Прикладная математика и механика. Том 35, 1971

ОБ ИССЛЕДОВАНИИ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ, БЛИЗКИХ К КРИТИЧЕСКИМ

В. Г. Веретенников

(Москва)

В работах [1-3] дано доказательство принципа сведения в теории устойчивости при исследовании критических случаев. В предлагаемой работе принцип сведения доказывается для случаев, близких к критическим [4].

Решена задача об устойчивости в одном существенно особенном случае.

Исследована устойчивость гирогоризонта.

1. Рассматривается действительная автономная система дифференциальных уравнений возмущенного движения вида

$$x_\nu^{\bullet} = \sum_{l=1}^{r} a_{\nu l} x_l + X_\nu(x) \qquad (\nu = 1, \ldots, r, \ x \equiv x_1, \ldots, x_r) \tag{1.1}$$

Здесь X_ν — голоморфные функции в области

$$x_1^2 + \ldots + x_r^2 \leqslant H \tag{1.2}$$

разложения которых не содержат членов ниже второго порядка. H — некоторое конечное положительное число.

Будем предполагать, что характеристическое уравнение системы (1.1) имеет q корней с отрицательными вещественными частями, m нулевых корней и p корней с малыми по модулю вещественными частями. Заметим, что к такому виду приводится любая система с произвольным числом нулевых, чисто мнимых корней и корней с малыми положительными вещественными частями.

При этих условиях систему (1.1) с помощью линейных подстановок можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} y_s^{\bullet} &= \sum_{k=1}^{n} g_{sk} y_k + Y_s(y, z) & \delta = k_1 + \ldots + k_n, \quad s = 1, \ldots, n \\ & & j = 1, \ldots, q, \quad n = m + p \\ z_j^{\bullet} &= \sum_{i=1}^{q} p_{ji} z_i + \sum_{\delta \geqslant 2}^{\infty} A_j^{(*)} y^k + Z_j(y, z) & n + q = r, \quad y^k = y_1^{k_1} \ldots y_n^{k_n} \end{aligned} \tag{1.3}$$

Здесь y_s — критические и близкие к критическим переменные, z_j — переменные присоединенной системы. Знак $^{(*)}$ здесь и далее заменяет индекс $k_1, \ldots, k_n$.

Устойчивость или неустойчивость системы (1.1) будем определять следующим образом [4]: если в пространстве $x_1, \ldots, x_r$ можно указать замкнутую область G, обладающую тем свойством, что возмущения $x_1, \ldots, x_r$, рассматриваемые как функции времени, удовлетворяющие уравнениям возмущенного движения, не выходят за эту область для любых значений $t \geqslant t_0$, если только их начальные значения находились внутри или на границе этой области, то невозмущенное движение устойчиво, в противном случае оно неустойчиво.

Рассматриваемая в дальнейшем задача сводится к получению необходимых и достаточных условий, наложенных на правые части системы уравнений возмущенного движения, чтобы область устойчивости G, несмотря на наличие корней характеристического уравнения с положительными вещественными частями, находилась в достаточно малой окрестности начала координат и все возмущенные движения, начинаясь в области G, с течением времени приближались к невозмущенному движению.

При решении этой задачи необходимо установить для системы (1.1) существование области G, предполагая число H в (1.2) достаточно малым, и указать, хотя бы приближенно, способ определения границ области устойчивости. В противном случае необходимо показать, что в достаточно малой окрестности начала координат области устойчивости с указанными свойствами не существует и движение неустойчиво.

Эта задача представляет интерес для приложений и в общей постановке решает вопрос об «опасных» и «безопасных» границах области устойчивости [5].

Очевидно, область G будет областью устойчивости с указанными выше свойствами, если в ней существует знакоопределенная функция Ляпунова V [6] со знакоопределенной производной противоположного знака; напротив, области G нет, если в (1.2) существует функция Четаева [7]. Предполагается, что знак производных этих функций определяется формами не выше N-го порядка независимо от форм более высокого порядка.

Покажем, что наличие или отсутствие области G в достаточно малой окрестности начала координат может быть установлено по «укороченной» системе — системе только с критическими и близкими к критическим переменными, полученной из системы (1.3) путем известных преобразований [8].

Проводя эти преобразования при условии достаточной малости положительных вещественных частей корней характеристического уравнения, вместо системы (1.3) получим

$$\eta_s^{\boldsymbol{\cdot}} = \sum_{k=1}^{n} g_{sk}\eta_k + \sum_{\delta\geqslant 2}^{\infty} B_s^{(*)}\eta^k + \sum_{\delta\geqslant N+1}^{\infty} P_s^{(*)}(\zeta)\,\eta^k + H_s(\eta,\zeta) \tag{1.4}$$

$$\zeta_j^{\boldsymbol{\cdot}} = \sum_{i=1}^{q} p_{ji}\zeta_i + \sum_{\delta\geqslant N+1}^{\infty} A_{j1}^{(*)}\eta^k + \sum_{\delta\geqslant 1}^{\infty} Q_j^{(*)}(\zeta)\,\eta^k + E_j(\eta,\zeta)$$

Здесь функции H_s, E_j обращаются в нуль при $\zeta_1 = \ldots = \zeta_q = 0$ и не содержат линейных членов от этих переменных. $B_s^{(*)}$, $A_{j1}^{(*)}$ — постоянные коэффициенты, $P_s^{(*)}$ и $Q_j^{(*)}$ — линейные формы от $\zeta_1, \ldots, \zeta_q$.

Теорема. **Если для укороченной системы**

$$\dot{\eta}_s = \sum_{k=1}^{n} q_{sk}\eta_k + \sum_{\delta\geqslant 2}^{N} B_s^{(*)}\eta^k \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{1.5}$$

в достаточно малой окрестности начала координат существует область устойчивости или, напротив, она неустойчива, и это установлено с помощью функций Ляпунова или Четаева, знак производных которых определяется формами не выше N-го порядка независимо от форм более высокого порядка, то и для полной системы также существует область устойчивости или система неустойчива.

Действительно, в этом случае функцией Ляпунова или Четаева для полной системы будет функция

$$V = V_1(\eta) + V_2(\zeta) \tag{1.6}$$

Здесь V_1 — функция Ляпунова или Четаева для системы (1.5), а V_2 определяется из уравнения

$$\sum_{j=1}^{q} \frac{\partial V_2}{\partial \zeta_j}(p_{j1}\zeta_1 + \ldots + p_{jq}\zeta_q) = M(\zeta_1^2 + \ldots + \zeta_q^2) \tag{1.7}$$

При определенно-положительной функции V_1 с определенно-отрицательной в области G- производной число $M < 0$.

Производная функции (1.6) в силу системы (1.4) будет

$$V' = V_1'(\eta) + M(\zeta_1^2 + \ldots + \zeta_q^2) + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V_1}{\partial \eta_s}\Big[\sum_{\delta\geqslant N+1}^{\infty} B_s^{(*)}\eta^k +$$

$$+ \sum_{\delta\geqslant N+1}^{\infty} P_s^{(*)}(\zeta)\eta^k + H_s(\eta, \zeta)\Big] + \sum_{j=1}^{q} \frac{\partial V_2}{\partial \zeta_j}\Big[\sum_{\delta\geqslant N+1}^{\infty} A_{j1}^{(*)}\eta^k +$$

$$+ \sum_{\delta\geqslant 1}^{\infty} Q_j^{(*)}(\zeta)\eta^k + E_j(\eta, \zeta)\Big] \tag{1.8}$$

Это выражение можно представить в виде

$$V' = V_1' + M(\zeta_1^2 + \ldots + \zeta_q^2) + \sum_{\delta\geqslant N+1}^{\infty} R^{(*)}(\zeta)\eta^k + \sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{q} \zeta_i\zeta_j F_{ij}(\eta, \zeta) \tag{1.9}$$

В рассматриваемой области изменения переменных знак V' определяется первыми двумя членами, независимо от членов с функциями $R^{(*)}$ и F_{ij}.

Следовательно, для полной системы также существует область устойчивости.

Предположим теперь, что V_1 — функция Четаева для системы (1.5). Тогда или область $V_1 > 0$ будет заключена внутри области $V_1' > 0$ или в области $V_1 V_1' > 0$ можно выделить область, где некоторая функция $W \geqslant 0$, причем на границе ($W = 0$) значения W' одного знака.

Предполагая, что область $V_1 > 0$ заключена внутри области $V_1' > 0$, функцию V_2 определим из (1.7) при $M > 0$. Производную функции V по уравнениям (1.4) также можно представить в виде (1.9). Необходимо также учесть, что функции F_{ij} могут не обращаться в нуль при равенстве нулю всех переменных. Определим число $M > 0$, так чтобы функция

$$L(\zeta)=M(\zeta_1^2+\ldots+\zeta_q^2)+\sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{q}\zeta_i\zeta_jF_{ij}^{(0)}$$

была определенно-положительной квадратичной формой, при $F_{ij}^{(0)}=F_{ij}(0,\ 0)$. Представляя $F_{ij}=F_{ij}^{(0)}+F_{ij}^{(1)}(\zeta,\ \eta)$, запишем выражение (1.9) в виде

$$V'=V_1'(\eta)+L(\zeta)+\sum_{\delta\geqslant N+1}^{\infty}R^{(*)}(\zeta)\eta^k+\Sigma\Sigma\,\zeta_i\zeta_jF_{ij}^{(1)}(\zeta,\ \eta)$$

Последние суммы при достаточно малых η_s, ζ_j не изменят знака V', определяемого первыми двумя членами. Следовательно, при $V>0$ имеем $V'>0$, так как функция $V_2<0$, и V — функция Четаева для всей системы. Аналогично можно провести доказательство для функций V и W, удовлетворяющих теореме Четаева.

Способ приближенной оценки границ области устойчивости G для системы, содержащей чисто мнимые корни и комплексные корни с малыми положительными вещественными частями, изложен в работе [9].

2. Как показано в п. 1, по укороченной системе можно заключить о существовании области G только тогда, когда задача решается формами конечного порядка N. Как известно, последнее имеет место в случае, если ряды u_j, определяемые из системы

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial u_j}{\partial y_s}\left[\sum_{k=1}^{n}g_{sk}y_k+Y_s(y,u)\right]=\sum_{i=1}^{q}p_{ji}u_i+\Sigma A_j^{(*)}y^k+Z_j(y,u)\qquad(2.1)$$

не обращают тождественно в нуль выражений $Y_s(y,\ u)$. При $Y_s(y,\ u)\equiv 0$ формы любого конечного порядка задачи об устойчивости не решают, и необходимо рассматривать полную систему (1.3).

Пусть $Y_s(y,\ u)\equiv 0$; рассмотрим этот существенно особенный случай, предполагая, что уравнение $|\,g_{sk}-\delta_{sk}\nu\,|=0$ или не имеет кратных корней, или при наличии кратных корней каждому такому корню отвечает столько групп решений, какова его кратность.

Преобразуем систему (1.3), заменяя

$$z_j=\zeta_j+u_j(y)\qquad(2.2)$$

Здесь u_j — ряды, удовлетворяющие системе уравнений (2.1). При наших предположениях относительно корней ν_s и при $Y_s(y,\ u)\equiv 0$ ряды u_j — абсолютно сходящиеся в рассматриваемой области изменения переменных на основании теоремы Г. В. Каменкова [8].

В результате преобразования (2.2) система уравнений (1.3) примет вид

$$y_s^{\bullet}=\sum_{k=1}^{n}g_{sk}y_k+\sum_{j=1}^{q}Y_{sj}(y)\zeta_j+Y_s(y,\zeta)\qquad(2.3)$$

$$\zeta_j^{\bullet}=\sum_{i=1}^{q}p_{ji}\zeta_i+\sum_{i=1}^{q}Z_{ji}(y)\zeta_i+Z_j^1(y,\zeta)$$

Здесь функции Y_{sj}, Z_{ji} обращаются в нуль при $y_1=\ldots=y_n=0$, а функции Y_s и Z_j^1 не содержат линейных членов в отношении ζ_j. Преобразуя систему (2.3) к каноническому виду, получим

$$
\begin{aligned}
&\xi_s^{\cdot} = \mu_s\xi_s - \lambda_s\eta_s + \sum_{j=1}^{q} \Xi_{sj}(\xi, \eta, r, \rho)\zeta_j + \Xi_s(\xi, \eta, r, \rho, \zeta)\\
&\eta_s^{\cdot} = \mu_s\eta_s + \lambda_s\xi_s + \sum_{j=1}^{q} H_{sj}(\xi, \eta, r, \rho)\zeta_j + H_s(\xi, \eta, r, \rho, \zeta)\\
&r_k^{\cdot} = \mu_{k1}r_k + \sum_{j=1}^{q} R_{kj}(\xi, \eta, r, \rho)\zeta_j + R_k(\xi, \eta, r, \rho, \zeta) \qquad (2.4)\\
&\rho_\mu^{\cdot} = \sum_{j=1}^{q} S_{\mu j}(\xi, \eta, r, \rho)\zeta_j + S_\mu(\xi, \eta, r, \rho, \zeta)\\
&\zeta_j^{\cdot} = \sum_{i=1}^{q} p_{ji}\zeta_i + \sum_{i=1}^{q} Q_{ji}(\xi, \eta, r, \rho)\zeta_i + Z_j(\xi, \eta, r, \rho, \zeta)
\end{aligned}
$$

$(s = 1, \ldots, l,\ k = 1, \ldots, g,\ 2l + g = p,\ \mu = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, q,\ \mu_s > 0,\ \mu_{k1} > 0)$

Введем новые переменные x_s, y_s, ν_k, χ_μ следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&\xi_s = x_s + \Sigma\zeta_j u_{sj}, \qquad \eta_s = y_s + \Sigma\zeta_j v_{sj} \qquad (2.5)\\
&r_k = \nu_k + \Sigma\zeta_j w_{kj}, \qquad \rho_\mu = \chi_\mu + \Sigma\zeta_j f_{\mu j}
\end{aligned}
$$

и определим функции u_{sj}, v_{sj}, w_{kj}, $f_{\mu j}$ из уравнений

$$
\sum_{\nu=1}^{l}\left[\frac{\partial F_\alpha}{\partial \xi_\nu}(\mu_\nu\xi_\nu - \lambda_\nu\eta_\nu) + \frac{\partial F_\alpha}{\partial \eta_\nu}(\mu_\nu\eta_\nu + \lambda_\nu\xi_\nu)\right] + \sum_{\delta=1}^{g}\frac{\partial F_\alpha}{\partial r_\delta}\mu_{\delta 1}r_\delta = F_{\alpha\alpha}
$$

$$(\alpha = 1, 2, 3, 4)$$

$$
\begin{aligned}
&F_1 = u_{sj},\ F_{11} = -\sum_{i=1}^{q} u_{si}p_{ij} - \lambda_s v_{sj} + \mu_s u_{sj} + \Xi_{sj} - \Sigma u_{si}Q_{ij}\\
&F_2 = v_{sj},\ F_{22} = -\Sigma v_{si}p_{ij} + \lambda_s u_{sj} + \mu_s v_{sj} + \mathrm{H}_{sj} - \Sigma v_{si}Q_{ij} \qquad (2.6)\\
&F_3 = w_{kj},\ F_{33} = -\Sigma w_{ki}p_{ij} + \mu_{k1}w_{kj} + R_{kj} - \Sigma w_{ki}Q_{ij}\\
&F_4 = f_{\mu j},\ F_{44} = -\Sigma f_{\mu i}p_{ij} + S_{\mu j} - \Sigma f_{\mu i}Q_{ij}
\end{aligned}
$$

Из системы (2.6) функции u_{sj}, v_{sj}, w_{kj}, $f_{\mu j}$ на основании той же теоремы [8] определятся в виде абсолютно сходящихся рядов. В результате преобразования (2.5) система (2.4) примет вид

$$
\begin{aligned}
&x_s^{\cdot} = \mu_s x_s - \lambda_s y_s + X_s(x, y, \nu, \chi, \zeta),\ y_s^{\cdot} = \mu_s y_s + \lambda_s x_s + Y_s(x, y, \nu, \chi, \zeta)\\
&\nu_k^{\cdot} = \mu_{k1}\nu_k + P_k(x, y, \nu, \chi, \zeta),\ \chi_\mu^{\cdot} = \theta_\mu(x, y, \nu, \chi, \zeta) \qquad (2.7)\\
&\zeta_j^{\cdot} = \Sigma p_{ji}\zeta_i + Z_j^1(x, y, \nu, \chi, \zeta)
\end{aligned}
$$

Здесь X_s, Y_s, P_k, θ_μ, Z_j^1 обращаются в нуль при $\zeta_1 = \ldots = \zeta_q = 0$, а первые четыре функции, кроме того, не содержат линейных членов в отношении ζ_j.

Функцию Четаева для системы (2.7) возьмем в виде

$$
V = {}^1/_2\Sigma(x_s^2 + y_s^2) + {}^1/_2\Sigma\nu_k^2 + \Sigma\chi_\mu^2 + W(\zeta) \qquad (2.8)
$$

вычисляя определенно-отрицательную квадратичную форму W переменных ζ_j из уравнения

$$\Sigma \frac{\partial W}{\partial \zeta_j} (p_{j1}\zeta_1 + \ldots + p_{jq}\zeta_q) = \zeta_1^2 + \ldots + \zeta_q^2$$

Тогда производную V' в силу системы (2.7) можно представить в виде

$$V' = \Sigma\mu_s (x_s^2 + y_s^2) + \Sigma\mu_{k1}\nu_k^2 + \Sigma\zeta_j^2 + \Sigma\Sigma\zeta_i\zeta_j F_{ij}$$

Здесь функции F_{ij} обращаются в нуль при $x_s = y_s = \nu_k = \chi_\mu = \zeta_j = 0$.

В области $\Sigma\chi_\mu^2 \leqslant |W|$, $V > 0$ функция $V' > 0$ при значениях переменных, удовлетворяющих неравенству

$$|\Sigma\Sigma\zeta_i\zeta_j F_{ij}| < \Sigma\zeta_j^2$$

Таким образом, для системы (1.1), удовлетворяющей условиям п. 2, в достаточно малой окрестности начала координат области G не существует, и движение неустойчиво.

3. Пример. Используя результаты работы [9], исследуем устойчивость движения гирогоризонта со смещенным относительно точки подвеса центром тяжести без учета вращения Земли. Предполагается, что коррекция главной оси ротора гирогоризонта к направлению местной вертикали осуществляется как за счет маятникового корректирующего устройства, так и за счет момента от смещения центра тяжести. Уравнения движения главной оси ротора гирогоризонта к местной вертикали представим в виде (обозначения имеют тот же смысл, что и в [10])

$$J_{\text{в}} v^{\cdot\cdot} + J\Omega\psi^{\cdot} = -Glv + M_{\text{кв}}, \qquad J_{\text{с}}\psi^{\cdot\cdot} - J\Omega v^{\cdot} = -Gl\psi + M_{\text{кс}} \tag{3.1}$$

$$J_1\varepsilon_1^{\cdot\cdot} + \varkappa_1\varepsilon_1^{\cdot} + k_1\varepsilon_1 = M_{g1}(\psi^{\cdot} - \varepsilon_1^{\cdot}), \qquad J_2\varepsilon_2^{\cdot\cdot} + \varkappa_2\varepsilon_2^{\cdot} + k_2\varepsilon_2 = M_{g2}(v^{\cdot} - \varepsilon_2^{\cdot})$$

Оси подвески маятников при отклонении главной оси ротора от вертикали вращаются с угловыми скоростями $\psi^{\cdot}$ и $v^{\cdot}$. Рассматривая движение системы только до момента, когда $\psi^{\cdot}$ или $v^{\cdot}$ будет равна нулю, считаем каждый из маятников маятником Фроуда [11] с характеристиками

$$M_{g1}(\psi^{\cdot}) = l - l_1\psi^{\cdot}, \qquad M_{g2}(v^{\cdot}) = m - m_1 v^{\cdot}$$

Перепишем уравнения колебаний маятников в виде

$$J_1\varphi_1^{\cdot\cdot} - (l_1 - \varkappa_1)\varphi_1^{\cdot} + k_1\varphi_1 = -l_1\psi^{\cdot}, \qquad J_2\varphi_2^{\cdot\cdot} - (m_1 - \varkappa_2)\varphi_2^{\cdot} + k_2\varphi_2 = -m_1 v^{\cdot}$$

Как в случае с маятником Фроуда предполагается, что

$$(l_1 - \varkappa_1) / J_1 = 2\mu_2 > 0, \qquad (m_1 - \varkappa_2) / J_2 = 2\mu_3 > 0$$

при этом μ_2 и μ_3 — малые положительные числа.

Аппроксимируя $M_{\text{кв}}$ и $M_{\text{кс}}$ как [12]

$$M_{\text{кв}} = -[q_1(\psi - \varphi_1)^3 + q_2(\psi - \varphi_1)^5 + \ldots], \qquad M_{\text{кс}} = h_1(v - \varphi_2)^3 + h_2(v - \varphi_2)^5 + \ldots$$

$$(q_1 > 0,\ h_1 > 0)$$

вводя

$$k_1 / J_1 = \lambda_2^2 + \mu_2^2, \quad k_2/J_2 = \lambda_3^2 + \mu_3^2, \quad l_1/J_1 = c_1, \quad m_1/J_2 = c_2$$

$$Gl/J\Omega = \lambda_1, \quad \psi = x_1, \quad v = y_1, \quad \varphi_1 = y_2, \quad y_2^{\cdot} = \mu_2 y_2 + \lambda_2 x_2, \quad \varphi_2 = y_3$$

$$y_3^{\cdot} = \mu_3 y_3 + \lambda_3 x_3, \quad q_1/J\Omega = a_1, \quad h_1/J\Omega = b_1, \quad c_1\lambda_1/\lambda_2 = a_2$$

$$c_1 q_1/\lambda_2 J\Omega = b_2, \quad c_2\lambda_1/\lambda_3 = a_3, \quad c_2 h_1/\lambda_3 J\Omega = b_3$$

и пренебрегая в (3.1) нутационными членами, получим систему уравнений

$$\begin{gathered} x_1^{\cdot} = -\lambda_1 y_1 - a_1(x_1 - y_2)^3 - \ldots, \quad y_1^{\cdot} = \lambda_1 x_1 - b_1(y_1 - y_3)^3 - \ldots \\ x_2^{\cdot} = \mu_2 x_2 - \lambda_2 y_2 + a_2 y_1 + b_2(x_1 - y_2)^3 + \ldots, \quad y_2^{\cdot} = \mu_2 y_2 + \lambda_2 x_2 \\ x_3^{\cdot} = \mu_3 x_3 - \lambda_3 y_3 - a_3 x_1 + b_3(y_1 - y_3)^3 + \ldots, \quad y_3^{\cdot} = \mu_3 y_3 + \lambda_3 x_3 \end{gathered} \tag{3.2}$$

Характеристическое уравнение, соответствующее системе (3.2), имеет две пары комплексно-сопряженных корней с малыми положительными вещественными частями и пару чисто мнимых корней $\pm i\lambda_1$.

Заменой переменных

$$\begin{gathered} x_1 = \xi_1, \quad y_1 = \eta_1, \quad x_2 = \xi_2 + \alpha_1\eta_1 + \beta_1\xi_1, \quad y_2 = \eta_2 + \alpha_2\eta_1 + \beta_2\xi_1 \\ x_3 = \xi_3 + \alpha_3\xi_1 + \beta_3\eta_1, \quad y_3 = \eta_3 + \alpha_4\xi_1 + \beta_4\eta_1 \end{gathered}$$

преобразуем систему (3.2) к каноническому виду

$$\xi_s^{\cdot} = \mu_s\xi_s - \lambda_s\eta_s + \Xi_s(\xi, \eta), \qquad \eta_s^{\cdot} = \mu_s\eta_s + \lambda_s\xi_s + H_s(\xi, \eta)$$

$$\begin{gathered} \Xi_1 = -a_1 X_1 + \ldots, H_1 = -b_1 Y_1 + \ldots, \qquad X_1 = (\xi_1 - \eta_2 - \alpha_2\eta_1 - \beta_2\xi_1)^3 \\ Y_1 = (\eta_1 - \eta_3 - \alpha_4\xi_1 - \beta_4\eta_1)^3, \qquad \Xi_2 = (b_2 + \beta_1 a_1) X_1 + \alpha_1 b_1 Y_1 + \ldots \\ H_2 = \alpha_2 b_1 Y_1 + \beta_2 a_1 X_1 + \ldots, \qquad \Xi_3 = \alpha_3 a_1 X_1 + (b_3 + \beta_3 b_1) Y_1 + \ldots \\ H_3 = \alpha_4 a_1 X_1 + \beta_4 b_1 Y_1 + \ldots \qquad (s = 1, 2, 3, \ \mu_1 = 0) \end{gathered} \tag{3.3}$$

Коэффициенты $\alpha_1, \ldots, \beta_4$ без затруднений определяются через коэффициенты системы (3.2). Отметим, что

$$\begin{gathered} \beta_2 = -2a_2\lambda_1\lambda_2\mu_2/\Delta, \qquad \beta_4 = -2a_3\lambda_1\lambda_3\mu_3/\Delta \\ \Delta = -[(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)^2 + 2\mu_2^2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) + \mu_2^4] \end{gathered} \tag{3.4}$$

Коэффициенты β_2 и β_4 будут положительны; их легко выбрать меньшими единицы, Проводя далее преобразования, аналогичные проведенным в [9], получим систему

$$r_s^{\cdot} = \mu_s r_s + r_s(a_{s1}r_1^2 + a_{s2}r_2^2 + a_{s3}r_3^2) + \ldots \quad (r_s \geqslant 0, \ s = 1, 2, 3, \ \mu_1 = 0) \tag{3.5}$$

$$\begin{gathered} a_{11} = -{}^3/_8\{a_1(1 - \beta_2)[(1 - \beta_2)^2 + \alpha_2^2] + b_1(1 - \beta_4)[\alpha_4^2 + (1 - \beta_4)^2]\} < 0 \\ a_{12} = -{}^3/_4 a_1(1 - \beta_2) < 0, \quad a_{13} = -{}^3/_4 b_1(1 - \beta_4) < 0 \\ a_{21} = -{}^3/_4[\beta_2 a_1(1 - \beta_2)^2 + \beta_2 a_1\alpha_2^2] < 0, \qquad a_{22} = -{}^3/_8 a_1\beta_2 < 0, \qquad a_{23} = 0 \\ a_{31} = -{}^3/_4[\beta_4 b_1(1 - \beta_4)^2 + \beta_4 b_1\alpha_4^2] < 0, \qquad a_{33} = -{}^3/_8 b_1\beta_4 < 0, \qquad a_{32} = 0, \end{gathered}$$

Из первого уравнения системы (3.5) следует, что по координате r_1, а следовательно и по координатам ψ и v, имеет место асимптотическая устойчивость. По координатам x_2, y_2 и x_3, y_3 существуют области неустойчивости. Внешние границы этих областей приближенно можно оценить равенствами

$$r_{20} = \sqrt{-\mu_2/a_{22}}, \qquad r_{30} = \sqrt{-\mu_3/a_{33}}$$

Соответствующим выбором параметров системы значения r_{20}, r_{30} могут быть сделаны достаточно малыми. Одновременно значения r_{20}, r_{30} приближенно определяют и внутреннюю границу области устойчивости по r_2, r_3. Для оценки внешней границы области устойчивости, когда это возможно сделать по членам конечного порядка, необходимо в системе уравнений (3.5) выписать члены более высокого порядка.

Заметим, что с того момента, когда ось ротора гирогоризонта придет в положение равновесия, уравнения колебаний маятников будут иметь положительные коэффициенты при первых производных и их движение будет асимптотически устойчивым.

Поступила 29 III 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Каменков Г. В. Об устойчивости движения в одном особенном случае. Тр. Казанск. авиац. ин-та, 1935, № 4.
2. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. М., «Наука», 1966.
3. Плисс В. А. Принцип сведения в теории устойчивости движения. Изв. АН СССР, сер. матем., 1964, т. 28, № 6.
4. Каменков Г. В. Об устойчивости движения в случаях, близких к критическим. Тр. ун-та дружбы народов им. П. Лумумбы, сер. теор. механ., 1963, т. 1, вып. 1.
5. Баутин Н. Н. Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости. М.— Л., Гостехиздат, 1950.
6. Ляпунов А. М. Собр. соч., т. 2, Общая задача об устойчивости движения. М., Изд-во АН СССР, 1956.
7. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. М., Гостехиздат, 1955.
8. Каменков Г. В. Об устойчивости периодических движений. ПММ, 1967, т. 31, вып. 1.
9. Веретенников В. Г. Области устойчивости в одном близком к критическому случае. ПММ, 1971, т. 35, вып. 1.
10. Павлов В. А. Теория гироскопа и гироскопических приборов. Л., «Судостроение», 1964.
11. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. Физматгиз, 1959.
12. Веретенников В. Г. О стабилизации нейтральных систем. Тр. ун-та дружбы народов им. П. Лумумбы. сер. теор. механ., 1968, т. 27, вып. 5.