Прикладная математика и механика. Том 36, 1972

УДК 534.1 + 539.3

О РАСПРОСТРАНЕНИИ УДАРНЫХ ВОЛН В УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ СРЕДАХ

Г. И. Быковцев, Л. Д. Кретова

(Воронеж)

Показано, что в идеальных и упрочняющихся упруго-пластических средах могут существовать нейтральные ударные волны, на которых пластические деформации непрерывны, и волны, на которых пластические деформации претерпевают разрыв. Выписаны условия существования волн второго типа, определены скорости всех указанных волн в идеально-пластических телах при произвольном выпуклом условии текучести и условии Треска и в упрочняющихся телах при кинематическом и изотропном упрочнении. Получены соотношения для разрывов при переходе через волновые поверхности.

При помощи кинематических условий совместности второго порядка исследуется поведение ударных волн в процессе распространения при условиях текучести Мизеса и Треска. Показано, что интенсивность ударных волн изменяется по законам геометрической оптики.

Вопросы распространения ударных волн в упруго-пластической среде рассматривались в работах [1–3]. Были выведены соотношения на ударных волнах в упрочняющихся упруго-пластических телах при предположении, что на ударной волне происходит простое нагружение [1]. Соотношения на ударных волнах в плоских идеально-упруго-пластических телах были получены в работе [2] с применением теории обобщенных функций. Результаты работ [1, 2] не согласуются. Соотношения, предложенные в [1], накладывают меньшее количество ограничений на параметры ударных волн по сравнению в результатами, полученными в [2]. В работе [3] эти соотношения использовались при решении задачи о косом ударе по идеальному упруго-пластическому полупространству.

Ниже получены основные соотношения на ударных волнах в упруго-пластических телах из термодинамических соображений.

1. Рассмотрим идеальный упруго-пластический материал. Полные деформации складываются из упругой и пластической частей

$$e_{ij} = e_{ij}^e + e_{ij}^p = (u_{i,j} + u_{j,i}) / 2 \tag{1.1}$$

Упругие деформации связаны с напряжениями законом Гука

$$\sigma_{ij} = \lambda e_{kk}^e \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}^e \tag{1.2}$$

В пластической области напряжения удовлетворяют условию пластичности

$$f(\sigma_{ij}) = k \tag{1.3}$$

Поверхность текучести (1.3) в пространстве напряжений принимается невогнутой и независящей от первого инварианта тензора σ_{ij}.

Скорости пластических деформаций связаны с напряжениями ассоциированным законом течения

$$\varepsilon_{ij}^p = \psi \partial f / \partial \sigma_{ij} = \psi f_{ij} \tag{1.4}$$

Связь между напряжениями и скоростями деформаций можно представить в виде

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - {}^1/_3\,\sigma_{kk}\delta_{ij} = \partial D / \partial \varepsilon_{ij}{}^p \tag{1.5}$$

где D (ε_{ij}^p) — диссипативная функция.

Соотношения (1.5) и (1.4) эквивалентны [4], а D — однородная функция первой степени относительно ε_{ij}.

Соотношения (1.1) — (1.3) определяют связь между напряженным и деформированным состояниями в упруго-пластическом теле в областях, где напряжения и скорости перемещений непрерывны. Если же эти параметры в некоторой области претерпевают резкие изменения, то при анализе необходимо привлекать термодинамические соотношения.

Следуя идеям, изложенным в работах [5, 6], уравнение притока тепла и уравнение второго закона термодинамики запишем в виде

$$dU = \sigma_{ij} de_{ij} / \rho + dq^e, \qquad dF = dU - d(TS) \tag{1.6}$$
$$TdS = dq^e + dq', \qquad dq' = \tau_{ij} de_{ij}{}^p / \rho \geqslant 0$$

Здесь U — внутренняя энергия, F — свободная энергия, T — абсолютная температура, S — энтропия, ρ — плотность, dq^e — внешний приток тепла, τ_{ij} — компоненты некоторого тензора, характеризующего диссипацию энергии. Для идеально-пластического тела $\tau_{ij} = \sigma_{ij}$.

В дальнейшем деформации принимаются малыми, и используется представление Лагранжа.

Рассмотрим ударную волну в упруго-пластическом материале (под ударной волной понимается поверхность, распространяющаяся в пространстве, на которой перемещения непрерывны, а скорости и напряжения претерпевают разрыв). В дальнейшем верхние индексы «плюс» и «минус» обозначают значения величины перед фронтом и за фронтом волны соответственно.

Выпишем соотношения на поверхностях сильного разрыва, полученные в [5]. На ударной волне должно выполняться условие сохранения массы

$$\rho^+ c^+ = \rho^- c^- \tag{1.7}$$

Так как $\rho = \rho_0\,(1 + e_{kk})$, то вследствие малости деформаций на ударной волне $\rho^+ = \rho^- = \rho_0$. Из соотношений (1.7) следует, что $c^+ = c^- = c^0$, т. е. изменением скорости движения волны при переходе через фронт волновой поверхности пренебрегаем.

Теперь условие сохранения импульса можно представить в виде

$$[\sigma_{ij}]\,\nu_j + \rho c\,[v_i] = 0, \qquad [v_i] = v_i{}^+ - v_i{}^- \tag{1.8}$$

Здесь и в дальнейшем квадратные скобки обозначают разность соответствующих величин с двух сторон от поверхности разрыва, v_i — скорость движения материальных точек, ν_i — единичный вектор нормали к поверхности разрыва.

Закон сохранения энергии, следуя [5], запишем в виде

$$[\sigma_{ij} v_i]\,\nu_j - \rho\,({}^1\!/_2\,[v_i v_i] + [U])\,c - [q_n] = 0 \tag{1.9}$$

где $q_n{}^+$ и $q_n{}^-$ — внешний приток добавочной удельной энергии через поверхность разрыва. Пренебрегая эффектами, связанными с теплообменом, для упруго-пластических тел можно положить $[q_n] = 0$, а также $dq^e = 0$ в соотношениях (1.6).

Величину скачка внутренней энергии подсчитаем из соотношения (1.6), предполагая, что при переходе из состояния e_{ij}^{p+} в состояние e_{ij}^{p-} имеют место соотношения (1.1) — (1.5). Это будет иметь место, если внутри переходного слоя, имитирующего ударную волну, реологическая модель тела не меняется.

Разделяя в (1.6) полную деформацию на упругую и пластическую при $dq^e = 0$, получим

$$\rho dU = \sigma_{ij} de_{ij}^e + \sigma_{ij} de_{ij}^p = {}^1/_2 d\sigma_{ij} e_{ij}^e + \sigma_{ij} de_{ij}^p$$

Отсюда

$$\rho [U] = \frac{1}{2} [\sigma_{ij} e_{ij}^e] + A, \qquad A = \int_{e_1}^{e_2} \sigma_{ij} de_{ij}^p \tag{1.10}$$

$$e_1 = e_{ij}^{p-}, \qquad e_2 = e_{ij}^{p+}$$

Из второго закона термодинамики следует, что $A \leqslant 0$.

Отметим, что скачок внутренней энергии определяется из (1.10), если известен интеграл в правой части (1.10), который зависит от неизвестного пути интегрирования в пространстве пластических деформаций.

Из формул Коши и кинематических и геометрических условий совместности для скачков полных деформаций имеем соотношения

$$[e_{ij}] = [e_{ij}^e] + [e_{ij}^p] = -{}^1/_2 ([v_i] \nu_j + [v_j] \nu_i) c^{-1} \tag{1.11}$$

Из уравнений (1.2) следует

$$[\sigma_{ij}] = \lambda [e_{kk}^e] \delta_{ij} + 2\mu [e_{ij}^e] \tag{1.12}$$

Используя (1.8), (1.10) — (1.12) и соотношение взаимности ($\sigma_{ij}^+ e_{ij}^- = \sigma_{ij}^- e_{ij}^+$) уравнение сохранения энергии (1.9) можно представить в виде

$$-{}^1/_2 (S_{ij}^+ + S_{ij}^-) [e_{ij}^p] + A = 0 \tag{1.13}$$

Из всех возможных путей, соединяющих точки e_{ij}^{p+} и e_{ij}^{p-}, выделим путь, при котором функционал A принимает максимальное значение.

Вариационное уравнение Эйлера для функционала A имеет вид

$$\frac{d}{dz} \frac{\partial D}{\partial \varepsilon_{ij}^p} = 0 \tag{1.14}$$

где z — длина дуги траектории $e_{ij}^p(z)$ в пространстве пластических деформаций.

Из (1.5) и (1.14) следует, что максимальное значение функционала A достигается на пути, при котором $S_{ij} = \text{const}$, и из (1.10) получим

$$\max A = S_{ij} [e_{ij}^p] \tag{1.15}$$

Подсчитаем максимум величины $B = -{}^1/_2 (S_{ij}^+ + S_{ij}^-) [e_{ij}^p]$ при фиксированных значениях $[e_{ij}^p]$ и при условии, что и S_{ij}^+ и S_{ij}^- не превосходят предел текучести

$$f(\sigma_{ij}^+) \leqslant k, \qquad f(\sigma_{ij}^-) \leqslant k$$

Определяя условный экстремум B, получим, что σ_{ij}^+ и σ_{ij}^- должны удовлетворять соотношениям

$$[e_{ij}^p] = \Psi_1 \partial f / \partial \sigma_{ij}^- = \Psi_2 \partial f / d\sigma_{ij}^+ \tag{1.16}$$

где Ψ_1, Ψ_2 — неопределенные множители Лагранжа.

Если условие пластичности (1.3) выпуклое, то из равенств (1.16) следует, что $S_{ij}^+ = S_{ij}^- = S_{ij}$, а

$$\max B = -S_{ij} [e_{ij}^p] \tag{1.17}$$

Так как на пути, при котором функционал A принимает максимальное значение, скорости деформации пропорциональны $[e_{ij}^p]$, то значения S_{ij} в равенстве (1.15) и значения S_{ij}, определенные из (1.16), должны совпадать. Последнее вытекает из эквивалентности соотношений теорий, построенных при помощи пластического потенциала и ассоциированного закона течения [4].

Так как $\max A = -\max B$, равенство (1.13) может иметь место только при условиях, что A и B принимают максимальные значения одновременно или $[e_{ij}^p] = 0$.

Таким образом, если $[q_n] = 0$, $[e_{ij}^p] \neq 0$, то соотношение (1.9) выполняется только при условии, что напряжения по обе стороны от поверхности разрыва удовлетворяют уравнениям (1.16).

Если пластически несжимаемое тело имеет выпуклую поверхность текучести, то из (1.16) следует, что на поверхности разрыва $[S_{ij}] = 0$.

Если условие пластичности изотропного тела имеет участки невогнутости, то соотношения (1.16) могут выполняться также и при условии, что $[e_{ij}^p]$ ортогонален плоскому участку поверхности текучести. Тогда из изотропности тензорной связи (1.16) следует, что направляющие косинусы главных осей тензоров $[e_{ij}^p]$, S_{ij}^+ и S_{ij}^- совпадают; при этом главные значения S_i^+ и S_i^- могут различаться, однако $S_i^+ [e_i^p] = S_i^- [e_i^p]$, так как $[S_i]$ и $[e_i\ ]$ ортогональны.

Из изложенного следует, что в идеальных упруго-пластических телах возможны ударные волны двух видов: нейтральные волны и волны, на которых пластические деформации претерпевают разрыв. В последнем случае на поверхности разрыва девиаторы напряжений непрерывны, если условие пластичности выпуклое. При невогнутых условиях пластичности на поверхности разрыва непрерывны направляющие косинусы главных осей тензора напряжений. Скачки пластических деформаций связаны с напряжениями соотношениями (1.16).

2. Рассмотрим следствия полученных выше результатов для сред, удовлетворяющих условию пластичности Мизеса и Треска.

Если пластические деформации непрерывны на ударной волне, то

$$[e_{ij}^p] = 0, \quad [e_{ij}^e] = [e_{ij}] = -([v_i]\,\nu_j + [v_j]\,\nu_i) / 2c$$

Из соотношений (1.12) при этом вытекает

$$-c\,[\sigma_{ij}] = \lambda\,[v_k]\,\nu_k \delta_{ij} + \mu\,([v_i]\,\nu_j + [v_j]\,\nu_i) \tag{2.1}$$

Соотношения (2.1) следует рассматривать совместно с (1.8). Уравнения (1.8), (2.1), тождественно совпадают с соотношениями (1.8), (1.9) работы [7], поэтому ограничимся приведением окончательного результата.

В упруго-пластическом теле могут существовать безвихревые и эквиволюминальные нейтральные ударные волны.

Безвихревая волна распространяется со скоростью $c = \sqrt{(\lambda + 2\mu) / \rho}$, причем

$$[v_i] = \omega\nu_i, \qquad c\,[\sigma_{ij}] = -\omega(\lambda\delta_{ij} + 2\mu\nu_i\nu_j) \tag{2.2}$$

Здесь ω — величина, характеризующая интенсивность волны. Эквиволюминальная волна распространяется со скоростью $c = \sqrt{\mu / \rho}$, причем

$$[v_i]\,\nu_i = 0, \qquad c\,[\sigma_{ij}] = -\mu([v_i]\,\nu_j + [v_j]\,\nu_i) \tag{2.3}$$

В отличие от упругих ударных волн на величины ω и $[v_i]$ накладывает ограничение условие пластичности. Рассмотрим материалы, удовлетворяющие условию Мизеса

$$S_{ij}S_{ij} = 2K^2 \tag{2.4}$$

Из соотношений (2.2), (2.3) получаем соответственно

$$cS_{ij}^- = cS_{ij}^+ + 2\mu\omega(\nu_i\nu_j - {}^1/_3\,\delta_{ij}) \tag{2.5}$$
$$cS_{ij}^- = cS_{ij}^+ + \mu([v_i]\,\nu_j + [v_j]\,\nu_i)$$

На волне нагрузки S_{ij}^- удовлетворяют условию (2.4), откуда

$$\mu\omega = {}^3/_4 c\left(-S_{ij}^+\nu_i\nu_j \pm \sqrt{S_{ij}^+\nu_i\nu_j + \frac{2}{3}(2k^2 - S_{ij}^+S_{ij}^+)}\right) \tag{2.6}$$
$$2\mu^2[v_i]\,[v_i] + 4\mu c S_{ij}^+[v_i]\,\nu_j - 2k^2 + S_{ij}^+S_{ij}^+ = 0 \tag{2.7}$$

Соотношение (2.7) накладывает ограничения на возможное направление вектора $[v_i]$.

Отметим, что, как было показано в работах [1,8,9], максимальная скорость распространения в упруго-пластических средах волн нагружения равна $\sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$, поэтому возмущения за фронтом безвихревой ударной волны и сам фронт ударной волны не могут оказать влияния на состояние перед фронтом волны, и величины S_{ij}^+ определяются из решения упругой задачи. Тогда по формуле (2.6) определяется интенсивность ударной волны нагрузки, а из (2.2) определяются скорости перемещений и напряжения за фронтом ударной волны.

При рассмотрении волн разгрузки $S_{ij}^-S_{ij}^- \leqslant 2k^2$, откуда

$$c\omega S_{ij}^+\nu_i\nu_j + {}^2/_3\,\mu\omega^2 \leqslant 0, \qquad 2cS_{ij}^+[v_i]\,\nu_j + \mu\,[v_k]\,[v_k] \leqslant 0 \tag{2.8}$$

Из кинематических условий совместности второго порядка следует связь между параметрами ударной волны и скачками скоростей пластических деформаций. Получение этой связи ничем не отличается от соответствующих рассуждений работы [7].

Эта связь для безвихревых и эквиволюминальных волн запишется в виде (соотношения (3.8), (3.11) работы [7])

$$\rho c \frac{\delta\omega}{\delta t} = (\lambda + 2\mu)\,\Omega\omega + \mu\,[\varepsilon_{ij}^{p}]\,\nu_i\nu_j \tag{2.9}$$

$$\frac{\delta\,[v_i]}{\delta t} = c\Omega\,[v_i] + c\,([\varepsilon_{ij}^{p}]\,\nu_j - [\varepsilon_{mn}^{p}]\,\nu_m\nu_n\nu_i) \tag{2.10}$$

где Ω — средняя кривизна волновой поверхности.

Для волн нагрузки $[\varepsilon_{ij}^{p}] = -\varepsilon_{ij}^{p-}$ из ассоциированного закона течения следует, что $\varepsilon_{ij}^{p-} = \psi\partial f / \partial\sigma_{ji}^{-}$, для безвихревых волн нагрузки соотношение (2.9) служит для определения величины ψ, так как ω, S_{ij}^{-} на волновой поверхности известны.

В случае эквиволюминальной волны нагрузки для определения параметров $[v_i]$ и ψ за поверхностью разрыва имеем дифференциальные уравнения (2.10), которые следует рассматривать совместно с ассоциированным законом и соотношением (2.7), при предположении, что S_{ij}^{+} заданы.

На волнах разгрузки $[\varepsilon_{ij}^{p}] = \varepsilon_{ij}^{p+}$ и соотношения (2.9), (2.10) следует рассматривать как дифференциальные уравнения для определения ω и $[v_i]$ соответственно.

Рассмотрим ударные волны, на которых происходит пластическое деформирование.

Предположим, что напряженное состояние в теле соответствует грани условия пластичности Треска

$$\sigma_1 - \sigma_2 = 2k \tag{2.11}$$

Компоненты тензора напряжений σ_{ij} связаны с главными напряжениями соотношениями

$$\sigma_{ij} = \sigma_1 l_i l_j + \sigma_2 m_i m_j + \sigma_3 n_i n_j \tag{2.12}$$

где l_i, m_i, n_i — направляющие косинусы главных направлений тензора σ_{ij}, причем

$$l_i m_i = l_i n_i = m_i n_i = 0, \quad l_i l_i = m_i m_i = n_i n_i = 1 \tag{2.13}$$

Из соотношений (1.8), (1.12), (2.11) и непрерывности направляющих косинусов главных направлений тензоров S_{ij}^{+}, S_{ij}^{-}, $[e_{ij}^{p}]$ следует

$$\begin{gathered} c\,[\sigma_1]\,(\delta_{ij} - n_i n_j) + c\,[\sigma_3]\,n_i n_j = -\lambda\,[v_k]\,\nu_k\delta_{ij} - \\ -\mu\,\{[v_i]\,\nu_j + [v_j]\,\nu_i - \Psi\,(l_i l_j - m_i m_j)\} \\ [\sigma_1]\,(\nu_i - n_i\cos\varphi) + [\sigma_3]\,n_i\cos\varphi + \rho c\,[v_i] = 0, \quad \cos\varphi = n_i\nu_i \end{gathered} \tag{2.14}$$

Выберем систему координат x_i, совпадающую с главными осями $l_1 = m_2 = n_3 = 1$. Уравнения (2.14) преобразуются к виду

$$[v_i]\,\nu_j + [v_j]\,\nu_i = 0 \qquad (i \neq j) \tag{2.15}$$

$$\begin{gathered} c\,[\sigma_i] + \lambda\,[v_k]\,\nu_k + 2\mu\,[v_i]\,\nu_i + (\delta_{i1} - \delta_{i2})\,\mu\Psi = 0 \\ \sigma_i\nu_i = -\rho c\,[v_i] \qquad (\text{по } i \text{ не суммировать}) \end{gathered} \tag{2.16}$$

Для того, чтобы однородная система (2.15) имела нетривиальные решения, ее определитель должен обращаться в нуль, поэтому $\nu_1\nu_2\nu_3 = 0$.

Предположим, что $\nu_1 = 0$, $\nu_2 \neq 0$, $\nu_3 \neq 0$. Из (2.15) следует, что $[v_1] = 0$. Из (2.13), (2.16) получаем

$$\rho c^2 = \frac{3\varkappa + 2}{4\varkappa + 3}\,\mu, \qquad \cos^2\varphi = \nu_3{}^2 = \frac{2\varkappa + 1}{4\varkappa + 3}\,; \qquad \varkappa = \frac{\lambda}{\mu} \tag{2.17}$$

Предположим, что $\nu_3 = 0$. Из (2.13), (2.15), (2.16) следует

$$\rho c^2 = (\varkappa + 1)\,\mu,\ \nu_2 = [v_2] = 0\ (\text{или}\ \nu_1 = [v_1] = 0) \tag{2.18}$$

Нетрудно убедиться, что в остальных случаях пластические деформации непрерывны.

Подставляя (2.17), (2.18) в уравнения (2.14), получим для первой и второй волны соответственно

$$c\,[\sigma_1] = -\,c\,[\sigma_3] = -\,(3\lambda + 2\mu)\,\omega$$

$$[v_i] = \{-2\sqrt{(2\varkappa+1)(4\varkappa+3)}\,n_i + (4\varkappa+3)\,\nu_i\}\,\omega \tag{2.19}$$

$$c\,[\sigma_1] = -\,(\lambda+\mu)\,\omega, \qquad c\,[\sigma_3] = -\,\lambda\omega, \qquad [v_i] = \omega\nu_i \tag{2.20}$$

Рассмотрим изменение величины ω в процессе распространения волн. Из (1.1), (1.2), (1.4) следует

$$[\sigma_{ij,\,t}] = \lambda\,[v_{k,\,k}]\,\delta_{ij} + \mu\,([v_{i,\,j}] + [v_{i,\,j}] - [\Psi f_{ij}]) \tag{2.21}$$

Уравнения движения имеют вид

$$\sigma_{ij,\,j} = \rho v_{i,\,t} \tag{2.22}$$

Продифференцируем по времени и по координатам уравнения (2.11) и (2.13) и составим разности соответствующих уравнений, записанных по обе стороны от волновой поверхности. Используя эти соотношения и условия совместности второго порядка, из (2.21), (2.22) получим

$$\begin{aligned}
&-cM_1(\delta_{ij} - n_in_j) - cM_3n_in_j - c\,([\sigma_1] - [\sigma_3] - \sigma_1^+ + \sigma_3^+)\,(a_in_j + a_jn_i) + \\
&+ 2kc\,(b_im_j + b_jm_i) - \lambda L_k\nu_k\delta_{ij} - \mu\,(L_i\nu_j + L_j\nu_i) + 2\mu\,[\psi]\,(l_il_j - m_im_j) = \\
&= A_{ij} = -\,(\delta_{ij} - n_in_j)\,\delta\,[\delta_1]\,/\,\delta t - n_in_j\delta\,[\sigma_3]/\delta t + ([\sigma_1] - [\sigma_3])\,(n_i^+n_j^+)_{,\,t} + \\
&+ \lambda g^{\alpha\beta}\,[v_k]_{,\,\alpha}\,x_{k\beta}\delta_{ij} + \mu g^{\alpha\beta}\,([v_i]_{,\,\alpha}\,x_{j\beta} + [v_j]_{,\,\alpha}\,x_{i\beta})
\end{aligned} \tag{2.23}$$

$$\begin{aligned}
&M_1(\nu_i - n_i\cos\varphi) + M_3n_i\cos\varphi + ([\sigma_1] - [\sigma_3] - \sigma_1^+ + \\
&+ \sigma_3^+)\,(a_i\cos\varphi + a_k\nu_kn_i) - 2k\,(b_im_k\nu_k + m_ib_k\nu_k) + \rho cL_i = \\
&= B_i = \rho\delta\,[v_i]\,/\,\delta t - g^{\alpha\beta}\,[\sigma_1]_{,\,\alpha}\,(x_{i\beta} - n_ix_{k\beta}n_k) - \\
&- g^{\alpha\beta}\,[\sigma_3]_{,\,\alpha}\,x_{i\beta}n_in_j + ([\sigma_1] - [\sigma_3])\,(n_i^+n_j^+)_{,\,j}
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Здесь

$$M_1 = \left[\frac{d\sigma_1}{dn}\right], \qquad M_3 = \left[\frac{d\sigma_3}{dn}\right], \qquad L_i = \left[\frac{dv_i}{dn}\right]$$

$$a_i = \left[\frac{dn_i}{dn}\right], \qquad b_i = \left[\frac{dm_i}{dn}\right], \qquad a_kn_k = b_km_k = 0$$

Умножим (2.23) на δ_{ij}, n_in_j, а (2.24) — на n_i, ν_i. Исключая из полученных соотношений M_1, M_3, $L_k\nu_k$, L_kn_k, a_kn_k и учитывая (2.17) и (2.18), получим для первой и второй волн соответственно

$$A_{kk}\sin^2\varphi - A_{ij}n_in_j\,(1 + \cos^2\varphi) + 2c\,(B_k\nu_k - 2B_k\nu_k\cos\varphi) = 0$$

$$A_{kk} - A_{ij}n_in_j + 2cB_k\nu_k = 0$$

При помощи (2.19), (2.20) эти уравнения можно представить в виде

$$\delta\omega\,/\,\delta t = c\Omega\omega$$

Следовательно, интенсивность обеих волн изменяется по законам геометрической оптики.

Предположим, что имеет место выпуклое условие пластичности. Из соотношений (1.12) при этом следует

$$c[\sigma_{ij}] = -\lambda[v_k]\nu_k\delta_{ij} - \mu([v_i]\nu_j + [v_j]\nu_i + c[e_{ij}^p]) \qquad (2.25)$$

Так как величины $[S_{ij}] = 0$, то $[\sigma_{ij}] = {}^1/_3[\sigma_{kk}]\delta_{ij}$.

Тогда соотношения (2.25), (1.7) принимают вид

$$^1/_3 c[\sigma_{kk}]\delta_{ij} = -\lambda[v_k]\nu_k\delta_{ij} - \mu([v_i]\nu_j + [v_j]\nu_i + c[e_{ij}^p]) \qquad (2.26)$$

$$^1/_3[\sigma_{kk}]\nu_i + \rho c[v_i] = 0 \qquad (2.27)$$

Исключая из (2.26) величины $[v_i]$ при помощи (2.27), получаем

$$^1/_3\rho c^2[\sigma_{kk}]\delta_{ij} = {}^1/_3\lambda[\sigma_{kk}]\delta_{ij} + {}^2/_3\mu[\sigma_{kk}]\nu_i\nu_j - \mu[e_{ij}^p] \qquad (2.28)$$

Приравнивая в (2.28) индексы i и j, получаем, что скорость распространения волны

$$\rho c^2 = \lambda + {}^2/_3\mu \qquad (2.29)$$

При условии пластичности Мизеса из (2.4) и (1.16) следует, что на поверхности разрыва

$$S_{ij} = 2[\sigma_{kk}](\delta_{ij} - 3\nu_i\nu_j)/9[\psi] \qquad (2.30)$$

Таким образом, ударные волны, на которых имеет место скачок пластических деформаций могут распространяться со скоростью (2.29) только в случае, когда перед фронтом волны имеет место напряженное состояние (2.30).

Полагая, что оси координат x_i выбраны так, что направление ν_i совпадает с остью x_3, а напраления x_1, x_2 лежат на волновой поверхности, из (2.30) получаем

$$S_{11} = S_{22} = -2S_{33} = {}^2/_9[\sigma_{kk}][\psi]^{-1}, \qquad S_{12} = S_{23} = 0$$

Следовательно, рассматриваемая ударная волна может существовать только при условии, что волновая поверхность содержит два главных направления тензора напряжений, а перед фронтом волны имеет место условие полной пластичности $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 \pm 2\sqrt{2}k$. Отметим, что из условия пластичности следует $[\sigma_{kk}] = 3\sqrt{2}k\,[\psi]$.

При помощи кинематических и геометрических условий совместности второго порядка [10] можно получить уравнение, описывающее изменение величины ω, а следовательно, и всех характеристик волны в процессе распространения.

Опуская громоздкие рассуждения, проведенные ранее в работах [7, 9, 10] и проведенные выше для грани Треска, ограничимся приведением только окончательного результата

$$\delta\omega/\delta t = c\Omega\omega \qquad (2.31)$$

Из соотношений (2.31) следует, что интенсивность рассматриваемой волны изменяется по законам геометрической оптики.

3. Рассмотрим упрочняющий упруго-пластический материал, поверхность нагружения которого имеет вид

$$(S_{ij} - \eta e_{ij}^p)(S_{ij} - \eta e_{ij}^p) = 2(k + r\varepsilon)^2 \tag{3.1}$$

$$\varepsilon = \int_0^t \sqrt{\varepsilon_{ij}^p \varepsilon_{ij}^p} dt; \qquad \eta, r = \text{const}$$

Поверхность нагружения (3.1) сочетает кинематическое упрочнение, предложенное в работах [11, 12] и изотропное упрочнение.

Из ассоциированного закона течения следует

$$\varepsilon_{ij}^p = \Psi(S_{ij} - \eta e_{ij}^p) \tag{3.2}$$

Из (3.1) для величины ψ получаем

$$\Psi = \sqrt{\varepsilon_{ij}^p \varepsilon_{ij}^p} / \sqrt{2}(k + r\varepsilon)$$

Тогда из соотношений (3.2) следует

$$S_{ij} = \eta e_{ij}^p + \sqrt{2}\varepsilon_{ij}^p (k + r\varepsilon)(\varepsilon_{ij}^p \varepsilon_{ij}^p)^{-1/2}$$

Диссипативная функция, соответствующая поверхности нагружения (3.1), имеет вид

$$D = \sqrt{2}(k + r\varepsilon)\sqrt{\varepsilon_{ij}^p \varepsilon_{ij}^p} + \eta e_{ij}^p e_{ij}^p \tag{3.3}$$

Рассмотрим равенство (1.13). Учитывая (3.3), для величины из (1.13) имеем

$$A = \int_0^T D dt = \int_0^T \sqrt{2}(k + r\varepsilon)\sqrt{\varepsilon_{ij}^p \varepsilon_{ij}^p}\, dt + \int_0^T \eta e_{ij}^p \varepsilon_{ij}^p\, dt =$$

$$= \sqrt{2}[\varepsilon] - \frac{1}{2} r \sqrt{2}[\varepsilon^2] - \frac{1}{2}\eta [e_{ij}^p e_{ij}^p]$$

Подсчитаем максимум величины $-{}^1/_2(S_{ij}^+ + S_{ij}^-)[e_{ij}^p]$ при условии, что

$$(S_{ij}^\pm - \eta e_{ij}^{p\pm})(S_{ij}^\pm - \eta e_{ij}^{p\pm}) \leqslant 2(k + r\varepsilon^\pm)^2 \tag{3.4}$$

Условный экстремум имеет место при достижении в (3.4) знака равенства и при

$$S_{ij}^\pm = \eta e_{ij}^{p\pm} - \sqrt{2}[e_{ij}^p](k + r\varepsilon^\pm)([e_{ij}^p][e_{ij}^p])^{-1/2} \tag{3.5}$$

Соотношение (1.13) при этом принимает вид

$$\sqrt{2}k\left(\sqrt{[e_{ij}^p][e_{ij}^p]} + [\varepsilon]\right) + {}^1/_2 r \sqrt{2}\{(\varepsilon^+ + \varepsilon^-)[e_{ij}^p][e_{ij}^p] + [\varepsilon^2]\} = 0 \tag{3.6}$$

Величина $[\varepsilon]$ представляет собой длину траектории нагружения в пространстве пластических деформаций и максимальное значение ее

$$[\varepsilon] = -\sqrt{[e_{ij}^p][e_{ij}^p]} \tag{3.7}$$

удовлетворяет уравнению (3.6).

Отсюда следует, что в упрочняющихся упруго-пластических телах, имеющих поверхность нагружения вида (3.1), могут быть ударные волны двух видов. Это нейтральные волны, на которых пластические деформации непрерывны, и волны, на которых имеют место равенства (3.5), причем $[\varepsilon]$ определяется, согласно (3.7).

Учитывая (3.7), из соотношений (3.5) получаем

$$[S_{ij}] = (\eta + \sqrt{2}r)[e_{ij}{}^p] \tag{3.8}$$

Из (3.8), (1.12) следует, что связь между скачками напряжений и деформаций имеет вид

$$[\sigma_{ij}] = \lambda_1 [e_{kk}] \delta_{ij} + 2\mu_1 [e_{ij}] \tag{3.9}$$

$$\lambda_1 = \frac{3\lambda(\eta + \sqrt{2}r) + 2\mu(3\lambda + 2\mu)}{3(\eta + \sqrt{2}r) + 6\mu}, \qquad \mu_1 = \frac{2\mu(\eta + r\sqrt{2})}{\eta + r\sqrt{2} + 2\mu} \tag{3.10}$$

Из соотношений (3.9) следует, что для волн в упрочняющемся упруго-пластическом материале скорости и разрывы такие же, как и в упругом материале, модули упругости которого подсчитываются по формуле (3.10).

Безвихревые волны распространяются со скоростью

$$c_1 = \sqrt{(\lambda_1 + 2\mu_1)/\rho}$$

и на этих волнах выполняются соотношения

$$[v_i] = \omega\nu_i, \quad c_1[\sigma_{ij}] = -\omega(\lambda_1\delta_{ij} + 2\mu_1\nu_i\nu_j) \tag{3.11}$$

Эквиволюминальные волны распространяются со скоростью

$$c_2 = \sqrt{\mu_1/\rho}$$

и на них имеют место соотношения

$$[v_i]\nu_i = 0, \qquad c_2[\sigma_{ij}] = -\mu_1([v_i]\nu_j + [v_j]\nu_i) \tag{3.12}$$

Используя (3.11) и (3.12) из соотношений (3.8), получаем скачки пластических деформаций. На безвихревой и эквиволюминальной волне соответственно получаем

$$[e_{ij}{}^p] = \frac{2\mu_1\omega}{\eta + \sqrt{2}r}\left(\frac{1}{3}\delta_{ij} - \nu_i\nu_j\right), \qquad [e_{ij}{}^p] = -\frac{\mu_1([v_i]\nu_j + [v_j]\nu_i)}{\eta + \sqrt{2}r} \tag{3.13}$$

Из соотношений (3.5) теперь следует, что перед фронтом безвихревых и эквиволюминальных волн должно иметь место напряженное состояние

$$S_{ij} = \eta e_{ij}{}^p \pm (k + r\varepsilon)\sqrt{2}\,(^1/_3\,\delta_{ij} - \nu_i\nu_j) \tag{3.14}$$

$$S_{ij} = \eta e_{ij}{}^p \pm ([v_i]\nu_j + [v_j]\nu_i)(k + r\varepsilon)([v_k][v_k])^{-1/2}$$

Таким образом, так же, как и в идеально-пластической среде, ударные волны в упрочняющемся теле с поверхностью нагружения (3.1) могут иметь место только в некоторых исключительных случаях, когда перед фронтом волны имеет место напряженное состояние (3.14). Интенсивность этих волн изменяется по законам геометрической оптики.

Отметим, что в работе [1] для упрочняющегося тела предполагалось, что при переходе через поверхность разрыва траектория напряжений в пространстве σ_{ij} — радиальная прямая.

Из соотношений (3.8), (3.12), (3.14) следует, что эта гипотеза имеет место только при условии соосности тензоров напряжений и деформаций, т. е. в общем случае для упрочняющихся тел с поверхностью нагружения (3.1) гипотезы работы [1] будут противоречить законам термодинамики.

Авторы благодарят Л. И. Седова за полезные советы и замечания, высказанные при обсуждении результатов работы.

Поступила 24 IV 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Mandel J. Ondes plastiques dans un milieu indefini a'trois dimensions. 1962, J. de mec 1, N 1. Механика, Сб. перев., 1963, № 5.
2. Эстрин М. И. О сильных и слабых разрывах в динамической теории пластичности. В сб.: Вопросы теории пластичности и прочности строительных конструкций. Тр. ЦНИИСК 1961, вып. 4.
3. Bleich H., Nelson J. Plane waves in an elastic-plastic half-space due to combined surface pressure and shear. Trans. ASME, Ser. E. J. Appl. Mech., 1966, vol. 88, No 1.
4. Ивлев Д. Д. Теория идеальной пластичности., М., «Наука», 1966.
5. Седов Л. И. Механика сплошной среды, ч. 2. Изд-во МГУ, 1967.
6. Седов Л. И. Механика сплошной среды, ч. 4. Изд-во МГУ, 1968.
7. Быковцев Г. И., Вервейко Н. Д. О распространении волн в упруго-вязко-пластической среде. Инж. ж. МТТ, 1966, № 4.
8. Быковцев Г. И., Ивлев Д. Д., Мартынова Т. Н. О распространении волн в упруго-пластических телах при кусочно-линейных условиях пластичности. Матер. Всес. симпоз. по распространению упруго-пластических волн в сплошных средах АН АзербССР, Баку, 1966.
9. Быковцев Г. И., Кретова Л. Д. О волнах ускорения в идеальных упруго-пластических телах. Инж. ж. МТТ, 1967, № 1.
10. Томас Т., Пластическое течение и разрушение в твердых телах. М., «Мир», 1964.
11. Прагер В. Влияние деформации на условие пластичности вязко-пластических тел. В сб.: Теория пластичности. М., Изд-во иностр. лит., 1948.
12. Кадашевич Ю. И., Новожилов В. В. Теория пластичности, учитывающая микронапряжения. ПММ, 1958, т. 22, вып. 1.