

ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ТЕМПЕРАТУРНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПРОСТРАНСТВА С ДИСКООБРАЗНОЙ ТРЕЩИНОЙ

В. З. Партон

(Москва)

Получено аналитическое решение осесимметричной квазистационарной температурной задачи механики разрушения для пространства с дискообразной трещиной. Решение строится для произвольного времени действия нагрузки в отличие от [1], где получена асимптотика только для малых времен.

Исследование закономерностей развития трещин в условиях скачкообразного изменения температуры имеет большое значение для создания теоретических основ электросварки, оценки прочности сварных швов и соединений.

1. Рассмотрим осесимметричное напряженное состояние неограниченного пространства с дискообразной трещиной, круговой в плане (фиг. 1). Пусть на части поверхности трещины ($r < a$) в начальный момент времени возникает температура T_0 , которая в дальнейшем остается постоянной.

Задача определения осесимметричного температурного поля сводится к решению уравнения теплопроводности [2]

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) T - \frac{1}{\kappa} \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad (1.1)$$

в области $z > 0$ при следующих граничных условиях:

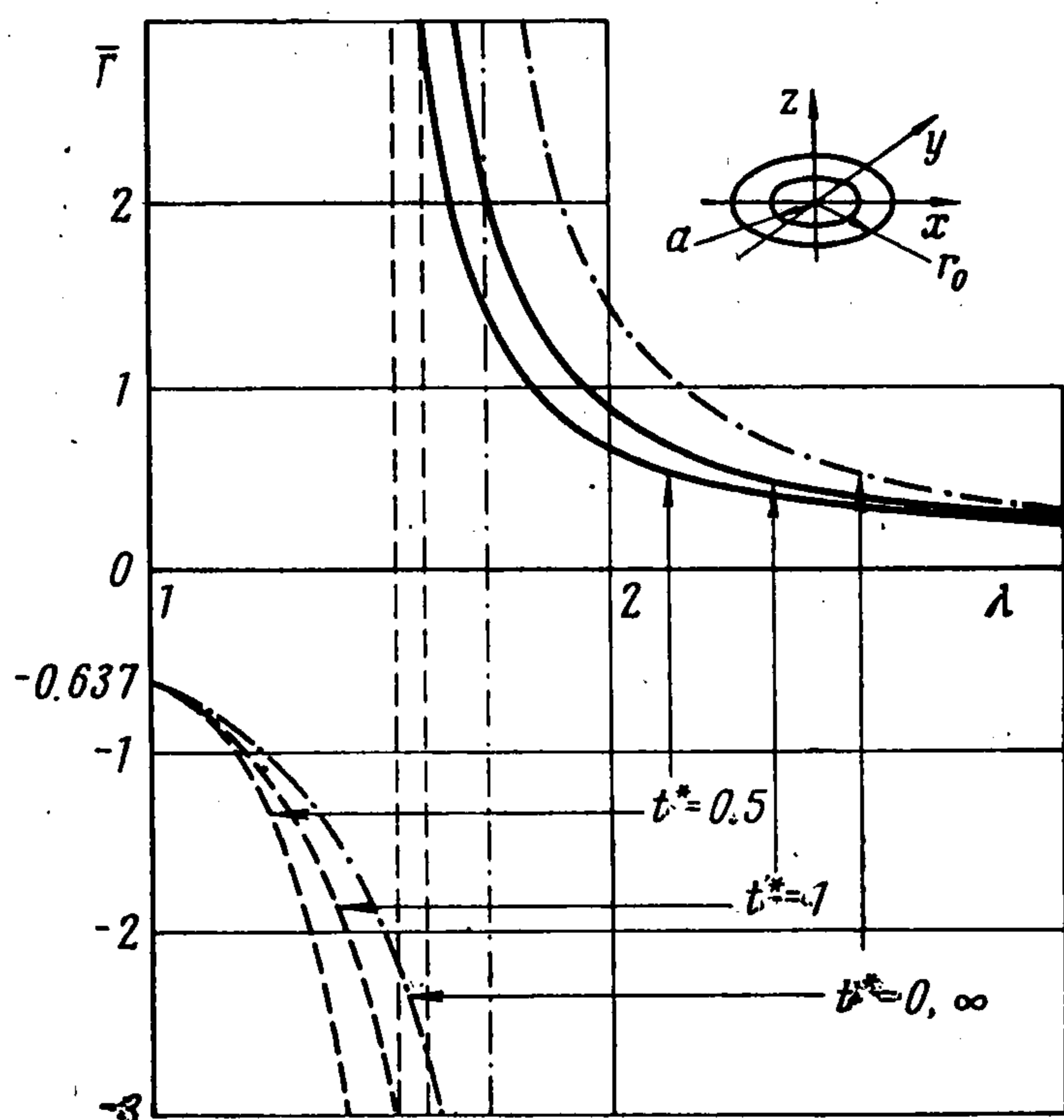
$$T(r, 0, t) = T_0(t), \quad r < a;$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0, \quad r > a \quad (1.2)$$

Перепишем (1.1), (1.2), применив преобразование Лапласа — Карсона по времени

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) T^* - \frac{p}{\kappa} T^* = 0 \quad (1.3)$$

$$T^*(r, 0, p) = T_0^*(p), \quad r < a; \quad \frac{\partial T^*}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0, \quad r > a \quad (1.4)$$



Фиг. 1

Решение (1.3), ограниченное на бесконечности, представим в виде

$$T^*(r, z) = \int_0^{\infty} B(\alpha) \left(\alpha^2 + \frac{p}{\kappa}\right)^{-1/2} \exp\left(-z \sqrt{\alpha^2 - \frac{p}{\kappa}}\right) J_0(\alpha r) d\alpha \quad (1.5)$$

Удовлетворяя условиям (1.4), получим для определения $B(\alpha)$ парные интегральные уравнения

$$\int_0^{\infty} B(\alpha) \left(\alpha^2 + \frac{p}{\kappa}\right)^{-1/2} J_0(\alpha r) d\alpha = T_0^*(p), \quad r \leq a \quad (1.6)$$

$$\int_0^{\infty} B(\alpha) J_0(\alpha r) d\alpha = 0, \quad r > a$$

Решение (1.6) будем искать в виде

$$B(\alpha) = \int_0^a \varphi(\xi) \sin \alpha \xi d\xi + Q_0 \sin \alpha a \quad (1.7)$$

Здесь $\varphi(\xi)$ — искомая функция, а Q_0 — некоторая константа, подлежащая определению.

Принимая во внимание значение интеграла [3]

$$\int_0^{\infty} J_0(\alpha r) \sin \alpha \xi d\alpha = \begin{cases} 0, & \xi \leq r \\ (\xi^2 - r^2)^{-1/2}, & \xi > r \end{cases} \quad (1.8)$$

убеждаемся, что (1.7) тождественно удовлетворяет второму из парных уравнений (1.6).

Подставляя (1.7) в первое уравнение (1.6) и меняя порядок интегрирования, получим,

$$\int_0^a \varphi(\xi) \int_0^{\infty} J_0(\alpha r) \left(\alpha^2 + \frac{p}{\kappa}\right)^{-1/2} \sin \alpha \xi d\alpha d\xi + Q_0 \int_0^{\infty} J_0(\alpha r) \left(\alpha^2 + \frac{p}{\kappa}\right)^{-1/2} \sin \alpha a d\alpha = T_0^*(p), \quad r \leq a \quad (1.9)$$

Продифференцируем (1.9) по r и запишем это выражение в следующем виде

$$\int_0^{\xi} \frac{\xi \varphi(\xi)}{\sqrt{r^2 - \xi^2}} d\xi = \int_0^a \varphi(\xi) \int_0^{\infty} \left[1 - \alpha \left(\alpha^2 + \frac{p}{\kappa}\right)^{-1/2}\right] r J_1(\alpha r) \sin \alpha \xi d\alpha d\xi + Q_0 \int_0^a \left[1 - \alpha \left(\alpha^2 + \frac{p}{\kappa}\right)^{-1/2}\right] J_1(\alpha r) \sin \alpha a d\alpha, \quad r < a \quad (1.10)$$

При выводе последнего равенства использован известный результат [3]

$$\int_0^{\infty} J_1(\alpha r) \sin \alpha \xi d\alpha = \begin{cases} \xi r^{-1} (r^2 - \xi^2)^{-1/2}, & \xi < r \\ 0, & \xi > r \end{cases}$$

Рассматривая (1.10) как уравнение Шлемильха [4], найдем его решение в виде

$$\begin{aligned} \varphi(\xi) = & \frac{2}{\pi} \int_0^a \varphi(\tau) \int_0^\infty \left[1 - \alpha \left(\alpha^2 + \frac{p}{\kappa} \right)^{-1/2} \right] \sin \alpha \tau \sin \alpha \xi \, d\alpha d\tau + \\ & + \frac{2}{\pi} Q_0 \int_0^\infty \left[1 - \alpha \left(\alpha^2 + \frac{p}{\kappa} \right)^{-1/2} \right] \sin \alpha a \sin \alpha \xi \, d\alpha \end{aligned} \quad (1.11)$$

Таким образом, для определения $\varphi(\xi)$ получено интегральное уравнение Фредгольма второго рода с симметричным ядром. Для нахождения приближенного решения этого уравнения используем следующую аппроксимацию:

$$1 - \alpha \left(\alpha^2 + \frac{p}{\kappa} \right)^{-1/2} \approx A_0 \frac{p}{\kappa} \left(\alpha^2 + b^2 \frac{p}{\kappa} \right)^{-1} \quad (1.12)$$

Такого рода идеи, связанные с построением приближенных решений в результате аппроксимации ядер, развивались в работах Койтера [5].

На фиг. 2 представлена зависимость $y(\xi) = 1 - \xi(1 + \xi^2)^{-1/2}$ ($\alpha = \xi \sqrt{p/\kappa}$) (кривая 1) и ее аппроксимация при разных значениях A_0 и b^2 . Кривым 2—4 соответствуют

$$2 - y(\xi) = \frac{0.5}{\xi^2 + 0.68}$$

$$3 - y(\xi) = \frac{0.5}{\xi^2 + 0.6}$$

$$4 - y(\xi) = \frac{0.5}{\xi^2 + 0.5}$$

Для справедливости этой аппроксимации при $p \rightarrow \infty$ принимаем в дальнейшем $A_0 = b^2 = 1/2$ (линия 4).

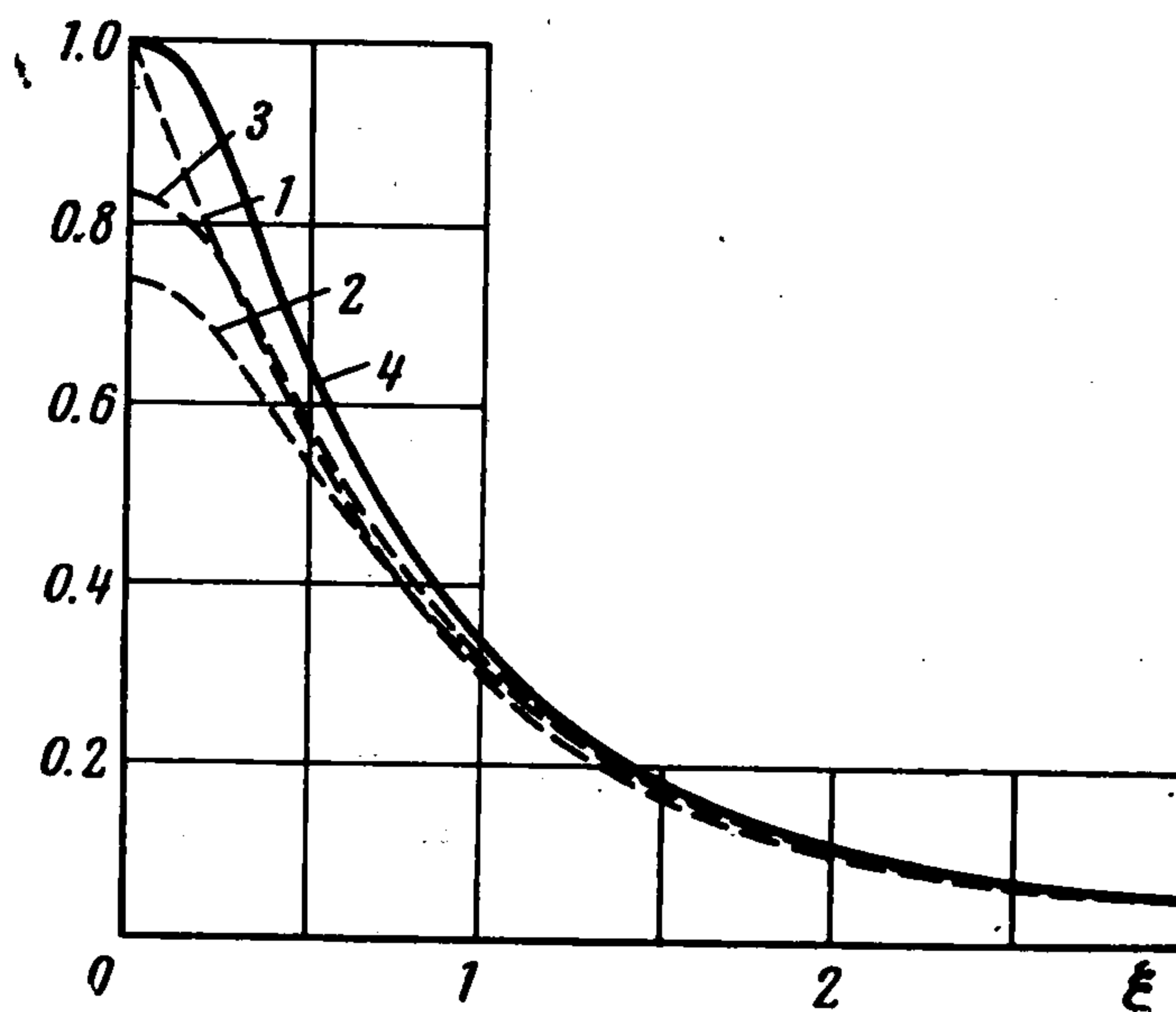
С учетом (1.12) получаем приближенное выражение для ядер уравнения (1.11)

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \left[1 - \alpha \left(\alpha^2 + 2q^2 \right)^{-1/2} \right] \sin \alpha \tau \sin \alpha \xi \, d\alpha & \approx q^2 \int_0^\infty \left(\alpha^2 + q^2 \right)^{-1} \sin \alpha \tau \sin \alpha \xi \, d\alpha = \\ & = \frac{1}{2} \pi q \operatorname{sh}(\omega q) \exp \left(-\frac{1}{\omega} \xi \tau q \right), \quad \left(q = \sqrt{\frac{p}{2\kappa}} \right) \end{aligned} \quad (1.13)$$

$$\omega = \xi, \xi < \tau; \omega = \tau, \xi > \tau$$

Таким образом, уравнение (1.11) принимает вид

$$\varphi(\xi) = q \left[e^{-\xi q} \int_0^\xi \varphi(\tau) \operatorname{sh}(\tau q) \, d\tau + \operatorname{sh}(\xi q) \int_\xi^a \varphi(\tau) e^{-\tau q} \, d\tau + Q_0 e^{-aq} \operatorname{sh}(\xi q) \right], \quad \xi < a \quad (1.14)$$



Фиг. 2

Решение (1.14), удовлетворяющее условию $\varphi(0) = 0$, получим в форме

$$\varphi(\xi) = \frac{Q_0 q^2}{1 + aq} \xi \quad (1.15)$$

Подставляя (1.15) в (1.7), найдем

$$B(\alpha) \approx \frac{Q_0 q^2}{1 + aq} \int_0^a \xi \sin \alpha \xi d\xi + Q_0 \sin \alpha a \quad (1.16)$$

Определим распределение температуры в плоскости по формуле (1.5), используя выражение (1.16)

$$\begin{aligned} T^*(r, 0) &= \int_0^\infty B(\alpha) (\alpha^2 + 2q^2)^{-1/2} J_0(\alpha r) d\alpha \approx \frac{Q_0 q^2}{1 + aq} \int_0^a \xi \int_0^\infty (\alpha^2 + 2q^2)^{-1/2} J_0(\alpha r) \times \\ &\times \sin \alpha \xi d\alpha d\xi + Q_0 \int_0^\infty (\alpha^2 + 2q^2)^{-1/2} J_0(\alpha r) \sin \alpha a d\alpha = \\ &= \frac{Q_0 q^2}{1 + aq} \int_0^a \xi P(r, \xi) d\xi + Q_0 P(r, a) \end{aligned} \quad (1.17)$$

Здесь

$$P(r, \xi) = \int_0^\infty (\alpha^2 + 2q^2)^{-1/2} J_0(\alpha r) \sin \alpha \xi d\alpha \quad (1.18)$$

Для вычисления последнего интеграла запишем выражение

$$\begin{aligned} \frac{dP(r, \xi)}{d\xi} &= \int_0^\infty (\alpha^2 + 2q^2)^{-1/2} \alpha J_0(\alpha r) \cos \alpha \xi d\alpha = \\ &= - \int_0^\infty [1 - \alpha (\alpha^2 + 2q^2)^{-1/2}] J_0(\alpha r) \cos \alpha \xi d\alpha + \lambda (r^2 - \xi^2)^{-1/2} \end{aligned} \quad (1.19)$$

$$\lambda = \begin{cases} 1, & \xi < r \\ 0, & \xi > r \end{cases}$$

Вводя аппроксимацию (1.12) при $A_0 = b^2 = 1/2$ в первое слагаемое (1.19), будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{dP(r, \xi)}{d\xi} &\approx -q^2 \int_0^\infty (\alpha^2 + q^2)^{-1} J_0(\alpha r) \cos \alpha \xi d\alpha + \lambda (r^2 - \xi^2)^{-1/2} = \\ &= -q \frac{\pi}{2} e^{-\xi q} I_0(rq) - \lambda q \left[\operatorname{sh}(\xi q) \int_0^\beta \operatorname{ch}(rq \cos \varphi) d\varphi + \right. \\ &\quad \left. + \operatorname{ch}(\xi q) \int_0^\beta \operatorname{sh}(rq \cos \varphi) d\varphi - \frac{1}{q} (r^2 - \xi^2)^{-1/2} \right] \end{aligned} \quad (1.20)$$

($\beta = \arccos \xi/r$)

Интегрируя последнее равенство по ξ и учитывая, что $P(r, 0) = 0$, получим

$$P(r, \xi) \approx \frac{\pi}{2} J_0(rq) e^{-\xi a} - \lambda \left[\operatorname{ch}(\xi q) \int_0^{\beta} \operatorname{ch}(rq \cos \varphi) d\varphi - \operatorname{sh}(\xi q) \int_0^{\beta} \operatorname{sh}(rq \cos \varphi) d\varphi \right] \quad (1.21)$$

Подставляя (1.21) в (1.17) и выполняя некоторые преобразования, найдем

$$T^*(r, 0) \approx \frac{Q_0}{1+aq} \left[\frac{\pi}{2} \lambda_1 + (1-\lambda_1) \gamma - (1-\lambda_1) a q e^{aq} \int_0^{\beta_1} e^{-r q \cos \varphi} d\varphi \right] \quad (1.22)$$

$$\gamma = \arcsin \frac{a}{r}, \quad \beta_1 = \arccos \frac{a}{r}, \quad \lambda_1 = \begin{cases} 1, & r < a \\ 0, & r > a \end{cases}$$

Из равенств (1.22) следует, что

$$Q_0 = \frac{2}{\pi} (1+aq) T_0^*(p) \quad (1.23)$$

Таким образом, окончательное выражение для $T^*(r, 0, p)$ имеет вид

$$T^*(r, 0, p) = \frac{2}{\pi} T_0^*(p) \left[\frac{\pi}{2} \lambda_1 + (1-\lambda_1) \gamma - (1-\lambda_1) a q e^{aq} \int_0^{\beta_1} e^{-r q \cos \varphi} d\varphi \right] \quad (1.24)$$

Если $T_0^*(p) = T_0 = \text{const}$, то, возвращаясь к оригиналу в (1.24), получим

$$T(r, 0, t) = \frac{2}{\pi} T_0 \left\{ \frac{\pi}{2} \lambda_1 + (1-\lambda_1) \gamma - \frac{(1-\lambda_1)}{\sqrt{\pi t^*}} \int_0^{\beta_1} \exp \left[-\frac{1}{(2t^*)^2} \left(\frac{r}{a} \cos \varphi - 1 \right)^2 \right] d\varphi \right\} \quad (1.25)$$

$$(t^* = a^{-1} \sqrt{2\kappa t})$$

2. Перейдем к определению напряженного состояния неограниченного пространства, находящегося под действием температурного поля (1.25). Известно [2], что в квазистационарном случае упругий потенциал Φ удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2 \Phi = mT, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (2.1)$$

Здесь

$$m = \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha_T$$

α_T — коэффициент линейного расширения.

Смещения и напряжения в пространстве определяются по формулам

$$u^0 = \partial \Phi / \partial r, \quad w^0 = \partial \Phi / \partial z \quad (2.2)$$

$$\sigma_z^0 = -2G \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right), \quad \tau_{rz}^0 = 2G \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial z} \quad (2.3)$$

Из условий симметрии напряженного состояния следует, что $\tau_{rz} = 0$ при $z = 0$, а поэтому решение уравнения (2.1) должно удовлетворять условию

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0 \quad (2.4)$$

Принимая во внимание (1.5) и (2.4), найдем

$$\Phi_0(r, z, p) = -\frac{\kappa m}{p} \int_0^{\infty} B(\alpha) [\alpha^{-1} e^{-\alpha z} - (\alpha^2 + 2q^2)^{-1/2} e^{-z(\alpha^2 + 2q^2)^{-1/2}}] J_0(\alpha r) d\alpha \quad (2.5)$$

При помощи выражения (2.5) определим нормальные напряжения $\sigma_z^{(0)}$ в плоскости $z = 0$

$$\sigma_z^{(0)}(r, 0, p) = -2Gm \frac{\kappa}{p} \int_0^{\infty} \alpha B(\alpha) [1 - \alpha(\alpha^2 + 2q^2)^{-1/2}] J_0(\alpha r) d\alpha \quad (2.6)$$

Используя аппроксимацию (1.12), преобразуем (2.6) к виду

$$\begin{aligned} \sigma_z^{(0)}(r, 0, p) \approx -Gm \int_0^{\infty} \alpha (\alpha^2 + q^2)^{-1} B(\alpha) J_0(\alpha r) d\alpha = \frac{2}{\pi} T_0^*(p) Gm \times \\ \times \left[q^2 \int_0^a \xi \frac{dS(r, \xi)}{d\xi} d\xi + (1 + aq) \frac{dS(r, \xi)}{d\xi} \Big|_{\xi=a} \right] \end{aligned} \quad (2.7)$$

Здесь обозначено

$$S(r, \xi) = \int_0^{\infty} (\alpha^2 + q^2)^{-1} J_0(\alpha r) \cos \alpha \xi d\alpha \quad (2.8)$$

Можно показать, что

$$\begin{aligned} \frac{dS(r, \xi)}{d\xi} = -\frac{\pi}{2} e^{-\xi q} J_0(rq) + \\ + \lambda \left[\operatorname{ch}(\xi q) \int_0^{\beta} \operatorname{ch}(rq \cos \varphi) d\varphi - \operatorname{sh}(\xi q) \int_0^{\beta} \operatorname{sh}(rq \cos \varphi) d\varphi \right] \end{aligned} \quad (2.9)$$

Подставляя (2.9) в (2.7) и производя необходимые преобразования, получим окончательное выражение для нормальных напряжений $\sigma_z^{(0)}(r, 0, p)$

$$\begin{aligned} \sigma_z^{(0)}(r, 0, p) = -\frac{2}{\pi} T_0^*(p) Gm \times \\ \times \left[\frac{\pi}{2} \lambda_1 + (1 - \lambda_1) \gamma - (1 - \lambda_1) a q e^{a q} \int_{a/r}^1 (1 - x^2)^{-1/2} e^{-r q x} dx \right] \end{aligned} \quad (2.10)$$

3. Рассмотрим в плоскости $z = 0$ неограниченного пространства круговую щель радиуса r_0 ($r_0 \geq a$). Построим осесимметричное напряженное состояние, удовлетворяющее следующим условиям:

$$\tau_{rz}^{(1)} = 0, \quad z = 0 \quad (3.1)$$

$$\sigma_z^{(1)} = -\sigma_z^{(0)}, \quad z = 0, \quad r \leq r_0; \quad w^{(1)} = 0, \quad z = 0, \quad r > r_0 \quad (3.2)$$

Компоненты данного напряженного состояния определим при помощи функции Лява по формулам [6]

$$\begin{aligned}\tau_{rz}^{(1)} &= \frac{2G}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial r} \left[(1-\nu) \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \Phi_1 \\ \sigma_z^{(1)} &= \frac{2G}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial z} \left[(2-\nu) \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \Phi_1 \\ w^{(1)} &= \frac{1}{1-2\nu} \left[2(1-\nu) \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \Phi_1\end{aligned}\quad (3.3)$$

Здесь Φ_1 — бигармоническая функция, которую можно представить в виде

$$\Phi_1 = \int_0^\infty [C(\alpha) + D(\alpha)\alpha z] e^{-\alpha z} J_0(\alpha r) d\alpha \quad (3.4)$$

Используя условия (3.1), получаем

$$C(\alpha) = 2\nu D(\alpha) \quad (3.5)$$

Удовлетворяя условиям (3.2), приходим к парным уравнениям

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \alpha D_1(\alpha) J_0(\alpha r) d\alpha &= -\frac{1-2\nu}{4G} \sigma_z^{(0)}(r, 0, p), \quad r \leq r_0 \\ \int_0^\infty D_1(\alpha) J_0'(\alpha r) d\alpha &= 0, \quad r > r_0 \quad (D_1(\alpha) = \alpha^2 D(\alpha))\end{aligned}\quad (3.6)$$

Решение парных уравнений (3.6) известно [7]. Поэтому приведем окончательный результат для определения нормальных напряжений $\sigma_z^{(1)}$ в плоскости $z = 0$

$$\sigma_z^{(1)}(r, 0, p) = \frac{4G}{1-2\nu} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \int_0^\delta \frac{\xi \psi(\xi) d\xi}{\sqrt{r^2 - \xi^2}}, \quad \delta = \begin{cases} r, & r < r_0 \\ r_0, & r > r_0 \end{cases} \quad (3.7)$$

Здесь

$$\psi(\xi) = -\frac{2}{\pi} \frac{1-2\nu}{4G} \int_0^\xi \frac{r \sigma_z^{(0)}(r, 0, p)}{\sqrt{\xi^2 - r^2}} dr \quad (3.8)$$

Для напряжений $\sigma_z^{(1)}$, которые возникают вне круга $r = r_0$, получаем, согласно (3.7), выражение

$$\sigma_z^{(1)}(r, 0, p) = -\frac{4G}{1-2\nu} \frac{\psi(r_0)}{\sqrt{r^2 - r_0^2}} + \frac{4G}{1-2\nu} \int_0^{r_0} \frac{\psi'(\xi) d\xi}{\sqrt{r^2 - \xi^2}}, \quad r > r_0 > a \quad (3.9)$$

Подставив (2.10) в формулу (3.8), найдем

$$\begin{aligned}\psi(\xi) &= -\left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \frac{1-2\nu}{4} T_0^*(p) \left\{ -\frac{\pi}{2} \xi + \lambda^\circ \left[a(1+aq) \int_a^\xi \sqrt{\frac{\xi^2 - \eta^2}{\eta^2 - a^2}} \frac{d\eta}{\eta} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - aq^2 e^q \int_0^\xi \sqrt{\xi^2 - a^2} \int_0^\zeta e^{-\eta q \cos \varphi} \cos \varphi d\varphi d\eta \right] \right\}, \quad \lambda^\circ = \begin{cases} 1, & \xi > a \\ 0, & \xi < a \end{cases} \\ &\quad (\zeta = \arccos a/\eta)\end{aligned}\quad (3.10)$$

Очевидно, решение поставленной задачи может быть представлено в виде суммы двух рассмотренных выше напряженных состояний, так что в предельном случае коэффициент интенсивности напряжений в вершине дискообразной щели равен

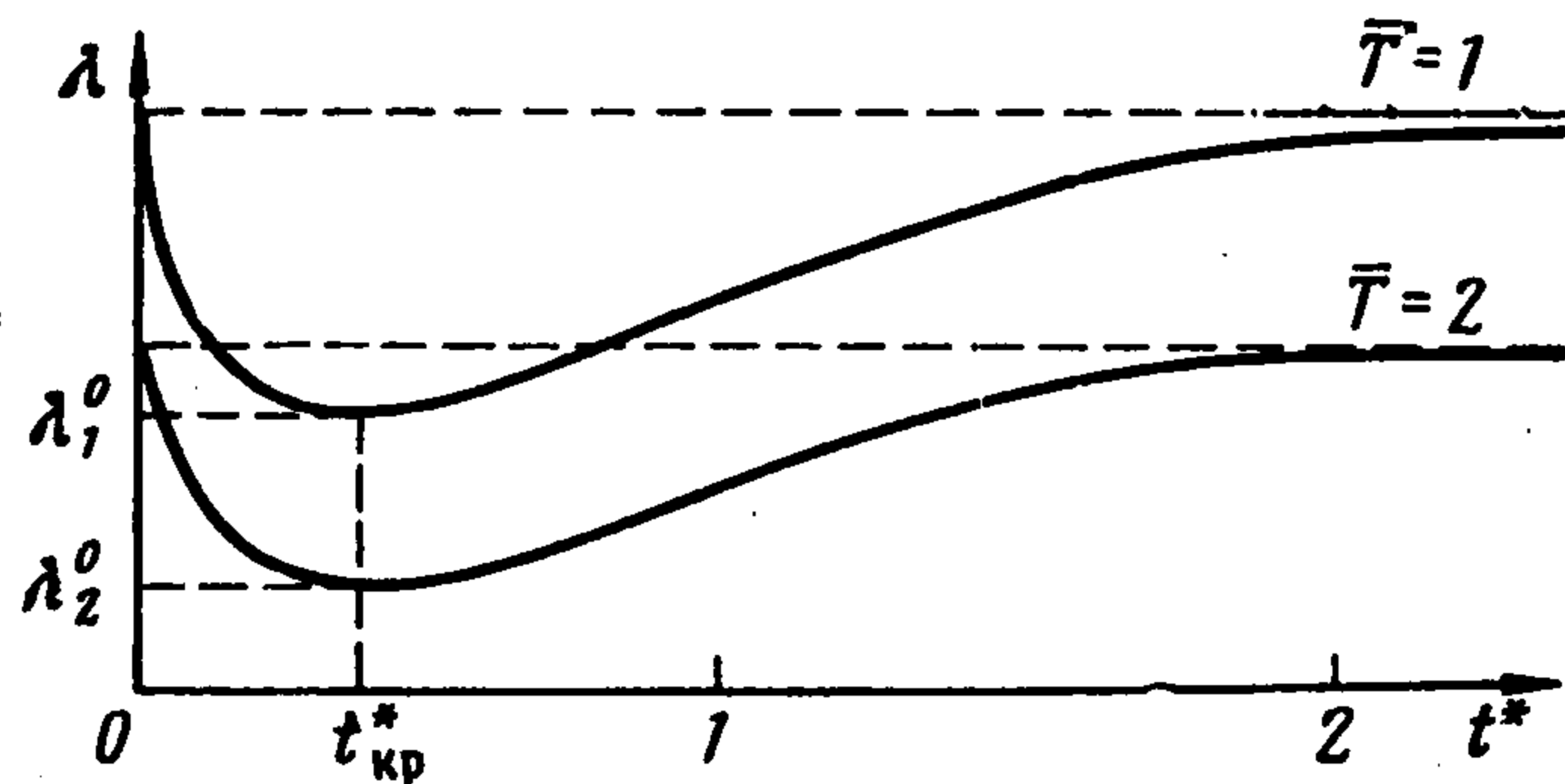
$$K_{IC} = \lim_{r \rightarrow r_0} \sqrt{2\pi(r - r_0)} [\sigma_z^{(1)}(r, 0, p) + \sigma_z^{(0)}(r, 0, p)] = \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \sqrt{\frac{\pi}{r_0}} T_0^*(p) G m \times \\ \times \left[-\frac{\pi}{2} r_0 + a \int_a^{r_0} \sqrt{\frac{r_0^2 - \eta^2}{\eta^2 - a^2}} \frac{d\eta}{\eta} + a q e^{aq} \int_0^{r_0} \frac{\eta d\eta}{\sqrt{r_0^2 - \eta^2}} \int_0^\xi e^{-\eta q \cos \varphi} d\varphi \right] \quad (3.11)$$

Если $T_0^*(p) = T_0 = \text{const}$, то, возвращаясь к оригиналу в (3.11), найдем

$$\frac{1}{\bar{T}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \left[-\frac{\pi}{2} + \int_1^\lambda \sqrt{\frac{\lambda^2 - x^2}{x^2 - 1}} \frac{dx}{x} + \right. \\ \left. + \frac{1}{t^* \sqrt{\pi}} \int_1^\lambda \frac{x dx}{\sqrt{\lambda^2 - x^2}} \int_0^\varepsilon \exp \left[-\frac{(x \cos \varphi - 1)^2}{4(t^*)^2} \right] d\varphi \right] \quad (3.12)$$

$$\lambda = \frac{r_0}{a}, \quad \bar{T} = 4\pi^{-1/2} a^{1/2} m T_0 K_{IC}^{-1} G, \quad \varepsilon = \arccos \frac{1}{x}$$

На фиг. 1 в безразмерных координатах, согласно (3.12) представлена зависимость длины трещины от температуры (соответствующей в этих задачах нагрузке) для разных моментов времени. Оказывается, для каждого значения t^* существует некоторое критическое значение $\lambda = \lambda_i^*$ отношения длины трещины к длине температурного «заполнителя», при котором бесконечные напряжения в конце трещины отсутствуют (вертикальная асимптота соответствует случаю $K_I = 0$). Только в случае $\lambda > \lambda_i^*$ происходит развитие трещины, носящее гриффитсовский характер. Заметим, что кривые этой зависимости при $t^* > 0$ довольно быстро стремятся к общей асимптотической линии ($t^* = 0, \infty$), практически сливаясь с ней уже при $t^* = 10$. При $\lambda \rightarrow \infty$ имеем $a \rightarrow 0$, что соответствует мгновенному точечному приложению температуры $\bar{T} \rightarrow 2\pi^{-1} \lambda^{-1/2}$. При $\lambda < \lambda_i^*$ возникают сжимающие напряжения, и развитие трещины не происходит. На фиг. 3 представлена зависимость предельной длины трещины от времени при $\bar{T} = \text{const}$. Для каждого конкретного значения температуры назначение начальной длины трещины $\lambda_0 < \lambda_i^0$ гарантирует от разрушения для любого диапазона времени эксплуатации деталей с трещиной в условиях такого нагружения.



Фиг. 3

ки сливаясь с ней уже при $t^* = 10$. При $\lambda \rightarrow \infty$ имеем $a \rightarrow 0$, что соответствует мгновенному точечному приложению температуры $\bar{T} \rightarrow 2\pi^{-1} \lambda^{-1/2}$. При $\lambda < \lambda_i^*$ возникают сжимающие напряжения, и развитие трещины не происходит. На фиг. 3 представлена зависимость предельной длины трещины от времени при $\bar{T} = \text{const}$. Для каждого конкретного значения температуры назначение начальной длины трещины $\lambda_0 < \lambda_i^0$ гарантирует от разрушения для любого диапазона времени эксплуатации деталей с трещиной в условиях такого нагружения.

Поступила 19 X 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Кудрявцев Б. А., Партон В. З. Квазистатическая температурная задача для плоскости с разрезом. Проблемы прочности, 1970 № 2.
2. Новацкий В. Вопросы термоупругости. М., Изд-во АН СССР, 1962.
3. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1968.
4. Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа, ч. 1. М., Физматгиз, 1963.
5. Koiter W. T. Approximate solution of Wiener — Hopf type integral equations with applications, parts 1—3. Koninkl. Ned. Akad. Wetenschap. Proc., 1954, B57, № 5, p. 558—579.
6. Ляв А. Математическая теория упругости. М.—Л., ОНТИ, 1955.
7. Снеддон И. Н. Преобразование Фурье. М., Изд-во иностр. лит., 1957.