Прикладная математика и механика. Том 35, 1971

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ

М. Байбазаров

(Свердловск)

Рассматриваются игровые задачи, в которых платой является некоторая функция конечного состояния конфликтно управляемой системы. Сформулированы достаточные условия существования оптимальных минимаксных и максиминных стратегий игроков. Показано, что оптимальные стратегии существуют, если соответствующее уравнение Беллмана имеет решение. Рассмотрен вопрос о существовании оптимальных стратегий как в классе детерминированных, так и в классе смешанных стратегий.

Приведенные рассуждения опираются на результаты работ [1, 2]. Рассматриваемые вопросы примыкают к исследованиям, приведенным в работах [2–5].

1. Пусть движение конфликтно управляемой системы описывается нелинейным уравнением

$$dx/dt = f(t, x, u, v) \tag{1.1}$$

Здесь x — n-мерный фазовый вектор, u и v — управляющие воздействия первого и второго игроков соответственно, $f(t, x, u, v)$ — непрерывная вектор-функция, удовлетворяющая условию Липшица по x.

Реализации $u[t]$ и $v[t]$ управлений u и v стеснены условиями $u[t] \in P(t)$, $v[t] \in Q(t)$, где $P(t)$ и $Q(t)$ — замкнутые, ограниченные и выпуклые в соответствующих векторных пространствах множества, изменяющиеся непрерывно с изменением t.

Предполагается, что правая часть системы (1.1) удовлетворяет условию

$$|x'f(t, x, u, v)| \leqslant \lambda(1 + \|x\|^2), \quad u \in P(t), \quad v \in Q(t), \quad t \in [t_0, \vartheta]$$

Плата представляет собой величину $w(x[\vartheta])$, определяемую в конечный момент времени $t = \vartheta$ по реализовавшейся позиции $x[\vartheta]$. Функция $w(x)$ предполагается непрерывной. Таким образом, рассматривается игра с фиксированным моментом окончания $t = \vartheta$.

Первый игрок стремится минимизировать величину $w(x[\vartheta])$ при самом неблагоприятном поведении второго игрока. Задача второго игрока — гарантировать завершение игры с наибольшим возможным значением платы.

Подчеркнем, что управляющие воздействия u и v должны формироваться по принципу обратной связи так, чтобы реализующиеся значения их $u[t]$ и $v[t]$ в каждый момент времени t определялись на основании реализовавшейся в этот момент позиции $\{t, x[t]\}$.

Чтобы охватить разрывные законы управления и порождаемые ими скользящие режимы, введем определения допустимых стратегий первого и второго игроков, классы которых будем обозначать $\mathbf{U}_1$ и $\mathbf{V}_1$ соответственно.

Пусть каждой позиции $\{t, x\}$ сопоставлено некоторое множество $U(t, x)$ из r-мерных векторов u. Предполагается, что множество $U(t, x)$ при любых $\{t, x\}$ замкнуто и удовлетворяет включению $U(t, x) \subset P(t)$, а неоднозначная вектор-функция $U = U(t, x)$ полунепрерывна сверху относительно включения по t и x. Последнее требование означает, что для каждой позиции $\{t_*, x_*\}$ и для любого числа $\alpha > 0$ найдется такое $\beta > 0$, что для всех x и t, удовлетворяющих неравенствам $|t - t_*| \leqslant \beta \; \|x - x_*\| \leqslant \beta$, имеет место включение $U(t, x) \subset U_\alpha(t_*, x_*)$, где $U_\alpha(t, x)$ — α-окрестность множества $U(t, x)$.

Будем говорить, что функции $U = U(t, x)$ задают допустимые стратегии первого игрока. Аналогичным образом определяется класс функций $V = V(t, x)$, которые задают допустимые стратегии второго игрока.

Определим движения системы (1.1), порождаемые парой стратегий

$$U \div U(t, x) \in \mathbf{U}_1, \qquad V \div V(t, x) \in \mathbf{V}_1$$

Здесь символ $\div$ означает соответствие между стратегиями $U \in \mathbf{U}_1$ и $V \in \mathbf{V}_1$ и задающими эти стратегии функциями $U = U(t, x)$, $V = V(t, x)$.

Обозначим через $F(t, x, U, V)$ выпуклую оболочку множества всех векторов вида $f(t, x, u, v)$, где $u \in U(t, x)$, $v \in V(t, x)$. Движением системы (1.1) $x[t] = x[t; t_0, x_0, U, V]$, порожденным парой стратегий $U \div U(t, x) \in \mathbf{U}_1$, $V \div V(t, x) \in \mathbf{V}_1$ назовем всякую абсолютно непрерывную вектор-функцию $x[t]$, $t \geqslant t_0$, которая при почти всех $t \geqslant t_0$ удовлетворяет условию

$$dx / dt \in F(t, x[t], U, V), \qquad x[t_0] = x_0$$

Стратегии $U_\tau \div P(t)$, $V_\tau \div Q(t)$ будем называть тривиальными стратегиями первого и второго игроков соответственно.

Заметим, что множество траекторий $x[t] = x[t; t_0, x_0, U_*, V_\tau]$, где U_* — некоторая стратегия первого игрока, содержит любое движение $x[t] = x[t; t_0, x_0, U_*, V]$, где V — произвольная стратегия второго игрока. Аналогичное обстоятельство имеет место для множества движений $x[t] = x[t; t_0, x_0 U_\tau, V_*]$. Существование движений $x[t] = x[t; t_0, x_0, U, V]$, продолжаемых до момента $t = \vartheta$, вытекает из результатов теории дифференциальных уравнений с разрывной правой частью [1].

2. Рассмотрим решение игровых минимаксных максиминных задач для классов стратегий игроков $\mathbf{U}_1$ и $\mathbf{V}_1$. Минимаксной стратегией первого игрока $U^\circ \div U(t, x) \in \mathbf{U}_1$ будем называть стратегию, удовлетворяющую условию

$$\min_U \max_x w(x[\vartheta; t_0, x_0, U, V_\tau]) = \max_x w(x[\vartheta; t_0, x_0, U^\circ, V_\tau]) \qquad (2.1)$$

Здесь в первом случае максимум вычисляется по всем точкам $x[\vartheta] = x[\vartheta; t_0, x_0, U, V_\tau]$, а во втором случае — по всем точкам $x[\vartheta] = x[\vartheta; t_0, x_0, U^\circ, V_\tau]$.

Аналогичным образом, максиминная стратегия второго игрока задается соотношением

$$\max_V \min_x w(x[\vartheta; t_0, x_0, U_\tau, V]) = \min_x w(x[\vartheta; t_0, x_0, U_\tau, V^\circ]) \qquad (2.2)$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть существует непрерывно-дифференцируемая функция $\gamma(t, x)$, которая при всех t и x удовлетворяет уравнению

$$\min_u \max_v \left(\frac{\partial\gamma(t,x)}{\partial t} + \operatorname{grad}_x{}'\,\gamma(t,x)\, f(t,x,u,v)\right)_{u,v} = 0 \tag{2.3}$$

$$(u \in P(t),\quad v \in Q(t),\quad t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta)$$

и краевому условию

$$\gamma(\vartheta, x) = w(x[\vartheta]) \tag{2.4}$$

Пусть $U^\circ(t, x)$ — множество векторов u°, доставляющих минимум в (2.3). Тогда стратегия $U^\circ \div U^\circ(t, x) \in \mathbf{U}_1$ будет минимаксной стратегией первого игрока.

Доказательство. Покажем прежде всего, что $U \div U^\circ(t, x)$ принадлежит множеству $\mathbf{U}_1$. Условие $U^\circ(t, x) \subset P(t)$ вытекает из определения функции $U^\circ = U^\circ(t, x)$. Проверим выполнение условия полунепрерывности функции $U^\circ = U^\circ(t, x)$. Предположим противное, т. е. пусть существует точка $p = \{t_*, x_*\}$, последовательность $p_k = \{t_k, x_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$, сходящаяся к точке p_*, и число $\alpha > 0$ такие, что множества $U^\circ(t_k, x_k)$ не содержатся в множестве $U_\alpha^\circ(t_*, x_*)$ при всех $k = 1, 2, \ldots$.

Тогда существует последовательность $\{u_k\}$

$$u_k \in U^\circ(t_k, x_k), \qquad u_k \notin U_\alpha{}^\circ(t_*, x_*) \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

Множества $U^\circ(t_k, x_k)$ равноограничены, поэтому из последовательности u_k можно выделить сходящуюся подпоследовательность, которую для простоты обозначим по-прежнему через u_k. Пусть $u_k \to u_*$ при $k \to \infty$. Очевидно

$$u_* \notin U_\alpha{}^\circ(t_*, x_*) \tag{2.5}$$

С другой стороны, для любого элемента $u \in P(t_k)$ выполняется соотношение

$$\max_v s(p_k) f(p_k, u_k, v) \leqslant \max_v s(p_k) f(p_k, u, v) \tag{2.6}$$

$$v \in Q(t_k), \qquad s(p_k) = (\operatorname{grad}_x{}'\,\gamma(t, x[t]))_{t_k, x_k}$$

Можно показать, что функция

$$g(u, p_k) = \max_v s(p_k) f(p_k, u, v), \qquad v \in Q(t_k)$$

непрерывна относительно $\{u, p_k\}$. Поэтому, переходя в (2.6) к пределу при $k \to \infty$, получим

$$\max_v s(p_*) f(p_*, u_*, v) \leqslant \max_v s(p_*) f(p_*, u, v) \qquad v \in Q(t_*)$$

где u — произвольный элемент множества $P(t_*)$. Следовательно, $u_* \in U^\circ(t_*, x_*)$, что противоречит (2.5). Полученное противоречие доказывает полунепрерывность функции $U^\circ = U^\circ(t, x)$. Аналогичным образом можно доказать замкнутость множеств $U^\circ(t, x)$.

Докажем теперь, что построенная стратегия минимаксна. Покажем сначала, что для любого движения $x[t] = x[t; x_0, t_0, U^\circ, V_\tau]$ при почти всех $t \in [t_0, \vartheta]$ выполняется условие

$$d\gamma(t, x[t]) / dt \leqslant 0 \tag{2.7}$$

Здесь производная вычисляется вдоль движения $x[t]$. Существование этой производной при почти всех $t \geqslant t_0$ вытекает из непрерывно-дифференцируемости функции $\gamma(t, x)$ и абсолютно-непрерывности движений $x[t]$.

Из соотношения (2.3) и из определения множества $U^\circ(t, x)$ вытекает справедливость неравенства

$$\frac{\partial\gamma(t, x)}{\partial t} + \operatorname{grad}_x'\gamma(t, x[t])\,f(t, x[t], u^\circ, v) \leqslant 0 \tag{2.8}$$

для любых векторов $u^\circ \in U^\circ(t, x[t])$, $v \in Q(t)$.

Покажем, что из (2.8) вытекает соотношение

$$\frac{\partial\gamma(t, x)}{\partial t} + \operatorname{grad}_x'\gamma(t, x[t])\,f[t] \leqslant 0 \tag{2.9}$$

для любого вектора $f[t] \in F(t, x[t], U^\circ, V_\tau)$.

По теореме Каратеодори любой элемент $f[t]$ из $F(t, x[t], U^\circ, V_\tau)$ можно представить в виде

$$f[t] = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(t, x[t], u_i^\circ, v_i) \tag{2.10}$$

$$u_i^\circ \in U^\circ(t, x[t]), \qquad v_i \in Q; \qquad \lambda_i \geqslant 0, \qquad \sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i = 1$$

Поэтому справедливость неравенства (2.9), из которого следует неравенство (2.7), вытекает из соотношений (2.8) и (2.10).

Итак, неравенство (2.7) доказано. Из этого неравенства получаем, что стратегия $U^\circ \div U^\circ(t, x)$ гарантирует первому игроку завершение игры с платой, удовлетворяющей неравенству

$$w(x[\vartheta]) \leqslant \gamma(t_0, x_0) \tag{2.11}$$

Покажем, что результат, гарантируемый стратегией U° первому игроку, наилучший среди всех, которые могут ему обеспечить стратегии U из рассматриваемого класса U_1. Для этого достаточно доказать следующее: какова бы ни была стратегия первого игрока $U_* \div U_*(t, x) \in \mathrm{U}_1$ среди движений $x[t] = x[t; t_0, x_0, U_*, \mathrm{V}_\tau]$ найдется движение $x_*[t]$, для которого при почти всех t $(t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta)$ выполняется неравенство

$$d\gamma(t, x_*[t]) / dt \geqslant 0 \tag{2.12}$$

Из этого неравенства вытекает, что $\gamma(\vartheta, x_*[\vartheta]) \geqslant \gamma(t_0, x_0)$. Следовательно, стратегия U_* не может гарантировать первому игроку завершение игры с платой, меньшей $\gamma(t_0, x_0)$.

Докажем сформулированное выше положение. Искомое движение $x_*[t]$ построим предельным переходом от ломаных Эйлера $x_k[t]$ $(k = 1, 2, \ldots)$, которые определим следующим образом. Промежуток $[t_0, \vartheta]$ разобьем на k полуинтервалов $[t_0 + i\Delta_k, t_0 + (i+1)\Delta_k)$, где $\Delta_k = (\vartheta - t_0) / k$ $(k = 1, 2, \ldots)$. В момент времени $t_i = t_0 + i\Delta_k$ выбираем некоторый вектор $u_i \in U_*(t_i, x_k[t_i])$ и подбираем вектор v_i так, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{\partial\gamma(t_i\, x_k[t_i])}{\partial t} + \operatorname{grad}_x'\gamma(t_i, x_k[t_i])\,f(t_i, x_k[t_i], u_i, v_i) \geqslant 0$$

Возможность выбора такого вектора v_i вытекает из соотношения (2.7).

Постоянные управления $u_i = u[t]$, $v_i = v[t]$, где $t \in [t_0 + i\Delta_k, t_0 + (i+1)\Delta_k)$, определяют движения системы (1.1) до момента $t_{i+1} = t_0 + (i+1)\Delta_k$. В момент $t = t_{i+1}$ повторяется описанная выше процедура выбора управлений игроков. Затем из последовательности ломаных Эйлера $x_k[t]$ выбирается некоторая сходящаяся подпоследовательность. Предел этой последовательности обозначим через $x_*[t]$. При помощи рассуждений, применяемых при доказательстве теорем существования решений дифференциальных уравнений в контингенциях [1, 2], можно показать, что построенная траектория $x_*[t]$ будет одним из движений $x[t] = x[t; t_0, x_0, U_*, V_\tau]$. Кроме того, из построения ломаных $x_k[t]$ вытекает, что для построенного движения имеет место неравенство (2.12).

Таким образом, доказано, что стратегия $U^\circ \div U^\circ(t, x)$ гарантирует первому игроку завершение игры с платой, удовлетворяющей неравенству $\gamma(\vartheta, x[\vartheta]) \leqslant \gamma(t_0, x_0)$, и этот результат для рассматриваемого класса стратегий будет наилучшим.

Аналогичным образом можно доказать следующую теорему.

Теорема 2. Пусть существует непрерывно-дифференцируемая функция $\gamma^*(t, x)$, которая при всех t и x удовлетворяет уравнению

$$\max_v \min_u \left(\frac{\partial\gamma^*(t,x)}{\partial t} + \operatorname{grad}_x{}'\gamma^*(t,x) f(t,x,u,v)\right)_{u,v} = 0 \qquad (2.13)$$

$$(u \in P(t),\ v \in Q(t),\ t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta)$$

и краевому условию

$$\gamma^*(\vartheta, x) = w(x[\vartheta]) \qquad (2.14)$$

Пусть $V^\circ(t, x)$ — множество векторов v°, доставляющих максимум в (2.13). Тогда стратегия $V \div V^\circ(t, x)$ будет максиминной стратегией второго игрока.

Теоремы 1 и 2 дают строгое толкование соображениям, кратко приведенным в работе [3], и отвечают на вопрос, поставленный в [5].

Используя приведенные выше теоремы, нетрудно доказать справедливость следующего утверждения.

Теорема 3. Пусть существует непрерывно дифференцируемая функция $\gamma(t, x)$, удовлетворяющая уравнению

$$\min_u \max_v \left(\frac{\partial\gamma(t,x)}{\partial t} + \operatorname{grad}_x{}'\gamma(t,x) f(t,x,u,v)\right) = \qquad (2.15)$$

$$= \max_v \min_u \left(\frac{\partial\gamma(t,x)}{\partial t} + \operatorname{grad}_x{}'\gamma(t,x) f(t,x,u,v)\right) = 0$$

$$(u \in P(t),\ v \in Q(t),\ t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta)$$

и краевому условию

$$\gamma(\vartheta, x) = w(x) \qquad (2.16)$$

Пусть $U^\circ(t, x)$, $V^\circ(t, x)$ — множества всех векторов $u \in P(t)$, $v \in Q(t)$, доставляющих в (2.15) минимакс и максимин. Тогда $U^\circ \div U^\circ(t, x) \in \mathbf{U}_1$, $V^\circ \div V^\circ(t, x) \in \mathbf{V}_1$, и эти стратегии будут минимаксными и максиминными стратегиями первого и второго игроков соответственно, причем пара стратегий $\{U^\circ, V^\circ\}$ доставляет седловую точку рассматриваемой игры.

3. Выше приведены достаточные условия существования оптимальных стратегий игроков в классах стратегий $\mathbf{U}_1$, $\mathbf{V}_1$. Дадим описание других, более широких классов стратегий первого и второго игроков $\mathbf{U}_2$ и $\mathbf{V}_2$ соответственно. Для таких классов будут также рассмотрены достаточные условия существования оптимальных стратегий.

Отличие стратегий $U \in \mathbf{U}_2$ $(V \in \mathbf{V}_2)$ от рассмотренных выше стратегий $U \in \mathbf{U}_1$ $(V \in \mathbf{V}_1)$ состоит в том, что функции $U = U(t, x)$, $(V = V(t, x))$ позиции игры $\{t, x\}$ ставят в соответствие на множество точек из $P(t)$ $(Q(t))$, а некоторое множество вероятностных мер, заданных на

$P(t)$ $(Q(t))$. При этом функции $U = U(t, x)$, $V = V(t, x)$ должны удовлетворять условию слабой полунепрерывности сверху относительно включению по переменной $p = \{t, x\}$.

Это условие означает следующее. Пусть задана последовательность вероятностных мер $\mu_k(du)$ $(\nu_k(dv))$, заданных на множестве $P(t_k)$ $(Q(t_k))$ соответственно. Пусть $\mu_k(du) \in U(t_k, x_k)$ $(\nu_k(dv) \in V(t_k, x_k))$ $(k = 1, 2, \ldots)$ и $\{t_k x_k\} \to \{t_*, x_*\}$, а последовательность вероятностных мер $\mu_k(du)(\nu_k(dv))$ слабо сходится к вероятностной мере $\mu_*(du)$ $(\nu_*(dv))$, заданной на множестве $P(t_*)$ $(Q(t_*))$. Тогда должно выполняться включение $\mu_*(du) \in U(t_*, x_*)$, $(\nu_*(dv) \in V(t_*, x_*))$. Напомним, что последовательность вероятностных мер $\mu_k(du)$ слабо сходится к мере $\mu_*(du)$, если для любой непрерывной функции $g(u)$ имеет место соотношение

$$\int g(u)\, \mu_k(du) \to \int g(u)\, \mu_*(du)$$

При определении движений $x[t] = x[t; t_0, x_0, U, V]$, порожденных стратегиями $U \in \mathbf{U}_2$, $V \in \mathbf{V}_2$, множество $F(t\ x, U, V)$ определяется как выпуклая оболочка множества всех векторов f вида

$$f = \iint f(t, x, u, v)\, \mu(du)\, \nu(dv)$$
$$(\mu(du) \in U(t, x),\ \nu(dv) \in V(t, x)) \tag{3.1}$$

Тривиальные стратегии U_τ, U_τ задаются функциями $U_\tau = U_\tau(t)$, $V_\tau = V_\tau(t)$, которые переменной t ставят в соответствие множество всех вероятностных мер $\mu(du)$, $\nu(dv)$, заданных на множествах $P(t)$, $Q(t)$ соответственно.

Минимаксная и максиминные стратегии $U^\circ \div U^\circ(t, x)$, $V^\circ \div V^\circ(t, x)$ задаются условиями (2.1), (2.2), и множества $U^\circ(t, x)$ и $V^\circ(t, x)$ рассматриваются из классов стратегий игроков $\mathbf{U}_2$ и $\mathbf{V}_2$ соответственно.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.1. Пусть существует непрерывно-дифференцируемая функция $\gamma = \gamma(t, x)$, удовлетворяющая уравнению

$$\partial\gamma(t, x)/\partial t + \min_\mu \max_\nu \operatorname{grad}_x{}' \gamma(t, x) \iint f(t, x, u, v)\, \mu(du)\, \nu(dv) = \tag{3.2}$$
$$= \partial\gamma(t, x)/\partial t + \max_\nu \min_\mu \operatorname{grad}_x{}' \gamma(t, x) \iint f(t, x, u, v)\, \mu(du)\, \nu(dv)$$

и краевому условию

$$\gamma(\vartheta, x) = w(x) \tag{3.3}$$

Здесь минимумы и максимумы вычисляются по множеству вероятностных мер $\mu(du)$, заданных на $P(t)$, и $\nu(dv)$, заданных на $Q(t)$, соответственно.

Пусть $U^\circ(t, x)$, $V^\circ(t, x)$ — множества вероятностных мер $\mu(du)$, $\nu(dv)$, заданных на $P(t)$, $Q(t)$, которые доставляют седловую точку [6]

$$\min_\mu \max_\nu \iint \operatorname{grad}_x{}' \gamma(t, x) f(t, x, u, v)\, \mu(du)\, \nu(dv) = \tag{3.4}$$
$$= \max_\nu \min_\mu \iint \operatorname{grad}_x{}' \gamma(t, x) f(t, x, u, v)\, \mu(dv)\, \nu(dv)$$

Тогда стратегии $U^\circ \div U^\circ(t, x) \in \mathbf{U}_2$, $V^\circ \div V^\circ(t, x) \in \mathbf{V}_2$ и будут минимаксной и максиминной стратегиями соответственно. Пара стратегий $\{U^\circ, V^\circ\}$ доставляет седловую точку рассматриваемой игры.

Доказательство этой теоремы проводится так же, как и предыдущих теорем. Заметим, что в формулировке теоремы 3.1 не предполагается существование седловой точки (3.4). Из результатов теории игр [6] вытекает, что такая седловая точка (3.4) всегда существует.

4. В заключение приведем простой пример, иллюстрирующий приведенные теоремы.

Пусть движение конфликтно управляемого объекта описывается уравнением

$$dx / dt = uv, \qquad x(0) = 0$$

где x — скаляр, а управляющие воздействия u и v могут принимать два значения: $+1$ и -1. В качестве платы выберем величину $\gamma(\vartheta, x) = x[\vartheta]$. Игра будет осуществляться на заданном отрезке времени $t \in [0, 1]$.

Рассмотрим сначала минимаксную задачу в классе стратегий $\mathbf{U}_1$. Составим уравнение Беллмана

$$\min_u \max_v \left(\frac{\partial\gamma(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial\gamma(t, x)}{\partial x} uv\right) = 0$$

при условии $\gamma(1, x) = x$.

Нетрудно подсчитать минимакс левой части этого уравнения. Получим

$$\frac{\partial\gamma(t, x)}{\partial t} + \left|\frac{\partial\gamma(t, x)}{\partial x}\right| = \frac{\partial\gamma(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial\gamma(t, x)}{\partial x} = 0$$

$$\gamma(1, x) = x$$

Функция $\gamma(t, x) = x - t + 1$ удовлетворяет этому уравнению и краевому условию. В силу теоремы 1 теперь получаем, что наилучший для первого игрока результат

$$\gamma(t_0, x_0) = x_0 - t_0 + 1 = 1$$

Аналогичным образом можно показать, что наилучший результат для второго игрока $\gamma(t_0, x_0) = x_0 + t_0 - 1 = -1$.

Рассмотрим теперь минимаксную и максиминную задачи для классов стратегий $\mathbf{U}_2$ и $\mathbf{V}_2$.

Покажем, что в рассматриваемом случае функция $\gamma(t, x) = x$ удовлетворяет уравнению (3.2) и краевому условию (3.3). Имеем

$$\min_\mu \max_\nu \frac{\partial\gamma(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial\gamma(t, x)}{\partial x} \iint uv\mu(du)\,\nu(dv) =$$

$$= \min_\mu \max_\nu \iint uv\mu(du)\,\nu(dv) = \min_\mu \max_\nu \int u\mu(du) \int v\nu(dv) =$$

$$= \max_\nu \min_\mu \int u\mu(du) \int v\nu(dv) = 0$$

Напомним, что здесь $\mu(du)$ и $\nu(dv)$ — вероятностные меры, заданные на множестве, состоящем из двух точек $+1$ и -1.

Справедливость равенства

$$\iint uv\mu(du)\,\nu(dv) = \int u\mu(du) \int v\nu(dv)$$

следует из теоремы Фубини [7].

Обозначим через $\mu^\circ(du)$, $\nu^\circ(dv)$ меры, доставляющие седловую точку (3.4). Нетрудно заметить, что

$$\mu^\circ(u : u = +1) = \mu^\circ(u : u = -1) = 1/2$$

$$\nu^\circ(v : v = +1) = \nu^\circ(v : v = -1) = 1/2$$

В силу теоремы 3.1 получаем, что в рассматриваемом примере в классе стратегий $\mathbf{U}_2$, $\mathbf{V}_2$ существует цена игры, равная величине $\gamma(t_0, x_0) = x_0 = 0$.

Таким образом, в этом примере в классах стратегий $\mathbf{U}_1$ и $\mathbf{V}_1$ не существует цены игры, минимакс и максимин платы равны $+1$ и -1 соответственно. В классах стратегий $\mathbf{U}_2$, $\mathbf{V}_2$ существует цена игры, равная нулю.

Автор благодарит Н. Н. Красовского за постановку задачи и внимание к работе и также признателен А. И. Субботину за обсуждение работы.

Поступила 23 VI 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. Матем. сб., 1960, т. 51 (93), вып. I.
2. Красовский Н. Н. Игровые задачи о встрече движений. М., «Наука», 1970.
3. Красовский Н. Н. Игровые задачи динамики. Изв. АН СССР, Техн. кибернетика, 1969, № 5.
4. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Альтернатива для игровой задачи сближения. ПММ, 1970, т. 34, вып. 6.
5. Федоренко Р. П. Об одном классе дифференциальных игр преследования. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1970, т. 10, № 5.
6. Мак-Кинси Дж. Введение в теорию игр. М., Физматгиз, 1960.
7. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М., «Наука», 1968.