Прикладная математика и механика. Том 35, 1971

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ГИДРОДИНАМИКИ

Н. Н. Кочина

(Москва)

Находятся периодические решения уравнения теплопроводности с граничным условием релейного типа для конечного промежутка и исследуется поведение решений при неограниченном возрастании времени.

Периодические решения уравнения теплопроводности с нелинейным граничным условием рассматривались в работах [1–4, 10]. В работах [5,6] получены периодические решения неоднородного уравнения теплопроводности с нелинейной правой частью относительно искомой функции и исследовано асимптотическое поведение решений соответствующих начальных задач.

Такого рода решениями описываются автоколебательные процессы, встречающиеся в разных разделах гидродинамики (в теории фильтрации и диффузии [3–6]).

1. Задача сводится к нахождению периодического решения уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1.1}$$

в конечной области $-l < x < 0$ с граничными условиями

$$\frac{\partial u(-l, t)}{\partial x} = \begin{cases} h_1 u(-l, t) + q_1 & \text{при} \quad u(-l, t) < u_* \\ h_2 u(-l, t) + q_2 & \text{при} \quad u(-l, t) > u_{**} \end{cases} \tag{1.2}$$

$$(u_* > u_{**}, \ h_1 > 0, \ h_2 > 0, \ q_2 > q_1)$$

$$u(0, t) = 0$$

Считая, что $u(-l, t) = u_*$ при $t = T_1$ и $u(-l, t) = u_{**}$ при $t = T$, причем $u = u_1(x, t)$ при $0 \leqslant t \leqslant T_1$ и $u = u_2(x, t)$ при $T_1 \leqslant t \leqslant T$, будем искать решение этой задачи в виде рядов

$$u_1(x, t) = \frac{q_1 x}{1 + h_1 l} + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \exp(-\lambda_{k_1}^2 t) \sin \alpha_{k_1} x \tag{1.3}$$

$$u_2(x, t) = \frac{q_2 x}{1 + h_2 l} + \sum_{k=1}^{\infty} D_k \exp[-\lambda_{k_2}^2 (t - T_1)] \sin \alpha_{k_2} x$$

Здесь λ_{k_i} $(i = 1, 2)$ — корни уравнений

$$\operatorname{tg} \frac{\lambda_{k_i} l}{a} = -\frac{1}{h_i} \frac{\lambda_{k_i}}{a} \qquad \left(\alpha_{k_i} = \frac{\lambda_{k_i}}{a}\right) \tag{1.4}$$

Имеют место неравенства

$$^1/_2\pi(2k - 1) < \alpha_{k_i} l < \pi k \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

причем при $k \to \infty$ $\alpha_{k_i} l \to {}^1/_2\pi(2k - 1)$.

Коэффициенты C_k и D_k ($k = 1, 2, \ldots$) определяются из условий непрерывности решения $u_1(x, T_1) = u_2(x, T_1)$, $u_2(x, T) = u_1(x, 0)$. Из (1.3) получаем равенства

$$\frac{q_1}{1+h_1 l}x + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \exp(-\lambda_{k_1}{}^2 T_1)\sin\alpha_{k_1}x = \frac{q_2}{1+h_2 l} + \sum_{k=1}^{\infty} D_k \sin\alpha_{k_2}x \qquad (1.5)$$

$$\frac{q_2}{1+h_2 l}x + \sum_{k=1}^{\infty} D_k \exp[-\lambda_{k_2}{}^2(T-T_1)]\sin\alpha_{k_2}x =$$

$$= \frac{q_1}{1+h_1 l}x + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin\alpha_{k_2}x$$

Константы T_1 и T находятся как наименьшие корни уравнений $u(-l, T_1) = u_*$, $u(-l, T) = u_{**}$. В силу (1.3) эти уравнения приобретают вид

$$-\frac{q_1 l}{1+h_1 l} - \sum_{k=1}^{\infty} C_k \exp(-\lambda_{k_1}{}^2 T_1)\sin\alpha_{k_1}l = u_* \qquad (1.6)$$

$$-\frac{q_2 l}{1+h_2 l} - \sum_{k=1}^{\infty} D_k \exp[-\lambda_{k_2}{}^2(T-T_1)]\sin\alpha_{k_2}l = u_{**}$$

Введем обозначения

$$B = \frac{q_1}{1+h_1 l} - \frac{q_2}{1+h_2 l}, \qquad \beta_{k_1} = \exp(-\lambda_{k_1}{}^2 T_1) \qquad (1.7)$$

$$\gamma_{k_2} = \exp[\lambda_{k_2}{}^2(T-T_1)], \qquad A_k = \beta_{k_1}C_k, \qquad B_k = \gamma_{k_2}D_k$$

Уравнения (1.5) сведутся тогда к следующим:

$$\sum_{k=1}^{\infty} D_k \sin\alpha_{k_2}x = Bx + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\alpha_{k_1}x \qquad (1.8)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin\alpha_{k_1}x = -Bx + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin\alpha_{k_2}x$$

Из (1.8) находятся коэффициенты D_k в зависимости от A_k и C_k в зависимости от B_k

$$D_m = \frac{2}{l}\left[B\delta_{m_2} - \frac{(h_2-h_1)}{h_1 h_2}\sum_{k=1}^{\infty}\delta_{k_1, m_2}A_k\right] \qquad (1.9)$$

$$C_m = \frac{2}{l}\left[-B\delta_{m_1} + \frac{(h_2-h_1)}{h_1 h_2}\sum_{k=1}^{\infty}\delta_{k_2, m_1}B_k\right] \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots)$$

Здесь обозначено

$$\delta_{m_i} = s_i(1 + h_i l)\,\alpha_{m_i}^{-2}\sin\alpha_{m_i}l \qquad (1.10)$$

$$\delta_{k_i, m_j} = s_j(\alpha_{k_i}^2 - \alpha_{m_j}^2)^{-1}\alpha_{k_i}\alpha_{m_j}\cos\alpha_{k_i}l\cos\alpha_{m_j}l$$

$$s_h = \left(1 - \frac{\sin 2\alpha_{m_h}l}{2\alpha_{m_h}l}\right)^{-1}$$

Ясно, что $\lim\delta_{k_i, m_j} = 0 \qquad (k_i = m_j \to \infty)$.

После ряда преобразований (1.9) приводится к бесконечной системе линейных уравнений для коэффициентов C_m и D_m $(m = 1, 2, \ldots)$

$$C_m = \mu_m + \sum_{j=1}^{\infty} \mu_{j,m} C_j, \qquad D_m = \vartheta_m + \sum_{j=1}^{\infty} \vartheta_{j,m} D_j \tag{1.11}$$

Здесь положено

$$\mu_m = -\frac{2B}{l}\delta_{m_1} + \frac{4B}{l^2}\left(\frac{h_2-h_1}{h_1h_2}\right)\sum_{k=1}^{\infty}\delta_{k_2,m_1}\gamma_{k_2}\delta_{k_2}$$

$$\vartheta_m = \frac{2B}{l}\delta_{m_2} + \frac{4B}{l^2}\left(\frac{h_2-h_1)}{h_1h_2}\right)\sum_{k=1}^{\infty}\delta_{k_2,m_1}\beta_{k_1}\delta_{k_1}$$

$$\mu_{j,m} = -\frac{4}{l^2}\left(\frac{h_2-h_1}{h_1h_2}\right)^2\sum_{k=1}^{\infty}\delta_{k_2,m_1}\gamma_{k_2}\delta_{j_1,k_2}\beta_{j_1} \tag{1.12}$$

$$\vartheta_{j,m} = -\frac{4}{l^2}\left(\frac{h_2-h_1}{h_1h_2}\right)^2\sum_{k=1}^{\infty}\delta_{k_1,m_2}\beta_{k_1}\delta_{j_2,k_1}\gamma_{j_2}$$

Из (1.10) ясно, что ряды, входящие в выражения для μ_m и ϑ_m, сходящиеся, причем $\mu_m \to 0$, $\vartheta_m \to 0$ при $m \to \infty$. Из (1.4) следует сходимость рядов $\mu_{j,m}$ и $\vartheta_{j,m}$, а также

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\mu_{j,m}| \quad \text{и} \quad \sum_{j=1}^{\infty} |\vartheta_{j,m}|$$

Отсюда вытекает, что если величина $l^{-2}(h_2 - h_1)^2 h_1^{-2} h_2^{-2}$ достаточно мала, так что выполняются неравенства

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\mu_{j,m}| \leqslant 1-\theta, \qquad \sum_{j=1}^{\infty} |\vartheta_{j,m}| \leqslant 1-\theta \qquad (0<\theta<1)$$

то бесконечная система линейных уравнений (1.11) будет вполне регулярной, и коэффициенты C_m, D_m можно найти методом последовательных приближений [7].

Константы T_1 и T находятся из уравнений (1.6).

Для бесконечной области аналогичный результат другим путем был получен в работе [8].

2 Пусть теперь $h_1 = h_2 = h$. Уравнение (1.4) принимает вид

$$\operatorname{tg} \alpha_k l = -\frac{1}{hl}\alpha_k l \tag{2.1}$$

Формулы (1.7) и (1.8), где положено $k_1 = k_2 = k$, дают следующие выражения для коэффициентов C_k и D_k:

$$C_k = e_k\frac{\gamma_k - 1}{1-\beta_k\gamma_k}, \quad D_k = e_k\frac{1-\beta_k}{1-\beta_k\gamma_k}, \quad e_k = \frac{2}{l}(q_1 - q_2)\frac{\sin\alpha_k l}{\alpha_k^2\left(1-\dfrac{\sin 2\alpha_k l}{2\alpha_k l}\right)} \tag{2.2}$$

$$\beta_k = \exp\left[-\alpha_k^2 a^2 T_1\right], \qquad \gamma_k = \exp\left[-\alpha_k^2 a^2 (T - T_1)\right]$$

Если $h = 0$, имеем

$$\alpha_k l = {}^1\!/_2\pi(2k-1), \qquad \sin 2\alpha_k l = 0 \tag{2.3}$$

Из формул (2.2), (1.3) следуют условия существования корней T_1 и T этих уравнений ($C_k \sin \alpha_k l > 0$, $D_k \sin \alpha_k l < 0$)

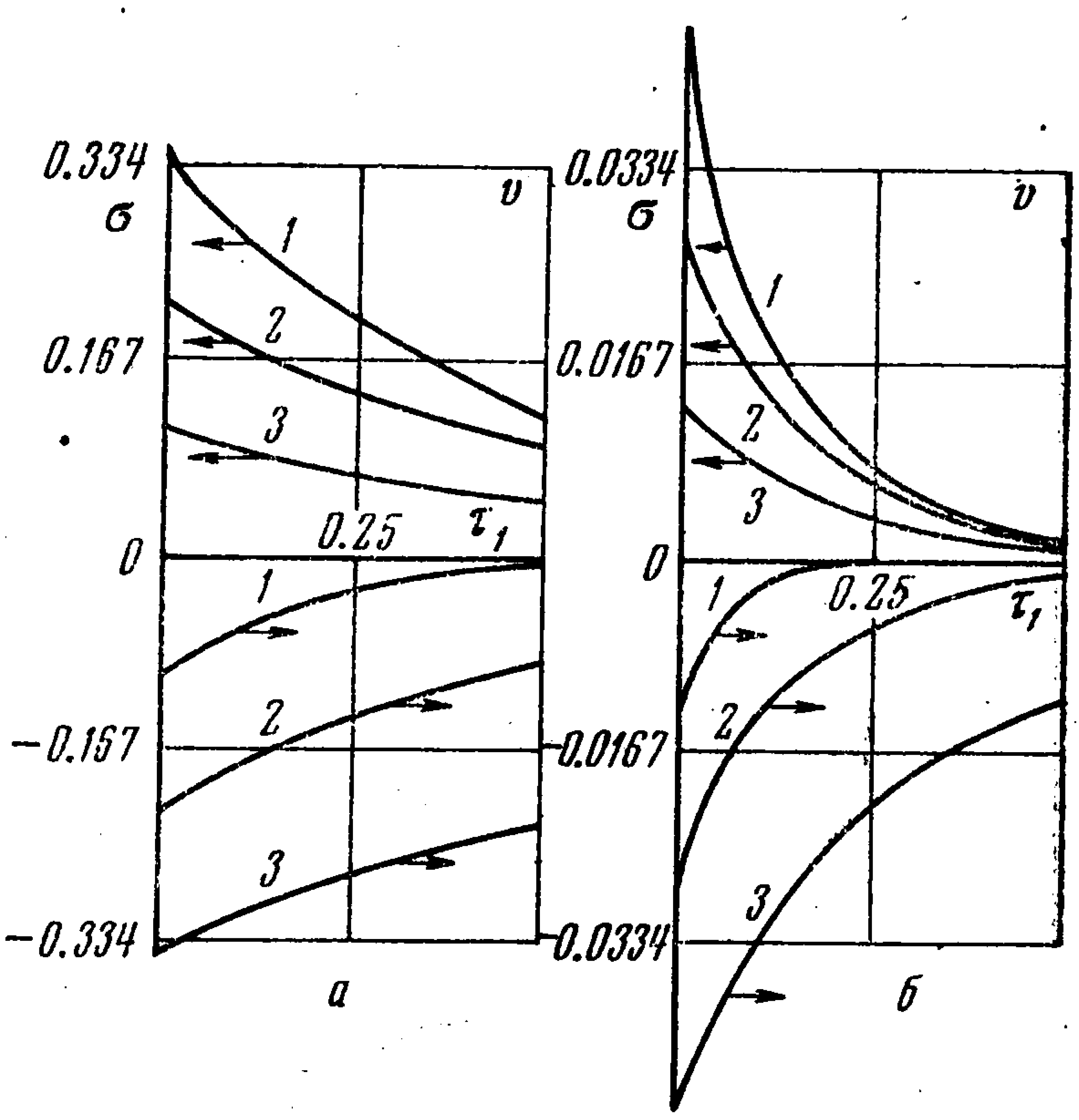
$$-\frac{q_2 l}{1+hl} < u_{**} < u_* < -\frac{q_1 l}{1+hl} \tag{2.4}$$

На фигуре для случаев $h = 0$ (*а*), $hl = 4$ (*б*) представлен вид зависимостей $\sigma = \sigma(\tau_1)$, $\vartheta = \vartheta(\tau_1)$ при условии, что вдоль каждой кривой $T = bT_1$. Кривым *1*, *2*, *3* отвечают значения $b = 4, 2, {}^4/_3$ соответственно. Здесь

$$\sigma = \frac{\sigma'}{2(q_2 - q_1)l}, \quad \vartheta = \frac{\vartheta'}{2(q_2 - q_1)l}, \quad \tau_1 = \frac{a^2}{l^2}T_1, \quad \sigma' = -u_* - \frac{q_1 l}{1+hl}$$

$$\vartheta' = -u_{**} - \frac{q_2 l}{1+hl}$$

Из формул (2.2) и (1.6) видно, что величины σ убывают, ϑ возрастают с ростом T_1. Ясно, что любым значениям u_{**} и u_*, удовлетворяющим неравенствам (2.4), соответствует единственное значение T_1.



В работе [1] решена задача о периодических режимах одномерной распределенной печи и исследована их устойчивость. Эта задача сводится к решению уравнения (1.1) с условиями (1.2), где $-l$ заменено на $\bar{x}$ ($-l < \bar{x} < 0$) и положено $h_1 = h_2 = 0$.

3. Исследуем теперь асимптотическое поведение при $t \to \infty$ решения уравнения (1.1) с условиями (1.2), где положено $h_1 = h_2 = h$, и начальным условием

$$u(x, 0) = \varphi(x) \tag{3.1}$$

Здесь $\varphi(x)$ — функция, удовлетворяющая в промежутке $-l \leqslant x \leqslant 0$ условиям Дирихле.

Решение этой задачи описывается формулами (аналогичными полученным в работе [6])

$$u_1^{(i+1)}(x,t) = \frac{q_1 x}{1+hl} + \sum_{k=1}^{\infty} C_k^{(i+1)} \exp\left\{-\lambda_k^2\left(t - \sum_{j=0}^{i} T^{(j)}\right)\right\} \sin \alpha_k x$$

$$\sum_{j=0}^{i} T^{(j)} \leqslant t \leqslant \sum_{j=0}^{i} T^{(j)} + T_1^{(i+1)} \qquad (i = 0, 1, 2, 3, \ldots), \qquad T^{(0)} = 0 \tag{3.2}$$

$$u_2^{(i+1)}(x,t) = \frac{q_2 x}{1+hl} + \sum_{k=1}^{\infty} D_k^{(i+1)} \exp\left\{-\lambda_k^2\left(t - \sum_{j=0}^{i} T^{(j)} - T_1^{(i+1)}\right)\right\} \sin \alpha_k x$$

$$\sum_{j=0}^{i} T^{(j)} + T_1^{(i+1)} \leqslant t \leqslant \sum_{j=0}^{i} T^{(j)} + T^{(i+1)} \qquad (i = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

Здесь

$$C_k^{(1)} = \left(\varphi_k - \frac{2q_1}{l}\frac{\sin\alpha_k l}{\alpha_k^2}\right)\left(1 - \frac{\sin 2\alpha_k l}{2\alpha_k l}\right)^{-1}$$

$$\varphi_k = \frac{2}{l}\int_{-l}^{0}\varphi(x)\sin\alpha_k x dx, \qquad D_k^{(i)} = e_k + \beta_k^{(i)}C_k^{(i)}$$

$$C_k^{(i+1)} = -e_k + \gamma_k^{(i)}D_k^{(i)} \qquad (i = 1, 2, 3 \ldots) \tag{3.3}$$

$$\beta_k^{(i)} = \exp\left[-\lambda_k^2 T_1^{(i)}\right], \qquad \gamma_k^{(i)} = \exp\left[-\lambda_k^2\left(T^{(i)} - T_1^{(i)}\right)\right]$$

Для определенности считаем, что в начальный момент времени имеет место верхнее из первого условия (1.2).

Если $h = 0$, то $\beta_k^{(i)} = (\beta_1^{(i)})^{(2k-1)^2}, \gamma_k^{(i)} = (\gamma^{(i)})^{(2k-1)^2}$, и аналогично тому, как это было сделано при рассмотрении другой задачи в работе [6], можно показать, что практически при условиях

$$\varphi(-l) < u_*, \ \sigma > 0, \ \vartheta < 0$$

величины $\beta_1^{(i+1)}$ и $\gamma_1^{(i+1)}$ можно определить из уравнений (если $\beta_1^{(0)}$ и $\gamma_1^{(0)}$ достаточно малы, при больших i)

$$\beta_1^{(i+1)} = \beta_1^{(0)} + A\,\{\beta_1^{(i+1)}(\gamma_1^{(i)})^9 + (\beta_1^{(i+1)})^9\}, \quad \gamma_1^{(i+1)} = \gamma_1^{(0)} +$$
$$+ B\,\{\gamma_1^{(i+1)}(\beta_1^{(i+1)})^9 + (\gamma_1^{(i+1)})^9\} \tag{3.4}$$
$$\beta_1^{(0)} = \frac{\sigma}{\vartheta - e_1}, \quad \gamma_1^{(0)} = \frac{\vartheta}{\sigma + e_1}, \quad A = \frac{1}{9}\frac{e_1}{\vartheta - e_1}, \quad B = -\frac{1}{9}\frac{e_1}{\sigma + e_1}$$

Условия $0 < \beta_1^{(0)} < 1, \ 0 < \gamma_1^{(0)} < 1$ дают

$$\vartheta > e_1, \ \sigma < -e_1, \ \sigma - \vartheta < -e_1, \ A < 0, \ B < 0$$

Из (3.4) следует, что величины $\beta_1^{(i)}$ и $\gamma_1^{(i)}$ образуют монотонные, ограниченные последовательности, и по теореме Вейерштрасса имеют пределы β_1 и γ_1.

Подставляя эти пределы в формулы (3.3), убеждаемся, что они переходят в (2.2), и, таким образом, решение (3.2) практически переходит в решение периодической задачи (1.3), где использовано (2.3).

Пусть теперь $h \neq 0$. В этом случае $\beta_k^{(i)} = (\beta_1^{(i)})^{\mu_k}, \ \gamma_k^{(i)} = (\gamma_1^{(i)})^{\mu_k}$, где $\mu_k = (\alpha_k / \alpha_1)^2$.

Вместо формул (3.4) можно написать более общие уравнения. Рассмотрим случай, когда они принимают вид

$$\beta_1^{(i+1)} = \beta_1^{(0)} + \sum_{j=1}^{s} a_j^{(i+1)}[\beta_1^{(i+1)}]^{\mu_j}, \quad \gamma_1^{(i+1)} = \gamma_1^{(0)} + \sum_{j=1}^{s} b_j^{(i\ 1)}[\gamma_1^{(i+1)}]^{\mu_j}$$
$$\beta_1^{(0)} = \frac{\sigma}{\vartheta + \nu_1}, \qquad \gamma_1^{(0)} = \frac{\vartheta}{\sigma - \nu_1} \tag{3.5}$$
$$a_1^{(i+1)} = \omega_2(\gamma_1^{(i)})^{\mu_2}[1 - (\beta_1^{(i)})^{\mu_2}] + \omega_3(\gamma_1^{(i)})^{\mu_3}$$
$$a_2^{(i+1)} = \omega_2[1 - (\gamma_1^{(i)})^{\mu_2} + (\gamma_1^{(i)}\beta_1^{(i)})^{\mu_2}], \qquad a_3^{(i+1)} = \omega_3[1 - (\gamma_1^{(i)})^{\mu_3}]$$
$$\omega_2 = -\frac{\nu_2}{\nu_1 + \vartheta}, \qquad \omega_3 = -\frac{\nu_3}{\nu_1 + \vartheta}, \qquad \nu_k = -e_k\sin\alpha_k l, \quad s = 3$$

Формулы для $b_j^{(i+1)}$ получаются из соответствующих формул для $a_j^{(i+1)}$ заменой $(\nu_1+\vartheta)^{-1}$ на $(\sigma-\nu_1)^{-1}$, $\gamma_1^{(i)}$ на $\beta_1^{(i+1)}$, $\beta_1^{(i)}$ на $\gamma_1^{(i)}$.

Из формул (3.5) следуют неравенства

$$a_j^{(i+1)}<0,\ b_j^{(i+1)}<0 \qquad (j=1,2,3)$$

$$\beta_{\min}<\beta_1^{(i+1)}<\beta_{\max}=\beta_1^{(0)}, \qquad \gamma_{\min}<\gamma_1^{(i+1)}<\gamma_{\max}=\gamma_1^{(0)}$$

Ясно, что должно быть $0<\beta_1^{(0)}<1$, $0<\gamma_1^{(0)}<1$, откуда вытекают условия $0<\sigma<\nu_1$, $-\nu_1<\vartheta<0$, $\sigma-\vartheta<\nu_1$.

Теперь, используя (3.5), составим разность

$$\begin{aligned}\beta_1^{(i+1)}-\beta_1^{(i)}&=a_1^{(i+1)}[\beta_1^{(i+1)}-\beta_1^{(i)}]+\beta_1^{(i)}[a_1^{(i+1)}-a_1^{(i)}]+a_2^{(i+1)}(\beta_1^{(i+1)})^{\mu_2}-\\&-a_2^{(i)}(\beta_1^{(i)})^{\mu_2}+a_3^{(i+1)}(\beta_1^{(i+1)})^{\mu_3}-a_3^{(i)}(\beta_1^{(i)})^{\mu_3}\end{aligned}\tag{3.6}$$

Пользуясь теоремой о среднем значении, запишем разность $a_1^{(i+1)}-a_1^{(i)}$ в виде

$$\begin{aligned}a_1^{(i+1)}-a_1^{(i)}&=\{\omega_2\mu_2\xi^{\mu_2-1}[1-(\beta_1^{(i)})^{\mu_2}]+\omega_3\mu_3\delta^{\mu_3-1}\}(\gamma_1^{(i)}-\gamma_1^{(i-1)})-\\&-\omega_2\mu_2\eta^{\mu_2-1}(\gamma_1^{(i-1)})^{\mu_2}(\beta_1^{(i)}-\beta_1^{(i-1)})\end{aligned}\tag{3.7}$$

Здесь ξ, δ — некоторые средние значения величин γ_1, η — некоторое среднее значение величины β_1.

Аналогичные формулы можно написать и для остальных разностей, входящих в выражение (3.6), а также для членов аналогичной (3.6) формулы для разности $\gamma_1^{(i+1)}-\gamma_1^{(i)}$, которую можно получить из (3.5). Из этих формул можно выразить линейно разности $\beta_1^{(i+1)}-\beta_1^{(i)}$ и $\gamma_1^{(i+1)}-\gamma_1^{(i)}$ через разности $\gamma_1^{(i)}-\gamma_1^{(i-1)}$, $\beta_1^{(i)}-\beta_1^{(i-1)}$ и $\beta_1^{(i+1)}-\beta_1^{(i)}$, $\gamma_1^{(i)}-\gamma_1^{(i-1)}$ соответственно

$$\begin{aligned}&\beta_1^{(i+1)}-\beta_1^{(i)}=K(\gamma_1^{(i)}-\gamma_1^{(i-1)})+L(\beta_1^{(i)}-\beta_1^{(i-1)})\\&\gamma_1^{(i+1)}-\gamma_1^{(i)}=M(\beta_1^{(i+1)}-\beta_1^{(i)})+N(\gamma_1^{(i)}-\gamma_1^{(i-1)})\\&K=\frac{1}{E}(\omega_2\mu_2\{\xi^{\mu_2-1}\beta_1^{(i)}-\zeta^{\mu_2-1}(\beta_1^{(i)})^{\mu_2}\}[1-(\beta_1^{(i)})^{\mu_2}]+\\&\qquad+\omega_3\mu_3\{\delta^{\mu_3-1}\beta_1^{(i)}-\Delta^{\mu_3-1}(\beta_1^{(i)})^{\mu_3}\})\\&L=\frac{\omega_2\mu_2}{E}\{-\eta^{\mu_2-1}\beta_1^{(i)}+\nu^{\mu_2-1}(\beta_1^{(i)})^{\mu_2}\}(\gamma_1^{(i-1)})^{\mu_2}\\&E=1-a_1^{(i+1)}-\omega_2\mu_2\psi^{\mu_2-1}\{1-(\gamma_1^{(i)})^{\mu_2}[1-(\beta_1^{(i)})^{\mu_2}]\}-\\&\qquad-\omega_3\mu_3\vartheta^{\mu_3-1}[1-(\gamma_1^{(i)})^{\mu_3}]\end{aligned}\tag{3.8}$$

Здесь ξ, ζ, Δ, δ — средние значения величин γ_1; η, ν, ψ, ϑ — средние значения величин β_1. Формулы для M и N получаются из формул для K и L заменой, указанной выше.

Оценки

$$|K|<\alpha,\quad |L|<\beta,\quad |M|<\gamma,\quad |N|<\delta$$

приводят к неравенствам, имеющим место для системы (3.8) при $i \geqslant k$, где k — некоторая константа

$$|\beta_1^{(i+1)} - \beta_1^{(i)}| < \alpha |\gamma_1^{(i)} - \gamma_1^{(i-1)}| + \beta |\beta_1^{(i)} - \beta_1^{(i-1)}|$$
$$|\gamma_1^{(i+1)} - \gamma_1^{(i)}| < \gamma |\beta_1^{(i+1)} - \beta_1^{(i)}| + \delta |\gamma_1^{(i)} - \gamma_1^{(i-1)}| \qquad (3.9)$$

Здесь

$$\alpha = \frac{1}{F}\left[-\omega_2\mu_2\gamma_{\max}^{\mu_2-1}\beta_{\max}(1-\beta_{\max}^{\mu_2-1})(1-\beta_{\min}^{\mu_2}) - \omega_3\mu_3\gamma_{\max}^{\mu_3-1}\beta_{\max}(1+\beta_{\max}^{\mu_3-1})\right]$$
$$\beta = \frac{-\omega_2\mu_2}{F}(\gamma_{\max}\beta_{\max})^{\mu_2}(1+\beta_{\max}^{\mu_2-1}) \qquad (3.10)$$
$$F = 1 - \omega_2\gamma_{\min}^{\mu_2}(1-\beta_{\max}^{\mu_2}) - \omega_3\gamma_{\min}^{\mu_3} -$$
$$-\omega_2\mu_2\beta_{\min}^{\mu_2-1}\{1-\gamma_{\max}^{\mu_2}(1-\beta_{\min}^{\mu_2})\} - \omega_3\mu_3\beta_{\min}^{\mu_3-1}(1-\gamma_{\max}^{\mu_3})$$

а величины γ и δ даны аналогичными выражениями.

При этом должно выполняться неравенство $F > 0$, где F дано формулой (3.10).

Умножим первое неравенство (3.9) на ξ, второе — на η, где ξ и η — некоторые неизвестные заранее положительные числа, и сложим. Получим

$$\eta|\gamma_1^{(i+1)} - \gamma_1^{(i)}| + (\xi - \gamma\eta)|\beta_1^{(i+1)} - \beta_1^{(i)}| <$$
$$< (\alpha\xi + \delta\eta)|\gamma_1^{(i)} - \gamma_1^{(i-1)}| + \beta\xi|\beta_1^{(i)} - \beta_1^{(i-1)}| \qquad (3.11)$$

Обозначая $\zeta = \xi - \gamma\eta$, будем теперь искать числа ξ и η как решение системы линейных однородных уравнений

$$\alpha\xi + \delta\eta = \lambda\eta, \qquad \beta\xi = \lambda\zeta = \lambda(\xi - \lambda\eta) \qquad (3.12)$$

Неравенство (3.11) перейдет теперь в следующее:

$$\eta|\gamma_1^{(i+1)} - \gamma_1^{(i)}| + \zeta|\beta_1^{(i+1)} - \beta_1^{(i)}| < \lambda\{\eta|\gamma_1^{(i)} - \gamma_1^{(i-1)}| +$$
$$+ \zeta|\beta_1^{(i)} - \beta_1^{(i-1)}|\} \qquad (3.13)$$

Если удастся так подобрать корни системы уравнений ξ и η, что

$$\xi > 0, \eta > 0, \zeta > 0, 0 < \lambda < 1$$

то можно рассматривать числа $\zeta\beta_1^{(i)}$, $\eta\gamma_1^{(i)}$ как элементы $x^{(i)} = \{\zeta\beta_1^{(i)}, \eta\gamma_1^{(i)}\}$ [9] пространства $l_1^{(2)}$ с расстоянием $\rho(x^{i+1}, x^i) = |\zeta(\beta_1^{(i+1)} - \beta_1^{(i)}) + |\eta(\gamma_1^{(i+1)} - \gamma_1^{(i)})$. Предположим, что это возможно. Из (3.13) следует тогда, что $\rho(x^{i+1}, x^i) < \lambda\rho(x^i, x^{i-1})$. Далее получаем неравенство

$$\rho(x^m, x^{m+q}) < \frac{\lambda^{m-k}}{1-\lambda}\rho(x^k, x^{k-1})$$

т. е.

$$\rho(x^m, x^{m+q}) \to 0 \text{ при } m \to \infty, \ q > 0.$$

Следовательно, последовательность $\{x^i\}$ сходится в себе, и в силу полноты пространства $l_1^{(2)}$ существует элемент $x^\circ = \{\zeta\beta_1, \eta\gamma_1\} \in l_1^{(2)}$, являющийся пределом этой последовательности. Формулы (3.2) и (3.3) после подстановки в них вместо $\beta_k^{(i)}$ и $\gamma_k^{(i)}$ величин β_k и γ_k снова практически переходят в (2.2) и (1.3).

Покажем теперь, что можно найти значения ξ, η, ζ и λ, удовлетворяющие неравенствам $\xi > 0$, $\eta > 0$, $\zeta > 0$, $0 < \lambda < 1$.

Система уравнений (3.12) — линейная, однородная. Для существования нетривиального решения этой системы ее детерминант должен обращаться в нуль, что дает квадратное уравнение для определения величины λ, корни которого

$$\lambda = {}^1/_2 \{\beta + \delta + \alpha\gamma \pm \sqrt{(\beta + \delta + \alpha\gamma)^2 - 4\beta\delta}\} \quad (\lambda_1 < \lambda_2)$$

Легко видеть, что оба корня — действительные и положительные числа (так как α, β, γ и σ положительны). Оба корня меньше единицы, если выполнено условие

$$\beta + \delta + \alpha\gamma - \beta\delta < 1 \tag{3.14}$$

Отметим, что для случая $h = 0$, если рассмотреть уравнения (3.4), соответствующее условие имеет вид $\alpha\gamma < 1$.

Далее, считая, что $\eta > 0$, из уравнений (3.12) получаем, что $\zeta > 0$ и $\xi = (\lambda - \delta)\,\eta\alpha^{-1} > 0$. Оказывается, что $\lambda_1 < \delta$, $\lambda_2 > \delta$. В связи с этим полагаем $\lambda = \lambda_2$, $\xi = (\lambda_2 - \delta)\,\eta\alpha^{-1}$, и условие (3.13), где $0 < \lambda < 1$, выполняется.

Методом последовательных приближений можно показать, что при достаточно малых $\beta_1^{(0)}$ и $\gamma_1^{(0)}$ добавки, возникающие от замены точных уравнений (3.5) $(s \to \infty)$ укороченными, также стремятся к пределам. Пределы, к которым стремятся решения точных уравнений, единственны.

Таким образом, в пределе при $t \to \infty$ решение $u(x, t)$ рассмотренной задачи при условиях $\varphi(-l) < u_*$, $0 < \sigma < \nu_1$, $-\nu_1 < \vartheta < 0$, $\sigma - \vartheta < \nu_1$, $F > 0$, где F дано формулой (3.10), и при выполнении неравенства (3.14) стремится к периодическому решению соответствующей задачи.

Поступила 1 VI 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Неймарк Ю. И., Кубланов И. М. Исследование периодических режимов и их устойчивости для простейшей распределенной системы релейного регулирования температуры. Автоматика и телемеханика, 1953, т. 14, вып. 1.
2. Горьков Ю. П. О периодических решениях параболических уравнений. Дифференциальные уравнения, 1966, т. 2, № 7.
3. Кочина Н. Н. Об одном решении нелинейного уравнения диффузии. ПММ, 1964, т. 28, вып. 4
4. Кочина Н. Н. О решении одной задачи диффузии с нелинейным граничным условием. Докл. АН СССР, 1967, т. 174, № 2.
5. Кочина Н. Н. Некоторые решения неоднородного уравнения диффузии. Докл. АН СССР, 1969, т. 186, № 1.
6. Кочина Н. Н. Об изменении уровня грунтовых вод при поливах. ПМТФ, 1971, вып. 4.
7. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. М.— Л., Гостехтеориздат, 1949.
8. Кочина Н. Н. О периодических режимах некоторых распределенных систем. Докл. АН СССР, 1965, т. 165, № 5.
9. Люстерник Л. А., Соболев В. И. Элементы функционального анализа, М., «Наука», 1965.
10. Колесов Ю. С. Периодические решения релейных систем с распределенными параметрами. Мат. сб., 1970, т. 83, вып. 3.