

МОДЕЛЬНОЕ ОПИСАНИЕ КАТЯЩИХСЯ ВОЛН

О. Б. Новик

(Москва)

Рассматривается уравнение с малым параметром при старшей производной (типа исчезающей вязкости), отличающееся от модельного уравнения турбулентности Бюргера [1] наличием у соответствующего вырожденного уравнения (при вязкости, равной нулю), периодически зависящих только от линейной комбинации координаты и времени решений, удовлетворяющих на разрывах условиям типа законов сохранения и диссипации. Изучается приближение таких решений вырожденного уравнения гладкими, зависящими от этой же комбинации независимых переменных решениями уравнения с исчезающей вязкостью. Указанные решения и предельный переход представляют интерес для математического описания катящихся волн.

При некоторых еще недостаточно изученных условиях, определяемых параметрами русла и характером возмущающего воздействия, в открытых установившихся турбулентных потоках возникают так называемые катящиеся волны (КВ). Они имеют четко выраженную периодичность при значительной концентрации масс жидкости в узких зонах около движущихся с постоянной скоростью волновых фронтов и могут приводить к необходимости уменьшения расхода в канале, а также вызывать резкие пульсирующие напряжения в обтекаемых поверхностях [2,3].

В соответствии с периодичностью и постоянством скорости КВ для их математического описания должны использоваться автомодельные периодические решения $U(y, t)$ уравнений гидродинамики, зависящие лишь от волнового аргумента x

$$U(y, t) = u(x), \quad x = y - ct \quad (0.1)$$

Здесь y — координата вдоль направления движения КВ, c — скорость КВ, t — время, $u(x)$ — профиль КВ.

Ниже будем рассматривать только автомодельные решения типа (0.1). Те из них, которые имеют гладкий или кусочно-гладкий профиль с выполнением на каждом из разрывов соотношений типа известных гидродинамических условий сохранения и диссипации, будем называть КВ-решениями (более точные определения см. ниже в п. 1).

Данная работа посвящена модельному описанию катящихся волн при помощи КВ-решений уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{2} u^2 \right) = d(u - c) + \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}; \quad -\infty < d < \infty, \quad c > 0, \quad \varepsilon \geq 0 \quad (0.2)$$

Это уравнение отличается от известного модельного уравнения турбулентности Бюргера [1] наличием слагаемого $d(u - c)$ (в качестве так называемого члена турбулентного сопротивления такого типа слагаемые включают в динамическое уравнение гидравлической системы уравнений Сен-Венана, широко применяемой для расчета неустановившихся турбулентных потоков [4]).

Уравнение (0.2) без последнего члена, характеризующего влияние вязкости, можно рассматривать как модельное для системы Сен-Венана (так же, как и последняя, оно не обладает гладкими КВ-решениями, но имеет кусочно-гладкие КВ-решения [2]). Включение в уравнение (0.2) диссипативного слагаемого $\varepsilon \partial^2 u / \partial y^2$ освобождает профили КВ-решений от остроугольных вершин и вертикальных фронтов. При этом,

как будет показано ниже, «размазывание» этих фронтов сколь угодно мало, если достаточно мало $\varepsilon > 0$.

Отметим, что если положить в (0.2) $d = 0$, т. е. ограничиться уравнением Бюргерса, то не будет достигнуто приближения вертикальных фронтов КВ-решений уравнения с нулевой «вязкостью» крутыми фронтами гладких КВ-решений уравнения с «исчезающей вязкостью». Это обуславливается тем, что уравнение Бюргерса при нулевой вязкости не имеет ни гладких, ни кусочно-гладких КВ-решений.

Сходящаяся при $\varepsilon \rightarrow 0$ последовательность КВ-решений уравнения (0.2) строится посредством выбора при каждом $\varepsilon > 0$ того из множества его КВ-решений, на котором некоторый функционал принимает то же значение, что и на приближаемом КВ-решении этого уравнения при $\varepsilon = 0$.

В п. 2 в качестве функционала для построения сходящейся последовательности КВ-решений уравнения (0.2) рассматривается функционал типа длины волны. В п. 3 находится главный член асимптотики при $\varepsilon \rightarrow 0$ отклонения выделенного при помощи указанного функционала КВ-решения уравнения (0.2) от КВ-решения этого уравнения при $\varepsilon = 0$ (скорость сходимости по исчезающей вязкости). Это отклонение берется в среднем с показателем $p \geq 1$ по области плоскости yt , которая может быть произвольно большой и содержать разрывы КВ-решения уравнения (0.2) при $\varepsilon = 0$. В п. 4,5 подобные результаты получены и для функционала амплитуды КВ-решения.

Такого типа асимптотические оценки полезны для количественной характеристики диссипативных членов вида $\varepsilon \partial^2 u / \partial y^2$. Кроме того, такие оценки позволяют судить о точности конечно-разностных схем, аппроксимирующих при помощи «вычислительной вязкости» встречающиеся в гидромеханике квазилинейные дифференциальные уравнения первого порядка [6].

Неравенства, оценивающие некоторые нормы разности между неподчиненными требованию автомодельности решениями вырожденного и невырожденного уравнений, доказывались в работах [6-8].

В п. 6 рассматриваемый предельный переход интерпретируется на фазовой плоскости соответствующего (0.2) уравнения профилей. Задача предельного перехода по исчезающей вязкости в классе решений вида (0.1) квазилинейного параболического уравнения ставилась в [9]. В [10] указывалось, что если предельный переход по $\varepsilon \rightarrow 0$ в классе таких решений возможен, то (при определенных свойствах члена, характеризующего турбулентное сопротивление) только к КВ-решениям исходного гиперболического уравнения, имеющим один разрыв на периоде профиля. Ниже показывается, что каждое КВ-решение уравнения (0.2) при $\varepsilon = 0$ с одним разрывом на периоде профиля действительно является пределом при $\varepsilon \rightarrow 0$ соответствующей последовательности КВ-решений уравнения (0.2) при $\varepsilon > 0$.

1. Рассматриваемые решения и способ приближения. КВ-решением (такие решения будем обозначать u_ε) для уравнения

$$\frac{\partial U_\varepsilon(y, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{2} U_\varepsilon^2(y, t) \right) = U_\varepsilon(y, t) - c + \varepsilon \frac{\partial^2 U_\varepsilon(y, t)}{\partial y^2} \quad (\varepsilon, c > 0) \quad (1.1)$$

назовем его классическое решение вида $U_\varepsilon(y, t) = u_\varepsilon(x)$, ограниченное равномерно по $-\infty < x < \infty$.

КВ-решением уравнения

$$\frac{\partial U_0(y, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{2} U_0^2(y, t) \right) = U_0(y, t) - c \quad (1.2)$$

назовем функцию вида $U_0(y, t) = u_0(x)$ с периодическим по x профилем $u_0(x)$, имеющим на периоде не более конечного числа точек разрыва первого рода x_i , причем эта функция при $x \neq x_i$ непрерывно дифференцируе-

ма и удовлетворяет (1.2), а для предельных значений слева и справа от разрывов выполнены соотношения [2]

$$u_0(x_i + 0) + u_0(x_i - 0) = 2c, \quad u_0(x_i + 0) < u_0(x_i - 0) \quad (i = 1, 2, \dots) \quad (1.3)$$

(Такие решения уравнения (1.2) будем обозначать u_0 .)

Соотношения (1.3) на разрывах u_0 представляют собой соответствующие уравнению (1.2) соотношения Гюгонио и диссипации на скачке.

Множество всех u_ε , соответствующих данному $\varepsilon \geq 0$ и принимающих минимальное значение при $x = 0$, обозначим M_ε . Остальные u_ε отличаются от входящих в M_ε лишь несущественным сдвигом аргумента x профиля $u_\varepsilon(x)$, $\varepsilon \geq 0$. Будем рассматривать приближение произвольно фиксированного решения $U_0(y, t) \in M_0$ решениями $U_\varepsilon(y, t) \in M_\varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

Заметим, что в силу теорем об исчезающей вязкости [5] последовательность решений $U_\varepsilon(y, t)$ уравнения (1.1) при условии равенства начальных данных

$$U_\varepsilon(y, t)|_{t=0} = U_0(y, t)|_{t=0} \quad (-\infty < y < \infty, \varepsilon > 0)$$

сходится к $U_0(y, t)$, когда $\varepsilon \rightarrow 0$. Однако элементы построенной при помощи этого условия последовательности не являются функциями только от волнового аргумента $x = y - ct$. Таким образом, в этом случае не получается естественной с физической точки зрения аппроксимации кусочно-гладких КВ-решений уравнения (1.2) гладкими решениями аналогичной структуры уравнения с вязкостью (1.1). Для того чтобы получить желаемую аппроксимацию $u_\varepsilon \rightarrow u_0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, рассмотрим иной способ выбора при каждом $\varepsilon > 0$ элементов сходящейся последовательности u_ε .

В качестве приближения к произвольно фиксированному решению $U_0(y, t) \in M_0$ при каждом $\varepsilon > 0$ выберем решение $U_\varepsilon(y, t) \in M_\varepsilon$, удовлетворяющее условию

$$\Phi(U_\varepsilon(y, t)) = \Phi(U_0(y, t)), \quad \varepsilon > 0 \quad (1.4)$$

Здесь Φ — функционал со следующими свойствами:

$$1^\circ. D(\Phi) \cong \bigcup_{\varepsilon \geq 0} M_\varepsilon.$$

2°. Для каждого решения $U_0(y, t) \in M_0$ существует число $\varepsilon(U_0, \Phi)$ такое, что при $0 < \varepsilon < \varepsilon(U_0, \Phi)$ в M_ε имеется единственное решение $U_\varepsilon(y, t)$, удовлетворяющее (1.4).

3°. Для выделенной условием (1.4) последовательности $U_\varepsilon(y, t)$

$$\|U_0(y, t) - U_\varepsilon(y, t)\|_{L_p(\Omega)} \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0 \quad (p \geq 1, \text{mes } \Omega < \infty) \quad (1.5)$$

Класс функционалов типа Φ не пуст — рассматриваемые в п. 2, 4 соответственно функционалы T и A обладают свойствами 1°–3°. Для каждого из них уточняется характер сходимости в окрестности разрывов u_0 и вне ее. В частности, находится главный член асимптотики при $\varepsilon \rightarrow 0$ левой части (1.5).

Из (1.1) при каждом фиксированном $\varepsilon > 0$ получаем

$$M_\varepsilon = \{U_\varepsilon(y, t, C) \mid U_\varepsilon(y, t, C) = u_\varepsilon(x, C), \quad 1 \leq C < \infty\}$$

Здесь $u_\varepsilon(x, C)$ определяется однопараметрическим с параметром C семейством $(u_\varepsilon(x, C), v_\varepsilon(x, C))$ ограниченных решений автономной системы

$$\varepsilon \frac{dv}{dx} = (1 - v)(c - u), \quad \frac{du}{dx} = v \quad (1.6)$$

Ограниченным решениям этой системы на фазовой плоскости uv соответствуют циклы $L(\varepsilon, C)$, определяемые уравнением

$$\frac{(u - c)^2}{2\varepsilon} - (f(v) + \ln C) = 0 \quad (f(v) = \ln(1 - v) + v, \quad 1 \leq C < \infty) \quad (1.7)$$

Эти циклы симметричны относительно прямой $u = c$ и заполняют полуплоскость $v < 1$. Полуплоскость $v \geq 1$ заполнена неограниченными траекториями, которые ввиду данного определения КВ-решений не рассматриваем.

Из системы (1.6) при $\varepsilon = 0$ получаем, что в M_0 имеются u_0 с любым наперед заданным числом точек разрыва на периоде профиля. Однако предельными для последовательности профилей u_ε при $\varepsilon \rightarrow 0$ могут быть только те профили u_0 , у которых соседние точки разрыва отстоят на длину периода [10]. У таких u_0 предельные значения слева (справа) одинаковы для всех точек разрыва.

Учитывая (1.3), в качестве M_0 имеем следующее однопараметрическое семейство с параметром u^+ ($-\infty < u^+ < c$):

$$M_0 = \{U_0(y, t, u^+) \mid U_0(y, t, u^+) = u_0(x, u^+); u_0(x, u^+) = u^+ + x \text{ при } 0 \leq x < u^- - u^+, u_0(x + u^- - u^+, u^+) = u_0(x, u^+) \text{ при } -\infty < x < \infty\} \\ (u^- = 2c - u^+) \quad (1.8)$$

Зависимость функций из $M_\varepsilon(M_0)$, а также их профилей и производных от параметра C (соответственно, u^+) не всегда будем выписывать.

2. Сходимость при равенстве периодов u_0 и u_ε . Зададим на $\bigcup_{\varepsilon \geq 0} M_\varepsilon$ функционал T , поставив в соответствие каждому решению из M_ε , $\varepsilon \geq 0$ период его профиля $u_\varepsilon(x)$.

Из (1.8) следует

$$T(U_0(y, t, u^+)) \rightarrow 0 \text{ при } u^+ \rightarrow c - 0, \quad T(U_0(y, t, u^+)) \rightarrow \infty \text{ при } u^+ \rightarrow \infty$$

Из (1.6), (1.7) имеем [11]

$$T(U_\varepsilon(y, t, C)) = T^+(\varepsilon, C) + T^-(\varepsilon, C), \quad T^+(\varepsilon, C) = \sqrt{2\varepsilon} \int_0^1 \varphi(z, q_\varepsilon(C)) dz \\ T^-(\varepsilon, C) = \sqrt{2\varepsilon} \int_0^1 \varphi(z, -w_\varepsilon(C)) dz, \quad \varphi(z, q) = q(f(zq) + \ln C)^{-1/2} (1 - zq)^{-1} \\ 1 > q_\varepsilon(C) = \max_{(u, v) \in L(\varepsilon, C)} v \rightarrow 1, \quad 0 < w_\varepsilon(C) = -\min_{(u, v) \in L(\varepsilon, C)} v \rightarrow \infty \\ T(U_\varepsilon(y, t, C)) \rightarrow \infty \text{ при } C \rightarrow \infty, \quad \varepsilon = \text{const} \\ q_\varepsilon(C) \rightarrow 0, \quad T(U_\varepsilon(y, t, C)) \rightarrow 2\sqrt{\varepsilon} \pi \text{ при } C \rightarrow 1 + 0, \quad \varepsilon = \text{const} \\ f(q_\varepsilon(C)) = f(-w_\varepsilon(C)) = -\ln C, \quad \frac{\partial q_\varepsilon(C)}{\partial C} > 0 \text{ при } 1 < C < \infty, \quad \varepsilon > 0 \quad (2.1)$$

Переходя в (1.6) к полярным координатам и используя теорему о периодах [12], получаем, что $T(U_\varepsilon(y, t, C))$ при $\varepsilon = \text{const}$ строго монотонно возрастает по C , $1 < C < \infty$, принимая все промежуточные значения между $2\sqrt{\varepsilon\lambda}$ и ∞ . Таким образом, уравнение (1.4) с функционалом T в качестве Φ имеет единственное решение $U_\varepsilon(y, t) \in M_\varepsilon$ при любой $U_0(y, t) \in M_0$ и любом фиксированном ε , $0 < \varepsilon < \varepsilon(U_0, T) = \pi^{-2}(c - u^+)^2$.

Функционал T обладает и свойством 3° п. 1.

Действительно, фиксируем какое-либо $U_0(y, t) \in M_0$. Через C_ε обозначим значение параметра C той функции из M_ε , которая удовлетворяет (1.4) при $T = \Phi$ и подстановке $U_0(y, t)$ в правую часть. Зависимость C_ε от u^+ не выписываем. Из (1.8), (2.1) следует

$$C_\varepsilon \rightarrow \infty, \quad q_\varepsilon(C_\varepsilon) \rightarrow 1, \quad w_\varepsilon(C_\varepsilon) \rightarrow \infty, \quad T^-(\varepsilon, C_\varepsilon) \rightarrow 0$$

$$\min_{(u, v) \in L(\varepsilon, C_\varepsilon)} u \rightarrow u^+, \quad \max_{(u, v) \in L(\varepsilon, C_\varepsilon)} u \rightarrow u^- \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0 \quad (2.2)$$

Учитывая еще, что функция $u_\varepsilon(x, C) - u_0(x, u^+)$ монотонно убывает по $x \in (0, 1)$ при фиксированных ε, C, u^+ , получаем при условии (1.4) с $\Phi = T$ сходимость u_ε к u_0 , равномерную относительно точек плоскости xt , не принадлежащих объединению произвольно узких полос, примыкающих к линиям разрыва u_0

$$\|U_0(y, t, u^+) - U_\varepsilon(y, t, C_\varepsilon)\|_{C(\Pi_\delta)} \rightarrow 0 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0$$

$$\Pi_\delta = \{(y, t) \mid -\infty < y, t < \infty\} \setminus \bigcup_{-\infty < k < \infty} \{(y, t) \mid kT_0 - \delta < y - ct < kT_0\}$$

$$T_0 = T(U_0(y, t, u^+)) = u^- - u^+, \quad -\infty < u^+ < c, \quad 0 < \delta < T_0 \quad (2.3)$$

Теперь ввиду произвольной малости δ из (2.2) получаем (1.5).

3. Скорость сходимости $u_\varepsilon \rightarrow u_0$ при равенстве периодов. Обозначим

$$q_\varepsilon = q_\varepsilon(C_\varepsilon), \quad w_\varepsilon = w_\varepsilon(C_\varepsilon), \quad \alpha_\varepsilon = 1/2 T^+(\varepsilon, C_\varepsilon), \quad \beta_\varepsilon = 1/2 T^-(\varepsilon, C_\varepsilon)$$

$$J(\varepsilon, w, z, y) = (\varepsilon/2)^{1/2} \int_y^z (f(v) - f(w))^{-1/2} dv$$

Условимся две функции от ε связывать знаком \approx , если их частное стремится к единице при $\varepsilon \rightarrow 0$.

При помощи замен переменных $y = \ln(1 - zq_\varepsilon) \ln^{-1}(1 - q_\varepsilon)$ и $y = \ln(1 + zw_\varepsilon) \ln^{-1}(1 + w_\varepsilon)$ в интегралах $T^+(\varepsilon, C_\varepsilon)$ и $T^-(\varepsilon, C_\varepsilon)$ соответственно преобразуем (1.4) при $\Phi = T$ с учетом (2.2) к виду [11]

$$(2\varepsilon)^{-1/2} T_0 = \sqrt{-\ln(1 - q_\varepsilon)} J^+(q_\varepsilon) + w_\varepsilon^{-1/2} \ln(1 + w_\varepsilon) J^-(w_\varepsilon)$$

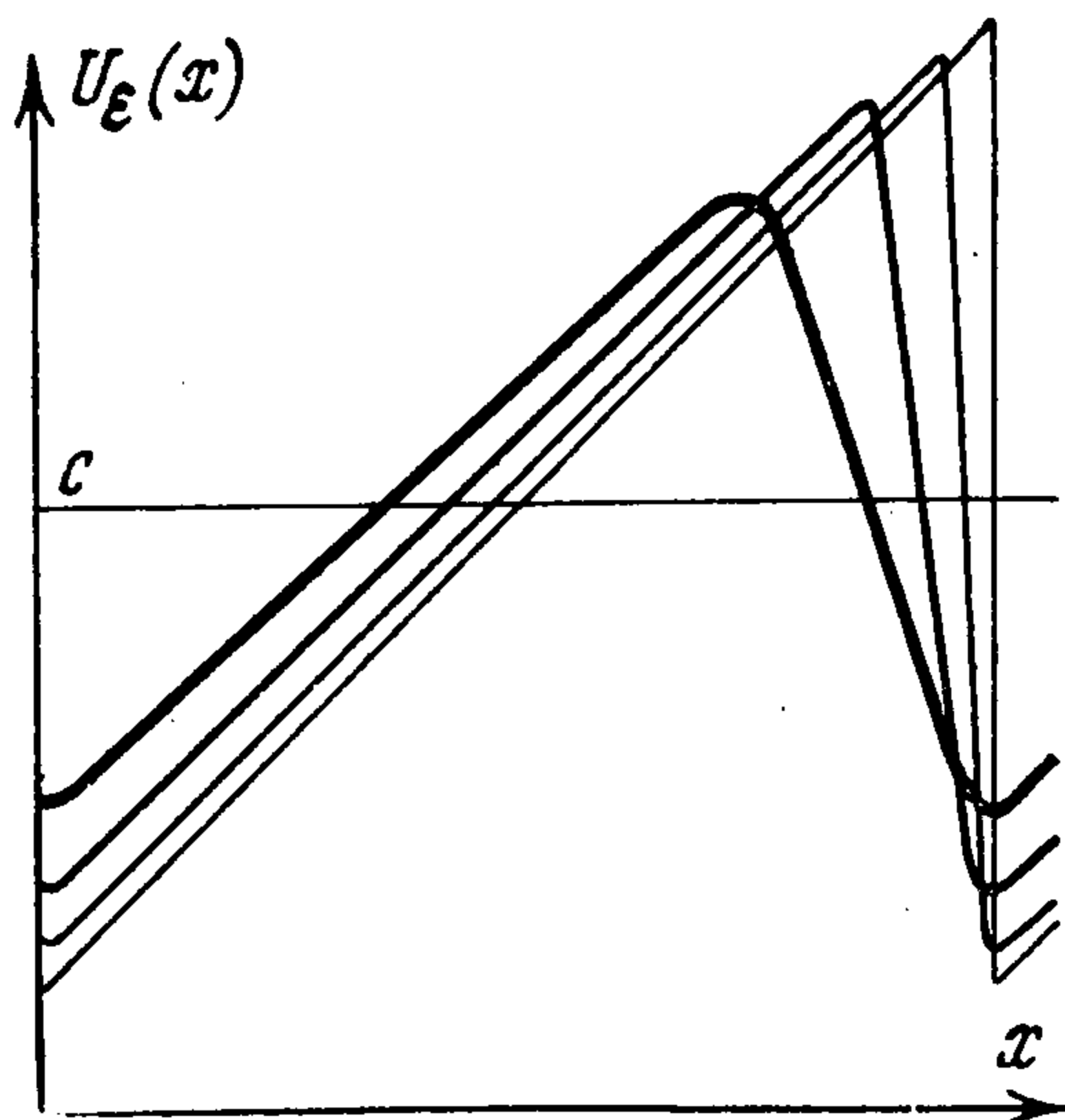
$$J^+(q_\varepsilon) \approx 2, \quad J^-(w_\varepsilon) \approx 1, \quad \frac{dJ^-(w_\varepsilon)}{dw_\varepsilon} = o(w_\varepsilon^{-1}) \quad (3.1)$$

$$\frac{dJ^+(q_\varepsilon)}{dq_\varepsilon} = (1 - q_\varepsilon)^{-1} \ln(1 - q_\varepsilon) o(1)$$

Из (3.1), (2.1) и равенств, полученных их почленным дифференцированием по ε , с учетом (2.2) найдем

$$\begin{aligned} \ln(1 - q_\varepsilon) &\approx -1/8 T_0^2 \varepsilon^{-1}, \quad dw_\varepsilon/d\varepsilon \approx -1/8 T_0^2 \varepsilon^{-2}, \quad w_\varepsilon \approx 1/8 T_0^2 \varepsilon^{-1} \\ \ln(1 + w_\varepsilon) &\approx -\ln \varepsilon, \quad \beta_\varepsilon \approx -2T_0^{-1} \varepsilon \ln \varepsilon, \quad J(\varepsilon, q_\varepsilon, q_\varepsilon, 0) = O(\varepsilon) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Предпоследнее соотношение в (3.2) дает оценку отставания вдоль оси x плоскости xu гребня $(2\alpha_\varepsilon, u_\varepsilon(2\alpha_\varepsilon, C_\varepsilon))$ профиля $u_\varepsilon \in M_\varepsilon$, фиксированного условием (1.4) при $\Phi = T$ по произвольному $u_0 \in M_0$, от гребня (T_0, u^-) профиля этого u_0 . Это отставание показано на фиг. 1. Остроугольный профиль $u_0(x)$ КВ-решения u_0 обозначен тонкой линией, профили $u_\varepsilon(x)$ КВ-решений u_ε обозначены линиями тем более толстыми, чем больше ε .



Фиг. 1

Найдем теперь скорости сходимостей (2.3), (1.5) (см. соответственно (3.4) и (3.9))

Из (1.6) — (1.8), (2.1) имеем

$$\begin{aligned} dx &= \text{sign}(c - u_\varepsilon(x)) \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{1/2} (1 - v)^{-1} (f(v) - f(q_\varepsilon))^{-1/2} dv \\ u_\varepsilon(x) &= c - \int_x^{\alpha_\varepsilon} v_\varepsilon(x) dx, \quad u_0(x) = c - \int_x^{\alpha_\varepsilon} dx - \beta_\varepsilon \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$u_0(x) - u_\varepsilon(x) = \text{sign}(x - \alpha_\varepsilon) J(\varepsilon, q_\varepsilon, q_\varepsilon, v_\varepsilon(x)) - \beta_\varepsilon \quad (0 \leq x \leq 2\alpha_\varepsilon)$$

Отсюда и из последних двух соотношений (3.2) получаем, что $u_0(2\alpha_\varepsilon) - u_\varepsilon(2\alpha_\varepsilon) < 0$ при всех достаточно малых ε . Следовательно, точка пересечения графиков профилей u_ε и u_0 на плоскости xu лежит правее точки максимума $x = 2\alpha_\varepsilon$ профиля u_ε (фиг. 1). Таким образом, ввиду (1.8), (2.1), (2.2), (3.3) получаем главный член асимптотики при $\varepsilon \rightarrow 0$ нормы в (2.3)

$$\|U_0(y, t, u^+) - U_\varepsilon(y, t, C_\varepsilon)\|_{C(\Pi_\delta)} = u_\varepsilon(0, C_\varepsilon) - u^+ \approx 2T_0^{-1} |\varepsilon \ln \varepsilon| \quad (3.4)$$

Это соотношение дает оценку отклонения u_ε от u_0 при условии (1.4) с $\Phi = T$ в равномерной метрике по плоскости xt с исключенными произвольно узкими окрестностями линий разрыва u_0 .

Для определения скорости сходимости $u_\varepsilon \rightarrow u_0$ в областях на плоскости xt , содержащих линии разрыва u_0 , перейдем к оценкам в L_p .

Из (3.2), (3.3) следует

$$\|u_0(x) - u_\varepsilon(x)\|_{L_p(0, 2\alpha_\varepsilon)}^p \approx 2 \|u_0(x) - u_\varepsilon(x)\|_{L_p(0, \alpha_\varepsilon)}^p \approx 2^p T_0^{1-p} |\varepsilon \ln \varepsilon|^p, \quad p \geq 1 \quad (3.5)$$

Из (2.1) и (3.3) при $x = 2\alpha_\varepsilon$ находим

$$\begin{aligned} u_0(x) - u_\varepsilon(x) &= -\beta_\varepsilon + J(\varepsilon, q_\varepsilon, q_\varepsilon, 0) + J(\varepsilon, - \\ &\quad - w_\varepsilon, 0, v_\varepsilon(x)), \quad 2\alpha_\varepsilon \leq x \leq 2\alpha_\varepsilon + \beta_\varepsilon \end{aligned} \quad (3.6)$$

Используя замену переменной (3.3) и интегрируя по частям, имеем с учетом (3.2) [11]

$$\int_{2\alpha_\varepsilon}^{2\alpha_\varepsilon + \beta_\varepsilon} J^p(\varepsilon, -w_\varepsilon, 0, v_\varepsilon(x)) dx \approx \left(\frac{\varepsilon}{2} w_\varepsilon\right)^{1/2(p+1)} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial r_\varepsilon} \left(\frac{1}{p+1} K^{p+1}(r_\varepsilon, 1) - \right. \\ \left. - 2p \int_0^1 K^{p-1}(r_\varepsilon, x) dx \right) r_\varepsilon \approx \Theta(T_0, p) \varepsilon, \quad r_\varepsilon = w_\varepsilon^{-1} \\ K(r, x) = \int_0^x \left(r \ln \frac{r+\eta}{r+1} + 1 - \eta \right)^{-1/2} d\eta \quad (3.7)$$

$$\Theta(T_0, p) = 2^{1-p} T_0^{p-1} \left(1/p + \frac{1}{p+1} F(1, 1, p+2, -1) \right)$$

Здесь $F(a, b, c, z)$ — гипергеометрическая функция Гаусса.

Из (3.2), (3.6), (2.2), (3.7), используя неравенство Минковского, получаем

$$\|u_0(x) - u_\varepsilon(x)\|_{L_p(2\alpha_\varepsilon, 2\alpha_\varepsilon + \beta_\varepsilon)}^p \approx \Theta(T_0, p) \varepsilon \\ \|u_0(x) - u_\varepsilon(x)\|_{L_p(2\alpha_\varepsilon + \beta_\varepsilon, T_0)}^p = \int_{2\alpha_\varepsilon + \beta_\varepsilon}^{T_0} |u^- - u_\varepsilon(0) - J(\varepsilon, -w_\varepsilon, 0, v_\varepsilon(x))|^p dx \approx \\ \approx 2T_0^{p-1} |\varepsilon \ln \varepsilon| \quad (3.8)$$

Тогда из (3.5) следует

$$\|U_0(y, t, u^+) - U_\varepsilon(y, t, C_\varepsilon)\|_{L_p(\Omega)} \approx 2^{1/p} T_0^{(p-1)/p} H^{1/p} |\varepsilon \ln \varepsilon|^{1/p} \\ \Omega = D_{k, H} = \{(y, t) | kT_0 < y - ct < (k+1)T_0, 0 < t < H\} \\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \quad p \geq 1, \quad H > 0 \quad (3.9)$$

С использованием (3.5), (3.8) главный член асимптотики в (3.9) можно вычислить и для областей с более сложной границей. Как следует из (2.2), (3.5), в правой части (3.9) $p = 1$ в последнем сомножителе, если граница Ω не содержит точек разрыва $U_0(y, t)$.

4. Сходимость при равенстве амплитуд u_ε и u_0 . Из (1.6) — (1.8) следует, что уравнение (1.4) при

$$\Phi = A, \quad A(U_\varepsilon(y, t)) = \max_{-\infty < y, t < \infty} U_\varepsilon(y, t) - \min_{-\infty < y, t < \infty} U_\varepsilon(y, t), \quad \varepsilon \geq 0$$

имеет при любой $U_0(y, t, u^+) \in M_0$ единственное решение в M_ε для любого $0 < \varepsilon < \infty$. Таким образом, функционал амплитуды A обладает свойствами 1°, 2° п. 1.

Фиксируем произвольно $U_0(y, t) \in M_0$ и обозначим через C^ε значение параметра C функции $U_\varepsilon(y, t, C) \in M_\varepsilon$, удовлетворяющей (1.4) при $\Phi = A$. (Зависимость C^ε от u^+ не выписываем.) Обозначим (см. (1.8))

$$\alpha^\varepsilon = 1/2 T^+(\varepsilon, C^\varepsilon), \quad \psi(\varepsilon, z, w, \gamma) = (1 - zw)^\gamma [2\text{ef}(zw) + (c - u^+)^2]^{-1/2}$$

$$I(\varepsilon, w, \gamma) = w \int_0^1 \psi(\varepsilon, z, w, \gamma) dz, \quad u^\varepsilon(x) = u_\varepsilon(x, C^\varepsilon), \quad v^\varepsilon(x) = \\ = v_\varepsilon(x, C^\varepsilon), \quad q^\varepsilon = q_\varepsilon(C^\varepsilon), \quad A_0 = A(U_0(y, t, u^+)) \\ U^\varepsilon(y, t) = U_\varepsilon(y, t, C^\varepsilon), \quad a = 1/2 A_0 = c - u^+ = u^- - c$$

Из (1.6), (1.7), (1.4) при $\Phi = A$ имеем

$$\ln C^\varepsilon = 1/8 \varepsilon^{-1} A_0^2, \quad 2\varepsilon f(q^\varepsilon) + a^2 = 0, \quad 2\alpha^\varepsilon - T_0 = 2\varepsilon I(\varepsilon, q^\varepsilon, 0) \rightarrow 0 \quad (4.1) \\ \text{при } \varepsilon \rightarrow 0$$

Учитывая (2.1), получаем равномерную по $x \in [0, T_0]$ сходимость пологой части ($v^\varepsilon(x) \geq 0$) профиля u_ε к пологой части профиля u_0

$$U_0(y, t) - U^\varepsilon(y, t) \|_{C(\Pi^\delta)} = u_0(T_0) - u^\varepsilon(T_0) \rightarrow 0 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0 \quad (4.2) \\ \Pi^\delta = \{(y, t) \mid \delta \leq y - ct \leq T_0 - \delta\}, \quad 0 \leq \delta < 1/2 T_0$$

Пусть $l(\varepsilon, u)$ — время движения изображающей (1.6) точки по $L(\varepsilon, C^\varepsilon)$ от точки $(u^-, 0)$ до точки $(u, -z^\varepsilon(u))$ при $v^\varepsilon(x) \leq 0$, где $v = -z^\varepsilon(u)$ задает на фазовой плоскости uv ординату v цикла $L(\varepsilon, C^\varepsilon)$ как функцию абсциссы u при $v \leq 0, u^+ \leq u \leq u^-$.

Для установления у функционала A свойства 3° п. 1 достаточно ввиду (4.2) показать

$$\|2\alpha^\varepsilon + l(\varepsilon, u) - T_0\|_{C[u^+, u^-]} \approx 4A_0^{-1} |\varepsilon \ln \varepsilon| \quad (4.3)$$

Из (1.6), (1.7) имеем

$$l(\varepsilon, u) = - \int_{u^-}^u (z^\varepsilon(u))^{-1} du, \quad u^+ \leq u \leq u^-$$

$$du = -\varepsilon v \psi(\varepsilon, 1, v, -1) dv, \quad z^\varepsilon(c + \sqrt{2\varepsilon f(v) + a^2}) = -v \quad \text{при } v \leq 0 \quad (4.4) \\ c \leq u \leq c + a$$

$$\varepsilon = \frac{1/8 A_0^2 - 1/2 (u - c)^2}{z^\varepsilon(u) - \ln(1 + z^\varepsilon(u))}, \quad \varepsilon z^\varepsilon(u) \rightarrow \frac{1}{8} A_0^2 - \frac{1}{2} (u - c)^2 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0$$

Из (4.4) получаем [11]

$$l(\varepsilon, u) = \left(\frac{1}{2} \varepsilon z^\varepsilon(u)\right)^{1/2} \int_0^1 (1 + x z^\varepsilon(u))^{-1} \left\{ \frac{1}{z^\varepsilon(u)} [f(-x z^\varepsilon(u)) - f(-z^\varepsilon(u))] + \right. \\ \left. + \frac{(u - c)^2}{2\varepsilon z^\varepsilon(u)} \right\}^{1/2} dx \approx 2A_0^{-1} |\varepsilon \ln \varepsilon|, \quad c \leq u < u^-$$

В силу симметрии траекторий системы (1.6) имеем

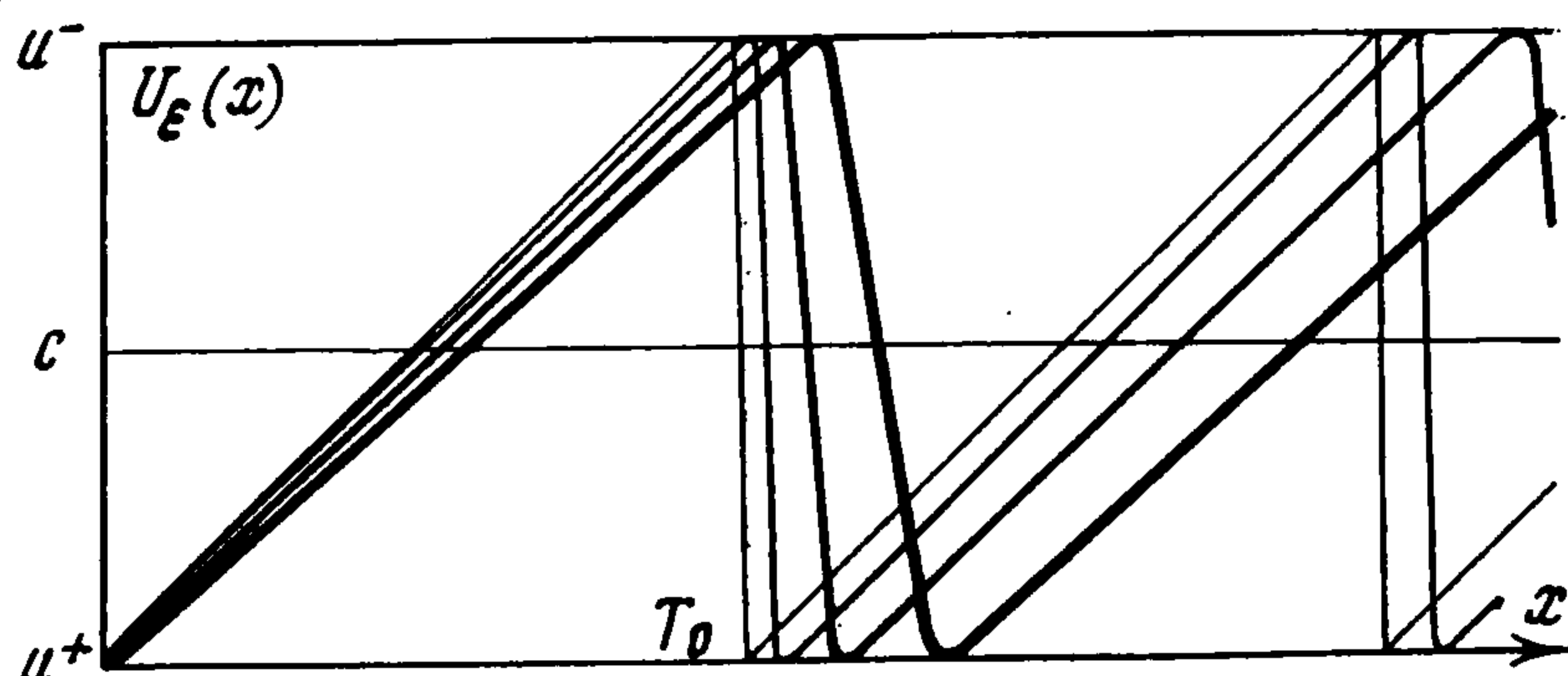
$$l(\varepsilon, u) = 2l(\varepsilon, c) - l(\varepsilon, 2c - u), \quad u^+ \leq u \leq c \\ l(\varepsilon, u) \approx 4A_0^{-1} |\varepsilon \ln \varepsilon|, \quad u = u^+; \quad l(\varepsilon, u) \approx 2A_0^{-1} |\varepsilon \ln \varepsilon|, \quad u^+ < u < u^- \quad (4.5)$$

Ввиду соотношений

$$I(\varepsilon, v^\varepsilon(x), 0) \approx I(\varepsilon, q^\varepsilon, 0) \approx 2A_0^{-1}, \quad x \in (0, T_0) \quad (4.6)$$

из (4.1), (4.5) получим (4.3).

Обусловливаемый соотношениями (4.2), (4.3) характер сходимости при $\varepsilon \rightarrow 0$ КВ-решения u_ε с гладким профилем $u_\varepsilon(x)$ к КВ-решению u_0 с остроугольным профилем $u_0(x)$ показан на фиг. 2 (профиль $u_\varepsilon(x)$ с большим ε обозначается более толстой линией).



Фиг. 2

5. **Скорость сходимости при равенстве амплитуд.** Соотношения (4.3), (4.5) характеризуют скорость сходимости ниспадающей части ($v^\varepsilon(x) \leq 0$) профиля u_ε к вертикальному фронту u_0 в метрике, равномерной относительно ординаты u переднего фронта $\{(x, u) | x = T_0, u^+ \leq u \leq u^-\}$ приближаемого u_0 . Последнее соотношение в (4.4) характеризует скорость стремления наклона ниспадающей части профиля u_ε к наклону вертикального фронта u_0 (фиг. 2). Найдем скорость сходимости наклонной части ($v^\varepsilon(x) \geq 0$) профиля u_ε к наклонной части профиля u_0 . Из (1.6), (1.7) имеем при любом $\varepsilon > 0$

$$1/\varepsilon (u_0(x) - u_\varepsilon(x)) = \begin{cases} 0, & x = 0. \\ I(\varepsilon, v^\varepsilon(x), 0), & x \in (0, \alpha^\varepsilon) \\ 2I(\varepsilon, q^\varepsilon, 0) - I(\varepsilon, v^\varepsilon(x), 0), & x \in [\alpha^\varepsilon, T_0] \end{cases} \quad (5.1)$$

Полагая в (1.7) $u = u^\varepsilon(T_0)$, $v = v^\varepsilon(T_0)$, $C = C^\varepsilon$ и в (5.1) $x = T_0$, исключим с учетом (1.8) $u^\varepsilon(T_0) - u^-$ из получившейся системы двух уравнений. Переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ и используя (4.2), (4.4), (4.6), получим

$$v^\varepsilon(T_0) \approx 1 - e^{-2}, \quad u_0(x) - u^\varepsilon(x) \approx 2A_0^{-1}\varepsilon, \quad x \in (0, T_0) \quad (5.2)$$

$$u_0(T_0) - u^\varepsilon(T_0) = \|U_0(y, t) - U_\varepsilon(y, t)\|_{C(\Pi^*)} \approx 2(1 + e^{-2})A_0^{-1}\varepsilon$$

Выписывая аналогичные (5.1) соотношения при $x > T_0$, найдем скорость сходимости $u_\varepsilon \rightarrow u_0$ в среднем по любой области $D_{k,H}$ при $\Phi = A$ (см. (3.9))

$$\|U_0(y, t) - U^\varepsilon(y, t)\|_{L_p(D_{k,H})} \approx H^{1/p} A_0^{(p-1)/p} \rho(p, k) |\varepsilon \ln \varepsilon|^{1/p} \\ \rho(p, k) = O(k^{1/p}) \quad \text{при } k \rightarrow \infty, p \geq 1. \quad (5.3)$$

Заметим, что при выборе в качестве Φ (см. п. 1) функционала периода равномерной относительно yt сходимости $u_\varepsilon \rightarrow u_0$ нет уже и в полосе шириной в период u_0 (см. (2.3), (5.2)). Однако при $\Phi = T$ с расширением области аппроксимации не происходит замедления сходимости, (5.3).

Аналогично (5.1), (5.2) можно найти скорость сходимости производных u_ε к производным u_0

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial U_0(y, t)}{\partial y} - \frac{\partial U^\varepsilon(y, t)}{\partial y} \right\|_{L_p(D_0, H)} &= \frac{1}{c} \left\| \frac{\partial U_0(y, t)}{\partial t} - \frac{\partial U^\varepsilon(y, t)}{\partial t} \right\|_{L_p(D_0, H)} \approx \\ &\approx \{ \varepsilon H [2I(\varepsilon, q^\varepsilon, p-1) - I(\varepsilon, v^\varepsilon(T_0), p-1)] \} \approx \left[\frac{2}{p} H A_0^{-1} (1 + e^{-2p}) \right]^{1/p} \varepsilon^{1/p} \end{aligned}$$

Из (1.7), (2.1), (5.2), учитывая, что $2\alpha^\varepsilon > T_0$ (см. (4.1)), получим

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial U_0(y, t)}{\partial y} - \frac{\partial U^\varepsilon(y, t)}{\partial y} \right\|_{C(\Pi^\delta)} &= \frac{1}{c} \left\| \frac{\partial U_0(y, t)}{\partial t} - \frac{\partial U^\varepsilon(y, t)}{\partial t} \right\|_{C(\Pi^\delta)} = \\ &= v_0(\delta) - v^\varepsilon(\delta) \approx \exp \left\{ (A_0 - 2\delta) A_0^{-1} - \frac{\delta(A_0 - \delta)}{2\varepsilon} \right\}, \quad 0 < \delta < \frac{1}{2}(u^- - u^+) \end{aligned}$$

В силу периодичности рассматриваемых решений из сказанного следует, что для каждого $U_0(y, t) \in M_0$, любой ограниченной области Ω плоскости yt и любого $\sigma > 0$ можно (как в случае условия (1.4) с $\Phi = T$, так и в случае условия (1.4) с $\Phi = A$) указать такое значение вязкости $\varepsilon(\sigma, \Omega, U_0)$, что при $0 < \varepsilon < \varepsilon(\sigma, \Omega, U_0)$ в σ -окрестности пространства ytu пологой части ($\partial U_0(y, t) / \partial y > 0$) интегральной поверхности $u = U_0(y, t)$ находится пологая часть интегральной поверхности $u = U_\varepsilon(y, t)$, и в σ -окрестности каждого находящегося в Ω вертикального фронта $\{(y, t, u) | y - ct = x_i, u^+ \leq u \leq u^-\}$ u_0 находится крутая часть ($\partial U_\varepsilon(y, t) / \partial y < 0$) интегральной поверхности u_ε . В случае $\Phi = T$ величина $\varepsilon(\sigma, \Omega, U_0)$ не зависит от Ω .

Существуют другие функционалы, обладающие свойствами 1°–3° п. 1 и остающиеся постоянными при $\varepsilon \rightarrow 0$ на таких последовательностях $u_\varepsilon \rightarrow u_0$, на которых рассмотренные функционалы T и A , не постоянны. В частности таким функционалом является T^+ , определяемый как длина той части основания волны, над которой находится наклонная ($\partial u_\varepsilon(x, C) / dx > 0$) часть ее профиля. Функционал T^+ дается второй из формул (2.1).

6. Предельный переход на фазовой плоскости. Обозначим

$$rs = \{(u, v) | u^+ \leq u \leq u^-, v = v_0(u) = 1\}$$

$$[r, -\infty) = \{(u, v) | u = u^+, -\infty < v \leq 1\}, \quad [s, -\infty) = \{(u, v) | u = u^-, -\infty < v \leq 1\}, \quad Z = rs \cup [r, -\infty) \cup [s, -\infty)$$

Пусть $\rho = \rho_\varepsilon(\theta)$ — уравнение в полярных координатах $u - c = \rho \cos \theta$, $v = \rho \sin \theta$ фазовой траектории $L(\varepsilon, C^\varepsilon)$ профиля $u_\varepsilon(x, C^\varepsilon)$, выделенного условием (1.4) при $\Phi = A$ по произвольно фиксированному $u_0 \in M_0$ с профилем $u_0(x, u^+)$, $-\infty < u^+ < c$. Пусть $v = v_+^\varepsilon(u)$ — уравнение в декартовых координатах (u, v) на фазовой плоскости той части $L(\varepsilon, C^\varepsilon)$, которая лежит в полуплоскости $v \geq 0$. Обозначим еще $\rho_0 = (a^2 + 1)^{1/2}$, $\theta^* = \text{arctg } a^{-1}$, $\rho_\varepsilon = \rho_\varepsilon(\theta^*)$, $\eta_\varepsilon = \rho_\varepsilon \sin \theta^*$, $d_\varepsilon(\theta)$ — расстояние точки $(\rho_\varepsilon(\theta), \theta) \in L(\varepsilon, C^\varepsilon)$ до Z .

Из (1.6), (1.7) получим для отклонения фазовых траекторий профилей $u_\varepsilon(x, C^\varepsilon)$, $u_0(x, u^+)$

$$\|v_0(u) - v_+^\varepsilon(u)\|_{C[u^+ + \delta, u^- - \delta]} \approx \exp \left\{ -\frac{\delta(2a - \delta)}{2\varepsilon} \right\} \quad (0 < \delta < 2a)$$

$$u^\varepsilon(v) - u^+ \approx -\frac{f(v)}{2a}\varepsilon, \quad u^- - u_+^\varepsilon(v) \approx -\frac{f(v)}{2a}\varepsilon$$

$$u_\pm^\varepsilon(v) = c \pm \psi^{-1}(\varepsilon, 1, v, 0) \quad (6.1)$$

Правая часть последнего соотношения задает абсциссу u фазовой траектории $L(\varepsilon, C^\varepsilon)$ профиля $u_\varepsilon(x, C^\varepsilon)$ как функцию $u = u_\pm^\varepsilon(v)$ ординаты, причем знак плюс относится к правой ветви ($u > c$), а знак минус к левой ($u < c$). Из (6.1) ввиду произвольной малости δ следует, что при как угодно малом $\varepsilon > 0$ и большом N существует $\varepsilon(\sigma, N)$ такое, что фазовые траектории $L(\varepsilon, C^\varepsilon)$ всех профилей $u_\varepsilon(x, C^\varepsilon)$, $0 < \varepsilon < \varepsilon(\sigma, N)$, в полуплоскости $v \geq -N$ не выходят из σ -окрестности Z . В частности

$$\rho_0 - \rho_\varepsilon \rightarrow 0, \quad \eta_\varepsilon \rightarrow 1 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0 \quad (6.2)$$

Вычислим отклонение $L(\varepsilon, C^\varepsilon)$ от Z в окрестности точек $(u^+, 1)$, $(u^-, 1)$ плоскости uv

Учитывая определяемый (1.6) знак $dv_+^\varepsilon(u)/du$, имеем

$$\max_{0 \leq \theta \leq \pi} d_\varepsilon(\theta) = d_\varepsilon(\theta^*) = (\rho_0 - \rho_\varepsilon) \max\{a, 1\} \rho_0^{-1} \quad (6.3)$$

Перепишывая (1.7) в полярных координатах, ввиду (6.2) найдем

$$\rho_\varepsilon - \rho_0 = 2(\rho_0 + \rho_\varepsilon)^{-1} \cos^{-2} \theta^* [\ln(1 - \eta_\varepsilon) + \eta_\varepsilon] \varepsilon \approx \rho_0^{-1} \cos^{-2} \theta^* \ln(1 - \eta_\varepsilon) \varepsilon \quad (6.4)$$

Далее дифференцируя по ε соотношение (1.7), записанное в полярных координатах для точки $(\rho_\varepsilon, \theta^*)$, выразим $d\rho_\varepsilon/d\varepsilon$ через $\eta_\varepsilon, \rho_\varepsilon, \varepsilon, \theta^*$. Используя еще выражение для ε , получаемое переходом к полярным координатам в точке $(\rho_\varepsilon, \theta^*)$ в правой части третьего из соотношений (4.4), при помощи правила Лопиталья найдем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln(1 - \eta_\varepsilon) \ln^{-1} \varepsilon = -\sin \theta^* \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} d\rho_\varepsilon/d\varepsilon (1 - \eta_\varepsilon)^{-1} \varepsilon =$$

$$= -\frac{1}{2a^2} \lim_{\eta_\varepsilon \rightarrow 1} \{(\eta_\varepsilon^2 - 1) [a^2 \eta_\varepsilon (1 - \eta_\varepsilon) + \frac{1}{2} a^2 \eta_\varepsilon (\eta_\varepsilon^2 - 1) (\ln(1 - \eta_\varepsilon) + \eta_\varepsilon)^{-1}]\} = 1 \quad (6.5)$$

Теперь из (6.3), (6.4) получаем

$$\max_{0 \leq \theta \leq \pi} d_\varepsilon(\theta) = d_\varepsilon(\theta^*) \approx a^{-2} \max\{a, 1\} |\varepsilon \ln \varepsilon| \quad (6.6)$$

Участок траектории $L(\varepsilon, C^\varepsilon)$, лежащий между точками с полярными координатами $(a, 0)$ и $(\rho_\varepsilon, \theta^*)$ (в характеризуемой соотношением (6.6) близости от отрезка $\{(u, v) | u = u^-, 0 \leq v \leq 1\}$ и луча $[s, -\infty)$), проходится представляющей систему (1.6) точкой за «время» (см. (4.1), (6.5))

$$I(\varepsilon, \eta_\varepsilon, -1) = \varepsilon I(\varepsilon, \eta_\varepsilon, 0) - \psi^{-1}(\varepsilon, \eta_\varepsilon, 1, 0) + a \rightarrow 0 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0 \quad (6.7)$$

В соответствии с терминологией теории релаксационных колебаний [13, 14] будем называть линию Z , (6.1), (6.6), соответствующей профилю $u_0(x, u^+)$ разрывной траекторией вырожденной (при $\varepsilon = 0$) системы (1.6).

Из (6.1), (6.7) следует, что при достаточно малых ε в произвольно узкой окрестности участка $L(\varepsilon, C^\varepsilon)$, заключенного между точками с полярными координатами $(\rho_\varepsilon, \theta^*)$, $(\rho_\varepsilon, \pi - \theta^*)$ и лежащего в полуплоскости $v \geq 0$, находится интервал из rs , имеющий длину, произвольно близкую к $2a$. Как следует из (4.5), (6.7), указанный близкий к rs участок траектории $L(\varepsilon, C^\varepsilon)$ проходится изображающей систему (1.6) точкой за конечное «время», сколь угодно близкое при $\varepsilon \rightarrow 0$ к T_0 .

Участок rs разрывной траектории Z , продолжая использовать терминологию [13,14], будем называть участком медленных движений.

В произвольно узкой окрестности оставшегося участка $(-\pi - \theta^* < \theta < \theta^*)$ траектории $L(\varepsilon, C^\varepsilon)$ лежат при достаточно малых ε интервалы лучей $[r, -\infty)$ и $[s, -\infty)$, имеющие произвольно большую длину. Этот участок $L(\varepsilon, C^\varepsilon)$, как следует из (4.5), (6.7), проходимся изображающей систему (1.6) точкой за исчезающе малое при $\varepsilon \rightarrow 0$ «время». Поэтому, как и в [13,14], назовем $[r, -\infty) \cup [s, -\infty)$ участком быстрых движений.

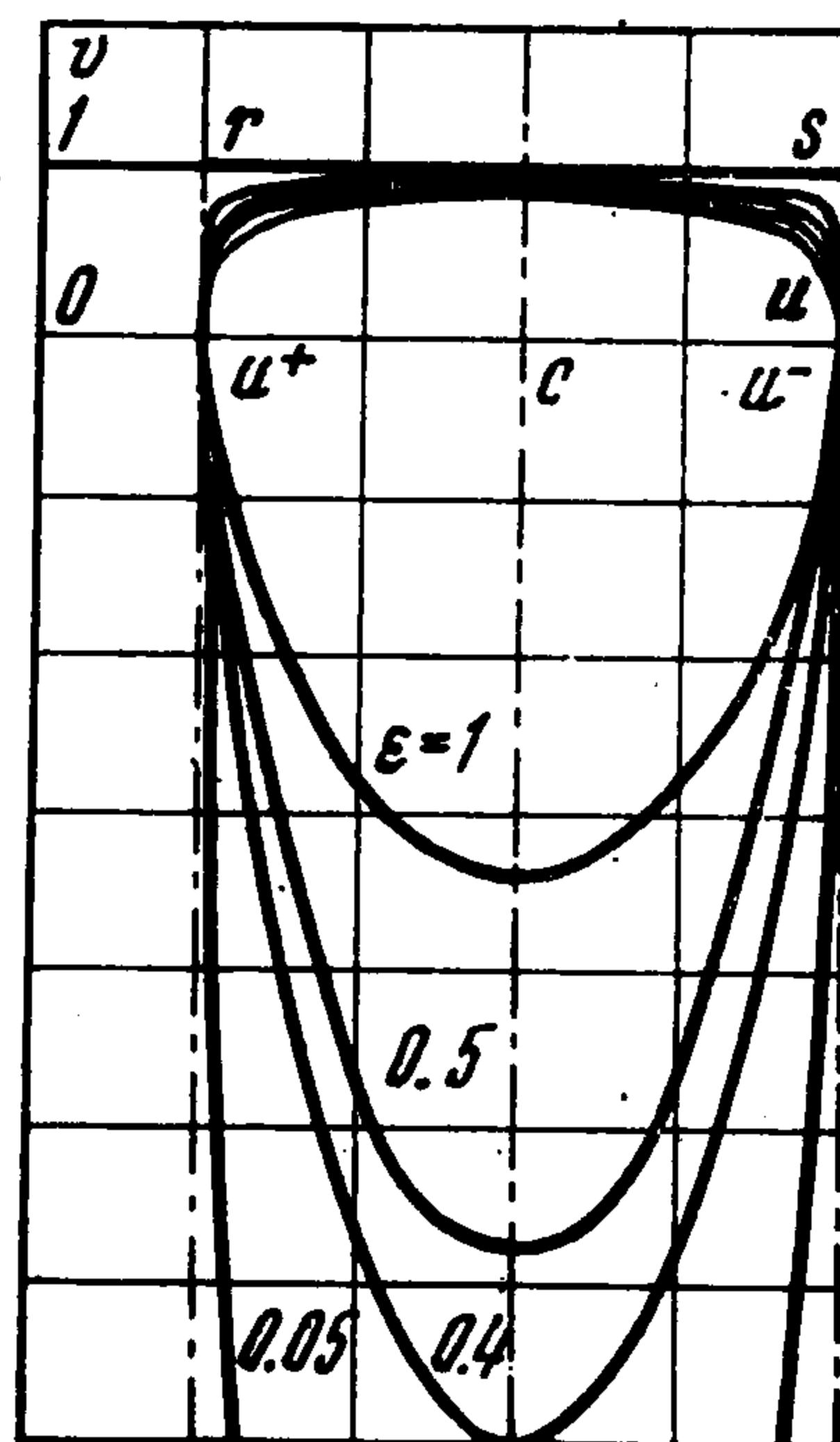
На фиг. 3 показана определяемая соотношениями (6.1), (6.2), (6.6) сходимость фазовых траекторий $L(\varepsilon, C^\varepsilon)$ профилей $u^\varepsilon(x, C^\varepsilon)$, фиксированных условием (1.4) при $\Phi = A$, к разрывной фазовой траектории Z профиля $u_0(x, u^+)$ произвольного КВ-решения $u_0 \in M_0$.

Таким образом, разрывная траектория, как и в случае релаксационных колебаний, состоит из чередующихся участков медленного и быстрого движений. Последний, в свою очередь, состоит из участка мгновенного ухода из точки s (срыва, по терминологии теории релаксационных колебаний) на $-\infty$ по лучу $[s, -\infty)$ и мгновенного возвращения из $-\infty$ по лучу $[r, -\infty)$ в точку r (падения), [13,14]. Участок быстрых движений соединяет (через бесконечно удаленную точку) точки s наибольшим и наименьшим значением переменной u на участке медленных движений rs , являющемся изображением на плоскости uv наклонной части профиля $u_0(x, u^+)$. Таким образом, участок быстрых движений на фазовой плоскости uv выполняет ту же роль, что и вертикальная часть профиля $u_0(x, u^+)$ при изображении его на плоскости xu . Поэтому естественно участок быстрых движений трактовать как изображение на фазовой плоскости uv вертикальной части профиля $u_0(x, u^+)$.

Отметим отличия рассматриваемого предельного перехода от предельного перехода теории релаксационных колебаний. Изображающая точка вырожденной системы, двигаясь по разрывной траектории на участке быстрых движений, изменяет направление своего движения, не побывав на участке медленных движений, и приходит в точку падения r с направлением движения, противоположным тому, которое было в момент срыва из s .

Координаты точки срыва и следующей за ней точки падения обращают в нуль правую часть уравнения с параметром в (1.6), как в [13,14], но эти точки лежат на прямой ортогональной тем, по которым происходит быстрое движение. В случае релаксационных колебаний одним из определяющих условий на скачке является принадлежность последовательных точек срыва и падения прямой, вдоль которой происходит быстрое движение. В рассматриваемом же случае на скачке выполнены соответствующие уравнению (1.2) аналоги гидродинамических условий сохранения и диссипации. Кроме того, срыв происходит не в касательном, а в ортогональном траектории медленных движений направлении.

Отметим еще, что в рассматриваемом случае нельзя указать ни при каком $\varepsilon > 0$ окрестность разрывной траектории столь узкую, что в ней находится только одно периодическое решение системы с $\varepsilon > 0$ [14]. Напротив, в произвольно узкой окрестности разрывной траектории при любом $\varepsilon > 0$ проходит континуум замкнутых траекторий системы с $\varepsilon > 0$ (1.6), (1.7).



Фиг. 3

Отличия от теории релаксационных колебаний вызваны тем, что линия $\{(u, v) \mid v = 1, -\infty < u < \infty\} \cup \{(u, v) \mid u = c, -\infty < v < \infty\}$ на фазовой плоскости uv системы (1.6), состоящая из положений равновесия уравнения с ε (если координату, входящую в него без ε при производной, рассматривать как меняющийся на всей числовой оси параметр), не является простой кривой, как предполагается в [13,14]. Эта линия разветвляется в точке $(c, 1)$, и, таким образом, состояние равновесия $v = 1$ первого уравнения (1.6) при фиксированном $u = c$ не является изолированным.

Характерно, что происходящее в $(c, 1)$ слияние устойчивого и неустойчивого положения равновесия содержащего ε уравнения (1.6) не приводит к срыву с подошедшей к месту слияния траектории медленных движений, как это имеет место при релаксационных колебаниях.

Напротив (6.1), траектория $L(\varepsilon, C^\varepsilon)$ в этой точке наиболее близко при каждом $\varepsilon > 0$ подходит к участку медленных движений rs . Несмотря на то, что правее $(c, 1)$ (фиг. 3) rs состоит из неустойчивых положений равновесия, медленное движение вдоль rs продолжается. При этом длина проходимого без срыва неустойчивого участка медленных движений равна полуамплитуде приближаемого u_0 и, в силу произвольности последнего, может быть сколь угодно большой (1.8).

Участок траектории медленных движений справа от $(c, 1)$, будучи неустойчивым с точки зрения характера составляющих его положений равновесия, является устойчивым в следующем предельном смысле. В любой сколь угодно узкой окрестности этого участка при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ находится, как было отмечено, континуум орбитно-устойчивых траекторий системы (1.6), не покидающих эту окрестность от начала $(c, 1)$ рассматриваемого участка до точки, сколь угодно близкой к его концу s .

Аналогично рассматривается предельный переход на фазовой плоскости при выборе в условии (1.4) в качестве Φ отличных от A функционалов.

Автор благодарит Э. Б. Быховского, А. Ю. Ишлинского и Г. А. Любимова за обсуждения и замечания.

Поступила 25 XII 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Burgers I. M. A mathematical Model illustrating the Theory of turbulence Advances Appl. Mech. 1948, vol. 1.
2. Dressler R. F. Mathematical solution of the problem of roll-waves in inclined open channels. Commun. Pure and Appl. Math., 1949, vol. 2, No. 2—3.
3. Картелишвили Н. А. Неустановившиеся открытые потоки. Л., Гидрометеоздат, 1968.
4. Васильев О. Ф., Годунов С. К., Притвиц Н. А., Темноева Т. А., Фрязинова И. Л., Шугрин С. М. Численный метод расчета распространения длинных волн в открытых руслах и приложение его к задаче о паводке. Докл. АН СССР, 1963, т. 151, № 3.
5. Олейник О. А. Разрывные решения нелинейных дифференциальных уравнений. Успехи матем. наук, 1957, т. 12, вып. 3.
6. Бахвалов Н. С. Об асимптотике при малых ε решения уравнения $u_t + (\varphi(u))_x = \varepsilon u_{xx}$, соответствующего волне разрежения в случае вырождения. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1967, т. 7, № 6.

7. К р у ж к о в С. Н. Методы построения обобщенного решения задачи Коши для квазилинейного уравнения первого порядка. Успехи матем. наук, 1965, т. 20, вып. 6.
 8. С у ш к о В. Г. О погрешности приближенных решений задачи Коши для квазилинейного уравнения первого порядка. Матем. заметки, 1970, т. 8, № 3.
 9. Г е л ь ф а н д И. М. Некоторые задачи теории квазилинейных уравнений. Успехи матем. наук, 1959, т. 14, вып. 2.
 10. Б ы х о в с к и й Э. Б. Об автомодельных решениях типа распространяющейся волны одного квазилинейного дифференциального уравнения и системы уравнений, описывающей течение воды в наклонном канале. ПММ, 1966, т. 30, вып. 2.
 11. Н а т а н с о н И. П. Теория функций вещественного переменного. М., Гостехиздат, 1959.
 12. В о р о б ь е в А. П. О периодах решений в случае центра. Докл. АН БССР, 1962, т. 6, № 5.
 13. П о н т р я г и н Л. С. Асимптотическое поведение решений систем дифференциальных уравнений с малым параметром при высших производных. Изв. АН СССР, Сер. матем., 1957, т. 21, № 5.
 14. М и щ е н к о Е. Ф. Асимптотическая теория релаксационных колебаний, описываемых системами второго порядка. Матем. сб., 1958, т. 44 (86), № 4.
-