ в интервале $\theta_3 \leq \theta \leq \theta_2$

$$\theta = \frac{\theta_3(\theta_2 - \theta_4) - \theta_4(\theta_2 - \theta_3) \operatorname{sn}^2 U}{\theta_2 - \theta_4 - (\theta_2 - \theta_3) \operatorname{sn}^2 U} \quad \left(U = \frac{2\sqrt{1-q^2}}{l}(u - u_0) \right) \quad (4.5)$$

Здесь модуль k эллиптической функции Якоби sn и величина l определяются выражениями

$$k^2 = \frac{(\theta_1 - \theta_4)(\theta_2 - \theta_3)}{(\theta_1 - \theta_3)(\theta_2 - \theta_4)}, \quad l^2 = \frac{4}{(\theta_1 - \theta_3)(\theta_2 - \theta_4)} \quad (l > 0) \quad (4.6)$$

Здесь u_0 — значение u при $\theta = \theta_3$.

Период долгопериодических колебаний амплитуды A^* по отношению к времени τ определяется формулой

$$\varepsilon T = \frac{8l}{\beta b k^2 \sqrt{1 - q^2}} K(k) \quad (4.7)$$

Здесь $K(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода в форме Лежандра с модулем k .

В случае В (исключая подслучай В.3.) полином $G(\theta)$ имеет вид

$$G(\theta) = 2(n - 1)(\theta - \theta_1)(\theta - \theta_2)(\theta - \theta_3) \quad (4.8)$$

Здесь при $n > 1$ (подслучай В.4., В.5.) корень $\theta_1 > 1$, а при $n < 1$ (подслучай В.1., В.2) корень $\theta_3 < 0$. Пусть $n > 1$, тогда пользуясь [8], получим для θ в интервале $\theta_3 \leq \theta \leq \theta_2$

$$\theta = \theta_3 + (\theta_2 - \theta_3) \operatorname{sn}^2 U_1 \quad \left(U_1 = \frac{2 \sqrt{2(n-1)}}{l} (u - u_0) \right) \quad (4.9)$$

Модуль k эллиптической функции Якоби sn и величина l определяются выражениями

$$k^2 = \frac{\theta_2 - \theta_3}{\theta_1 - \theta_3}, \quad l^2 = \frac{4}{\theta_1 - \theta_3} \quad (l > 0) \quad (4.10)$$

Здесь u_0 есть значение u при $\theta = \theta_3$. Период долгопериодических колебаний амплитуды A^* по отношению времени τ определяется формулой

$$\varepsilon T = \frac{8l}{\beta b k^2 \sqrt{2(n-1)}} K(k) \quad (4.11)$$

Модуль k и величина l даются выражениями (4.10).

Пусть $n < 1$. Используя [8] для θ в интервале $\theta_2 \leq \theta \leq \theta_1$, получим

$$\theta = \frac{\theta_2(\theta_1 - \theta_3) - \theta_3(\theta_1 - \theta_2) \operatorname{sn}^2 U_2}{\theta_1 - \theta_3 - (\theta_1 - \theta_2) \operatorname{sn}^2 U_2} \quad \left(U_2 = \frac{2 \sqrt{2(1-n)}}{l} (u - u_0) \right) \quad (4.12)$$

где модуль k определяется выражением

$$k^2 = (\theta_1 - \theta_2) / (\theta_1 - \theta_3) \quad (4.13)$$

Величина l согласно (4.10). Период колебаний амплитуды A^* определяется формулой

$$\varepsilon T = \frac{8l}{\beta b k^2 \sqrt{2(1-n)}} K(k) \quad (4.14)$$

В граничном случае $n = 1$ (подслучай В.3.) полином $G(\theta)$ имеет вид

$$G(\theta) = 2c_0(\theta - \theta_1)(\theta - \theta_2)$$

и из (4.1) легко получим для θ в интервале $\theta_2 \leq \theta \leq \theta_1$

$$\theta = \theta_2 + (\theta_1 - \theta_2) \sin^2 [\sqrt{-2c_0} (u - u_0)] \quad (4.15)$$

Здесь всегда $c_0 < 0$ и u_0 есть значение u для $\theta = \theta_2$.

В случае Г имеем $q > 1$, $1 - q^2 < 0$ и теперь возможно представить полином $G(\theta)$ в виде (4.3) и в виде (4.4).

Если $G(\theta)$ имеет вид (4.3) возможны случаи

$$\begin{aligned} (\alpha) \quad & \theta_4 < \theta_3 < 0 < \theta_2 < \theta_1 < 1 \\ (\beta) \quad & 0 < \theta_4 < \theta_3 < 1 < \theta_2 < \theta_1 \\ (\gamma) \quad & 0 < \theta_4 < \theta_3 < \theta_2 < \theta_1 < 1 \end{aligned}$$

В случае (γ) для соответствующего значения c_0 существуют две фазовые траектории, которые пересекают ось x в точках с полярными радиусами $A_i^* = \sqrt{\theta_i}$, $i = 1, 2, 3, 4$. В первых двух случаях для соответствующего значения c_0 существует только одна фазовая траектория, которая пересекает ось x в точках с полярными радиусами $A_i^* = \sqrt{\theta_i}$ ($i = 1, 2$ для случая (α) и $i = 3, 4$ для случая (β)). Для θ в интервале $\theta_2 \leq \theta \leq \theta_1$ имеем

$$\theta = \frac{\theta_2(\theta_1 - \theta_3) - \theta_3(\theta_1 - \theta_2) \operatorname{sn}^2 U_3}{\theta_1 - \theta_3 - (\theta_1 - \theta_2) \operatorname{sn}^2 U_3} \quad \left(U_3 = \frac{2 \sqrt{q^2 - 1}}{l} (u - u_0) \right) \quad (4.16)$$

Модуль k эллиптической функции sn и величина l определяются выражениями

$$k^2 = \frac{(\theta_3 - \theta_4)(\theta_2 - \theta_1)}{(\theta_3 - \theta_1)(\theta_2 - \theta_4)}, \quad l^2 = \frac{4}{(\theta_1 - \theta_3)(\theta_2 - \theta_4)} \quad (l > 0) \quad (4.17)$$

Здесь u_0 есть значение u для $\theta = \theta_2$. Для θ в интервале $\theta_4 \leq \theta \leq \theta_3$ имеем

$$\theta = \frac{\theta_4(\theta_1 - \theta_3) + \theta_1(\theta_3 - \theta_4) \operatorname{sn}^2 U_3}{\theta_1 - \theta_3 + (\theta_3 - \theta_4) \operatorname{sn}^2 U_3} \quad (4.18)$$

Здесь k и l те же, как и в (4.16), а u_0 есть значение u для $\theta = \theta_4$.

Период колебаний амплитуды A^* дается выражением для обоих интервалов.

$$\varepsilon T = \frac{8e}{\beta b k^2 \sqrt{q^2 - 1}} K(k) \quad (4.19)$$

Пусть $G(\theta)$ имеет вид (4.4). Это выполнимо только для фазовых траекторий, охватывающих центр (б) в подслучае Г.3. Тогда положим [8]

$$\operatorname{tg} p_1 = \frac{\theta_1 - \nu}{\omega}, \quad \operatorname{tg} p_2 = \frac{\theta_2 - \nu}{\omega}, \quad \mu = \operatorname{tg} \frac{p_2 - p_1}{2} \operatorname{tg} \frac{p_2 + p_1}{2} \quad (4.20)$$

Для θ в интервале $\theta_2 \leq \theta \leq \theta_1$ имеем

$$\theta = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} - \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \frac{\mu - \operatorname{sn} U_3}{1 - \mu \operatorname{sn} U_3} \quad (4.21)$$

Модуль k эллиптической функции Якоби sn и величина l определяются формулами

$$k^2 = \sin^2 \frac{p_1 - p_2}{2}, \quad l = - \frac{(\cos p_1 \cos p_2)^{1/2}}{\omega} \quad (4.22)$$

Здесь u_0 есть значение u для $\theta = \theta_1$. Период колебаний амплитуды имеет вид

$$\varepsilon T = \frac{16l}{\beta b k^2 \sqrt{q^2 - 1}} K(k) \quad (4.23)$$

Здесь k и l имеют значения (4.22).

После определения A^{*2} функцию от u можно определить и B^2 как функцию от u , используя (2.9).

Надо отметить, что полученное резонансное решение системы (1.5) справедливо и для нерезонансного случая $\beta \neq 1$. Из (2.10) видно, что тогда $n \rightarrow \infty$, а из рассмотренных случаев вытекает, что фазовые траектории являются концентрическими окружностями, т. е. A и B — постоянные.

Поступила 10 XII 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. В и т т А., Г о р е л и к Г. Колебания упругого маятника как пример колебаний двух параметрически связанных линейных систем. Ж. техн. физ., 1933, т. 3, вып. 2—3.
2. S t r u b l e R. A., H e i n b o c k e l J. H. Resonant oscillations of a beam — pendulum system. Trans. ASME, Ser. E. J. Appl. Mech., 1963, vol. 30, No. 2, p. 181—188.
3. H e i n b o c k e l J. H., S t r u b l e R. A. Resonant oscillations of extensible pendulum. Z. angew. Math. and Phys., 1963, vol. 14, No. 3, p. 263—269.
4. S t r u b l e R. A., W a r m b r o d G. K. Free resonant oscillations of a conservative two-degree-of freedom system. J. Franklin Inst., 1964, vol. 278, No. 3, p. 195—209.
5. Ч е ш а н к о в Б. И. Резонансные колебания специального двойного маятника. ПММ, 1969, т. 33, вып. 6.
6. Ч е ш а н к о в Б. И. Резонансные трептения на две связанных махала. Българска акад. на науките, Теоретична и приложна механика, София, 1970, год. I, № 1, с. 81—91.
7. S t r u b l e R. A. Nonlinear differential equations. N. Y., McGraw-Hill, 1962, ch. 8.
8. Б е й т м а н Г., Э р д е й н А. Высшие трансцендентные функции. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье. М., «Наука», 1967.

УДК 531.381

О ДВИЖЕНИИ ГИРОСКОПА КОВАЛЕВСКОЙ В СЛУЧАЕ ДЕЛОНЕ

Ю. А. Архангельский

(Москва)

Общая качественная картина движения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки в предположении Ковалевской в случае Делоне была выяснена в работах [1—4].

В данной работе движение твердого тела исследуется в предположении, что телу сообщена большая угловая скорость вокруг оси, близкой к большой оси эллипсоида инерции. Получаемые при этом явные зависимости углов Эйлера от времени позволяют достаточно просто провести подробный анализ движения гироскопа Ковалевской в случае Делоне.

1. Как известно [1,2,5], уравнения движения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки в предположении Ковалевской

$$\begin{aligned} A = B = 2C, \quad y_0 = z_0 = 0, \quad c = Mgx_0C^{-1} \neq 0 \\ 2p' = qr, \quad 2q' = -pr - c\gamma'', \quad r' = c\gamma' \\ \gamma' = r\gamma' - q\gamma'', \quad \gamma'' = p\gamma'' - r\gamma, \quad \gamma''' = q\gamma - p\gamma' \end{aligned} \quad (1.1)$$

обладают при определенных условиях, как заметил Делоне, пятью алгебраическими интегралами

$$\begin{aligned} 2p^2 + 2q^2 + r^2 = 2c\gamma - 6l', \quad 2p\gamma + 2q\gamma' + r\gamma'' = 2l \\ \gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 = 1, \quad p^2 - q^2 + c\gamma = 0, \quad 2pq + c\gamma' = 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$