УДК 531.31

# КЛАССИФИКАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ ГОЛОНОМНОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С $n$ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

**И. Илиев**

(Пловдив)

Получены некоторые теоремы относительно линейных интегралов механической системы с $n$-степенями свободы и их зависимости от решений уравнений Киллинга и координат обобщенной силы.

Рассмотрим механическую систему с $n$ степенями свободы с кинетической энергией

$$T = {}^1/_2\, g_{\lambda\mu} q^{\lambda\cdot} q^{\mu\cdot}$$

и обобщенными силами $Q_\varkappa$. Здесь и в дальнейшем точка в позиции штриха означает производную по времени $t$. Для существования линейного интеграла системы $\xi_\varkappa q^\varkappa = C$ необходимо и достаточно [1] выполнение условий

$$\nabla_s \xi_\varkappa + \nabla_\varkappa \xi_s = 0 \tag{1}$$

$$\xi^\varkappa Q_\varkappa = 0 \tag{2}$$

Кинетическая энергия определяет пространство $V_n$ с метрикой

$$ds^2 = 2T\,dt^2 = g_{\lambda\mu} dq^\lambda dq^\mu$$

В этом пространстве каждое решение уравнения Киллинга (1) определяет однопараметрическую группу движений $G_1$. Все решения $\xi_a{}^\varkappa$ ($a = 1, 2, 3, \ldots, r$) уравнения (1) определяет группу $G_r$, называемую группой движений в $V_n$. Точка $M(q^i)$ после преобразования группы $G_1$ переходит в $M'(q'^i)$, координаты которой определяются по формуле [2]

$$q'^i = q^i + \tau \xi^i(q) + \frac{\tau^2}{2!}\, \xi^j(q)\, \frac{\partial \xi^i(q)}{\partial q^j} + \cdots \tag{3}$$

Здесь $\tau$ — параметр группы. Совокупность последовательных положений образа $M(q^i)$ определяет траекторию группы. Инфинитизимальное преобразование группы задается формулой

$$q'^i = q^i + \xi^i(q)\,\delta\tau \tag{4}$$

Условие (2) показывает: чтобы $\xi_\varkappa q^{\varkappa\cdot} = c$ был линейным интегралом, необходимо чтобы перемещение по траектории группы $G_1$ было перпендикулярным вектору обобщенной силы с координатами $Q^\varkappa$.

Рассмотрим случай, когда все $Q_\varkappa = 0$. Тогда (2) выполняется тождественно, и каждое решение уравнения Киллинга дает один линейный интеграл системы. Отсюда следует возможность перенесения на этот случай некоторых теорем из монографии Эйзенхарта [2].

Из теоремы 53.1, приведенной в [2], получаем

*Теорема* 1. Механическая система, движущаяся по инерции ($Q_\varkappa = 0$), может иметь не более $^1/_2\, n(n+1)$ линейных интегралов, причем число интегралов равно $^1/_2\, n\,(n-1)$, когда $V_n$ — пространство Римана с постоянной кривизной.

Из теоремы Фубини [2], получаем

*Теорема* 2. Механическая система с $n > 2$ степенями свободы, движущаяся по инерции ($Q_\varkappa = 0$), не может иметь $^1/_2 n\,(n+1) - 1$ линейных интегралов.

Рассмотрим случай, когда хотя бы одно $Q_\varkappa \neq 0$. Пусть $G_r$ — группа движений в $V_n$ и $\xi_a{}^\varkappa$, $a = 1,2,\ldots, r$ — система векторов группы. Символы группы будут

$$X_a f = \xi_a{}^\varkappa \partial f / \partial q^\varkappa$$

Каждый вектор $\xi^\varkappa = c^a \xi_a{}^\varkappa$, где $c^a$ — постоянные, задает однопараметрическую группу движений и также является решением уравнения Киллинга (1). Таким же образом задаются все решения этого уравнения. Условие (2) в этом случае принимает форму

$$c^a \xi_a{}^\varkappa Q_\varkappa = 0 \tag{5}$$

Каждое решение уравнения (1), удовлетворяющее условию (5), дает линейный интеграл системы.

Рассмотрим случай консервативной механической системы. Тогда соотношение (2) принимает вид

$$\xi_a{}^\varkappa \frac{\partial u}{\partial q^\varkappa} = X_a u = 0 \tag{6}$$

Как известно [2], при подходящем выборе параметра группы уравнения траектории имеют вид $dq^i / d\tau = \xi^i$. Из условия (6) получаем

$$\xi_a{}^\varkappa \frac{\partial u}{\partial q^\varkappa} = \frac{du}{d\tau} = 0 \tag{7}$$

Это показывает, что если $\xi_a{}^\varkappa$ — решение уравнения (1), удовлетворяющее условию (2) в виде (7), то траектория однопараметрической группы, определенная $\xi_a{}^\varkappa$, будет линией на поверхности $u = \text{const}$.

Пусть $\xi_a{}^\varkappa$, $m = 1,2,\ldots, p$ — система векторов, удовлетворяющих указанным условиям, которая не может быть больше расширена. Пусть $\xi_a{}^\varkappa p_\varkappa = c_1$ и $\xi_b{}^\varkappa p_\varkappa = c_2$ — два линейных интеграла, в которых положили $p_\varkappa = q_{\varkappa s} \dot{q}^s$. Для символов группы $X_a$ и $X_b$ имеем

$$[X_a, X_b] f = c_{ab}^e X_e f \quad (a, b, e = 1, 2, \ldots, r) \tag{8}$$

Из (8) получаем

$$\xi_a{}^\varkappa \frac{\partial \xi_b{}^s}{\partial q^\varkappa} - \xi_b{}^\varkappa \frac{\partial \xi_a{}^s}{\partial q^\varkappa} = c_{ab}^e \xi_e{}^s \tag{9}$$

где $c_{ab}^e$ — структурные константы $G_r$. Как показано в [2], $c_{ab}^e \xi_e{}^s$ снова является вектором группы $G_r$. Кроме того

$$\left(\xi_a{}^\varkappa \frac{\partial \xi_b{}^s}{\partial q^\varkappa} - \xi_b{}^\varkappa \frac{\partial \xi_a{}^s}{\partial q^\varkappa}\right) u_s = \xi_a{}^\varkappa \frac{\partial \xi_b{}^s u_s}{\partial q^\varkappa} - \xi_b{}^\varkappa \frac{\partial \xi_a{}^s u_s}{\partial q^\varkappa} = 0 \tag{10}$$

$$u_s = \partial u / \partial q^s$$

Таким образом, получили, что если $\xi_a{}^\varkappa p_\varkappa = c_1$ и $\xi_b{}^\varkappa p_\varkappa = c_2$ — линейные интегралы системы, то $c_{ab}^e \xi_e^\varkappa p_\varkappa = c_3$ также линейный интеграл.

Из (8) для функции $u$ можно написать

$$[X_a, X_b] u = c_{ab}^e X_e \ u \qquad (a, b = 1, 2, \ldots, p;\ l = 1, 2, \ldots, r)$$

Из (10) имеем $[X_a, X_b] u = 0$. С другой стороны, $X_m u = 0$ $(m = 1,2,\ldots,p)$, так что $c_{ab}^q X_q u = 0$ $(q = p + 1,\ldots, r)$. Допущение, что хотя бы одно из $c_{ab}^q \neq 0$, привело бы к заключению, что $c^q_{ab}\xi^\varkappa_q p_\varkappa = c$ — линейный интеграл системы, и, следовательно, $c^q_{ab}\xi^\varkappa_q$ может быть представлен в виде линейной комбинации векторов $\xi^\varkappa_m$, $m = 1, 2,\ldots$ $\ldots,p$ с постоянными коэффициентами. Тогда

$$c^q_{ab}\xi_q{}^\varkappa = \theta^m_{ab}\xi_m{}^\varkappa \quad (m = 1, 2, \ldots, p;\ q = p + 1, \ldots, r) \tag{11}$$

где $\theta^m_{ab}$ постоянны. Последнее невозможно, так как $\xi_a{}^\varkappa$ $(a = 1, 2,\ldots, r)$ — независимые векторы с постоянными коэффициентами. Окончательно

$$[X_a, X_b] = c^f_{ab}X_f \quad (a, b = 1, 2, \ldots, r;\ f = 1, 2, \ldots, p) \tag{12}$$

Следовательно, $\xi_1{}^\varkappa$, $\xi_2{}^\varkappa,\ldots,\xi_p{}^\varkappa$ — векторы подгруппы $G_p$ группы $G_r$.

Порядок группы $G_p$ определяет число линейных интегралов консервативной механической системы. Эта группа интранзитивна и $u = \text{const}$ — ее инвариантное многообразие. Порядок $p$ группы не превосходит $^1/_2\ n\ (n - 1)$. О группе $G_p$ и о ее произвольной подгруппе $G_e$ будем говорить, что они индуцированы в $G_r$ функцией $u = \text{const}$. Напротив, всякую интразитивную подгруппу группы $G_r$ в $V_n$ можно рассматривать как индуцированную группу при подходящем выборе функции силы $\Phi$.

Пусть $G_p$ — интранзитивная подгруппа группы $G_r$ с векторами базиса $\xi_1{}^\varkappa,\xi_2{}^\varkappa,\ldots$ $\ldots, \xi_p{}^\varkappa$. Обозначим через $p_0$ общий ранг матрицы $M = \| \xi_f{}^\varkappa \|$ $(f = 1, 2,\ldots, p)$. Пусть $u_1(q) = c_1$, $u_2(q) = c_2,\ldots$, $u_{n-p_0}(q) = c_{n-p_0}$ — инвариантные многообразия группы $G_p$. Рассмотрим произвольную функцию $\Phi\,(u_1,u_2,\ldots,u_{n-p_0})$; $\xi_f{}^\varkappa$ — какой-нибудь из векторов группы $G_p$. Тогда легко видеть, что условие (2) выполняется

$$\frac{\partial\Phi}{\partial u_\rho}\,\frac{\partial u_\rho}{\partial q^s}\,\xi_f{}^s = \frac{\partial\Phi}{\partial u_\rho}\ X_f u_\rho = 0 \tag{13}$$

Так как условия (1) и (2) выполняются для произвольного вектора $\xi_f{}^\varkappa$ из $G_p$, то видно, что группа $G_p$ действительно индуцирована в группе $G_r$ функцией $\Phi = \text{const}$.

Рассмотрим движение точки с массой $m = 1$ в трехмерном евклидовом пространстве. Группа движений в этом случае является шестипараметрической. Ее векторами могут быть

$$\xi_1(1,\ 0,\ 0),\quad \xi_2(0,\ 1,\ 0),\quad \xi_3(0,\ 0,\ 1) \tag{14}$$
$$\xi_4(-y,\ x,\ 0),\quad \xi_5\ (z,\ 0,\ -x),\quad \xi_6\ (0,\ -z,\ y)$$

Векторы $\xi_4$, $\xi_5$, $\xi_6$ определяют интранзитивную группу, называемую группой вращения. Общий ранг матрицы, образованной ими [2], равен двум, и, следовательно, существует одно инвариантное многообразие, а именно $x^2 + y^2 + z^2 = c$. Тогда, если функция силы имеет вид $u(x^2 + y^2 + z^2)$, то механическая система будет иметь линейные интегралы

$$-yx^{\cdot} + xy^{\cdot} = c_1,\quad zx^{\cdot} - xz^{\cdot} = c_2 - zy^{\cdot} + z^{\cdot}y = c_3$$

Все сказанное для консервативной системы можно перенести и на механические системы, для которых

$$Q_\varkappa = \rho\partial u/\partial q^\varkappa \tag{15}$$

Действительно, для таких систем условия (1) и (2) после сокращения последнего равенства на $\rho$ приводятся к соответствующим условиям для системы, у которой $Q_\varkappa = \partial u\ /\ \partial q^\varkappa$. Следовательно, обе системы имеют одинаковые линейные интегралы.

Если $Q_\varkappa$ — координаты обобщенной силы, то как известно [3], для того чтобы $Q_\varkappa$ имели вид (15), необходимо и достаточно условие

$$\mathbf{Q}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{Q} = 0,\qquad \mathbf{Q} = (Q_1,\ Q_2,\ Q_3) \tag{16}$$

Рассмотрим случай, когда $G_e$ — абелева группа. Тогда можем сделать замену переменных [2], так что

$$\xi_\rho^{\varkappa} = \delta_\rho^{\varkappa} \quad (\rho = 1, 2, \ldots, e; \quad \chi = 1, 2, \ldots, n) \tag{17}$$

Запишем условие (1) в форме

$$\xi_\rho^{\varkappa} \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^{\varkappa}} + g_{i\varkappa} \frac{\partial \xi_\rho^{\varkappa}}{\partial q^j} + g_{\varkappa j} \frac{\partial \xi_\rho^{\varkappa}}{\partial q^i} = 0 \tag{18}$$

Поставив $\xi_\rho^{\varkappa}$ из (17), находим

$$\partial g_{ij} / \partial q^\rho = 0 \tag{19}$$

Получили, что $g_{ij} = g_{ij}(q^{e+1}, \ldots, q^n)$. Из условия (2) получим окончательно

$$\partial u / \partial q^\rho = 0, \qquad \partial T / \partial q^\rho = 0 \qquad (\rho = 1, 2, \ldots, e) \tag{20}$$

Условие (20) показывает, что $q^1, q^2, \ldots, q^e$ — циклические координаты [4]. Из результатов работы [1] следует, что если $q^1, q^2, \ldots, q^e$ — циклические координаты, то $\xi_p^{\varkappa} = \delta_p^{\varkappa}$. По теореме 51.6 из [2] последние определяют абелеву группу движений, так как $[X_a, X_b] = 0$. Таким образом, доказывали следующую теорему.

*Теорема* 3. Для возможности соответствия линейных интегралов данной механической системы циклическим координатам необходимо и достаточно, чтобы индуцированная функцией $u = \text{const}$ группа $G_e$, соответствующая этим интегралам, была абелевой.

Пусть в рассмотренном выше примере $u = u(x^2 + y^2)$. Тогда $\xi_3$ и $\xi_4$ определяют подгруппу $G_2$, индуцированную $u = \text{const}$. Так как $[X_3, X_4] = 0$, то эта группа абелева. Линейные интегралы имеют вид

$$z^{\cdot} = c_1 \qquad xy^{\cdot} - yx^{\cdot} = c_2 \tag{21}$$

Согласно теореме (3), можно выбрать новые параметры, для которых $\xi^{\varkappa}{}_a = \delta^{\varkappa}{}_a$ (достаточно сделать замену переменных $x = r\cos\varphi$ и $y = r\sin\varphi$).

*Следствие*. Каждый линейный интеграл при подходящей замене переменных может быть преобразован в циклическую координату.

Это утверждение известно в аналитической механике как теорема Леви, доказанная в [4] при помощи теории контактных преобразований.

Рассмотрим механическую систему с тремя степенями свободы. Выражение для кинетической энергии определяет риманово пространство $V_3$. Пусть оно допускает группу $G_2$. Тогда линейному элементу можно придать вид [2]

$$ds^2 = 2T dt^2 = g_{ij} dq^i dq^j + (dq^3)^2 \qquad (i, j = 1, 2) \tag{22}$$

Пусть $u = u(q^3)$. Тогда группу $G_2$ можно рассматривать как индуцированную функцией $u(q^3) = \text{const}$.

Возможны следующие два случая:

1. $G_2$ — абелева группа. Как следует из теоремы 3, векторами группы могут быть $\xi_1(1, 0,0)$, $\xi_2(0, 1,0)$. В этом случае $g_{\lambda\mu} = g_{\lambda\mu}(q^3)$ и так как $u = u(q^3)$, то имеем циклические координаты $q^1$ и $q^2$.

2. $G_2$ не является абелевой группой. В этом случае выполняются соотношения

$$[X_1, X_2] f = X_1 f$$
$$q_{11} = \alpha, \quad g_{12} = \alpha q^1 + \beta, \quad g_{22} = \alpha (q^1)^2 + \beta q^1 + \gamma \tag{23}$$

где $\alpha, \beta, \gamma$ зависят от $q^3$. Векторами группы в этом случае будут $\xi_1(e^{-q^2}, 0, 0)$, $\xi_2(0, 1, 0)$. Система будет иметь два линейных интеграла

$$p_1 \exp(-q^2) = c, \qquad p_2 = c_2 \tag{24}$$

Видно, что вторая координата — циклическая, а первая — скрытая циклическая. Заметим, что в случае 2 нельзя ввести такую замену переменных, чтобы оба линейных интеграла отвечали циклическим координатам. Как известно, для этого необходимо, чтобы группу можно было преобразовать в абелеву. С другой стороны, при замене переменных каждая группа преобразуется в подобную ей группу [2], а у подобных групп при подходящем подборе базисных векторов будут одинаковые структурные константы. Согласно указанному выше следствию, существует замена координатной системы, преобразующая первую координату в циклическую, но при этом вторая координата перейдет в скрытую циклическую.

Поступила 17 III 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Илиев И. О линейных интегралах голономной механической системы. ПММ, 1970, т. 34, вып. 4.
2. Эйзенхарт Л. П. Непрерывные группы преобразований. М., Изд-во иностр. лит., 1947.
3. Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А. Динамика неголономных систем. М., «Наука», 1967.
4. Уиттекер Е. Т. Аналитическая динамика. М.—Л., Гостехиздат, 1937.

УДК 534.013

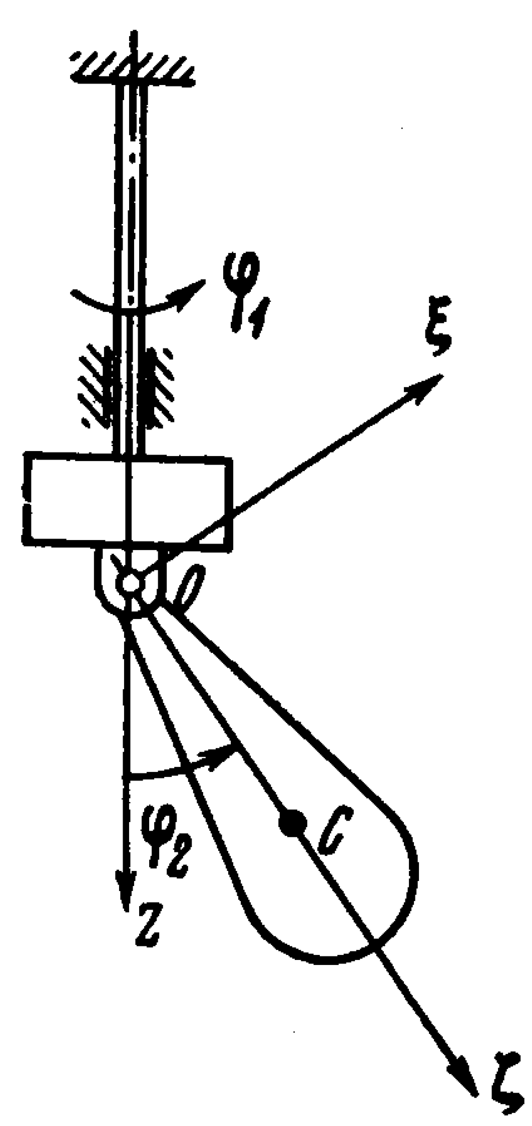
# РЕЗОНАНСНЫЕ КОЛЕБАНИЯ КРУТИЛЬНОГО ФИЗИЧЕСКОГО МАЯТНИКА

Б. И. Чешанков

(София)

Колебания консервативных систем с двумя степенями свободы при внутреннем резонансе рассматривались в [1–6]. Исследуются резонансные колебания одной механической системы и выясняются особенности ее поведения.

1. Рассмотрим систему, показанную на фиг. 1. Она состоит из диска, прикрепленного к тонкому упругому валу, который имеет коэффициент упругости $c$. Вокруг оси $O\eta$, принадлежащей диску и перпендикулярной оси вращения диска (на фигуре эта ось перпендикулярна плоскости чертежа), вращается физический маятник. Будем считать, что $\xi$, $\eta$, $\zeta$ — главные оси инерции и относительно них физический маятник имеет главные моменты инерции $I_\xi$, $I_\eta$, $I_\zeta$. $I$ — момент инерции диска относительно оси вращения.




Фиг. 1

Обозначим центр тяжести физического маятника через $C$, расстояние $OC = e$, $\varphi_1$ — угол вращения диска из положения равновесия, $\varphi_2$ — угол отклонения физического маятника от вертикали, $m$ — масса физического маятника. В этих обозначениях имеем:

для кинетической энергии системы

$$T = {}^1/_2 (I + I_\xi \sin^2 \varphi_2 + I_\varphi \cos^2 \varphi_2)\, \dot\varphi_1^2 + {}^1/_2 I_\eta \dot\varphi_2^2 \qquad (1.1)$$

для потенциальной энергии системы

$$\Pi = {}^1/_2 c\varphi_1^2 - mge \sin\varphi_2 \qquad (1.2)$$

Учитывая (1.1) и (1.2), находим уравнения движения

$$\begin{gathered} I\ddot\varphi_1 + (I_\xi \sin^2 \varphi_2 + I_\zeta \cos^2 \varphi_2)\, \ddot\varphi_1 + (I_\xi - I_\zeta) \sin 2\varphi_2 \dot\varphi_1 \dot\varphi_2 + c\varphi_1 = 0 \\ I_\eta \ddot\varphi_2 - {}^1/_2 (I_\xi - I_\zeta) \sin 2\varphi_2 \dot\varphi_1^2 + mge \sin \varphi_2 = 0 \end{gathered} \qquad (1.3)$$