

НЕКОТОРЫЕ МИНИМАКСНЫЕ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ С НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИЕЙ

А. А. Меликян, Ф. Л. Черноусько

(Москва)

Применен минимаксный (гарантированный) подход к задачам оптимального управления объектом при неполной информации. Предполагается, что положение фазового вектора известно с точностью до некоторого множества, которому он принадлежит; в процессе движения положение системы уточняется измерениями. При помощи метода динамического программирования исследуется способ построения управления как функции результатов измерений и времени. Близкие задачи рассматривались в работах [1-3].

1. Дискретный случай. Дискретная система описывается уравнением

$$x_{k+1} = F(x_k, u_k, t_k) \quad (k = 0, 1, 2, \dots, N), \quad x_k, F \in E^n \quad (1.1)$$

$$t_0 < t_1 < \dots < t_N < t_{N+1} = T$$

Здесь управления u_k — m -мерные векторы, $u_k \in E^m$, либо m -мерные вектор-функции, определенные на интервале $[t_k, t_{k+1})$. Компоненты вектора F будут соответственно функциями (функционалами), зависящими от u_k . Кроме того, $u_k \in U_k \in E^m$, где U_k — ограниченные, замкнутые множества. На траекториях системы (1.1) определен функционал

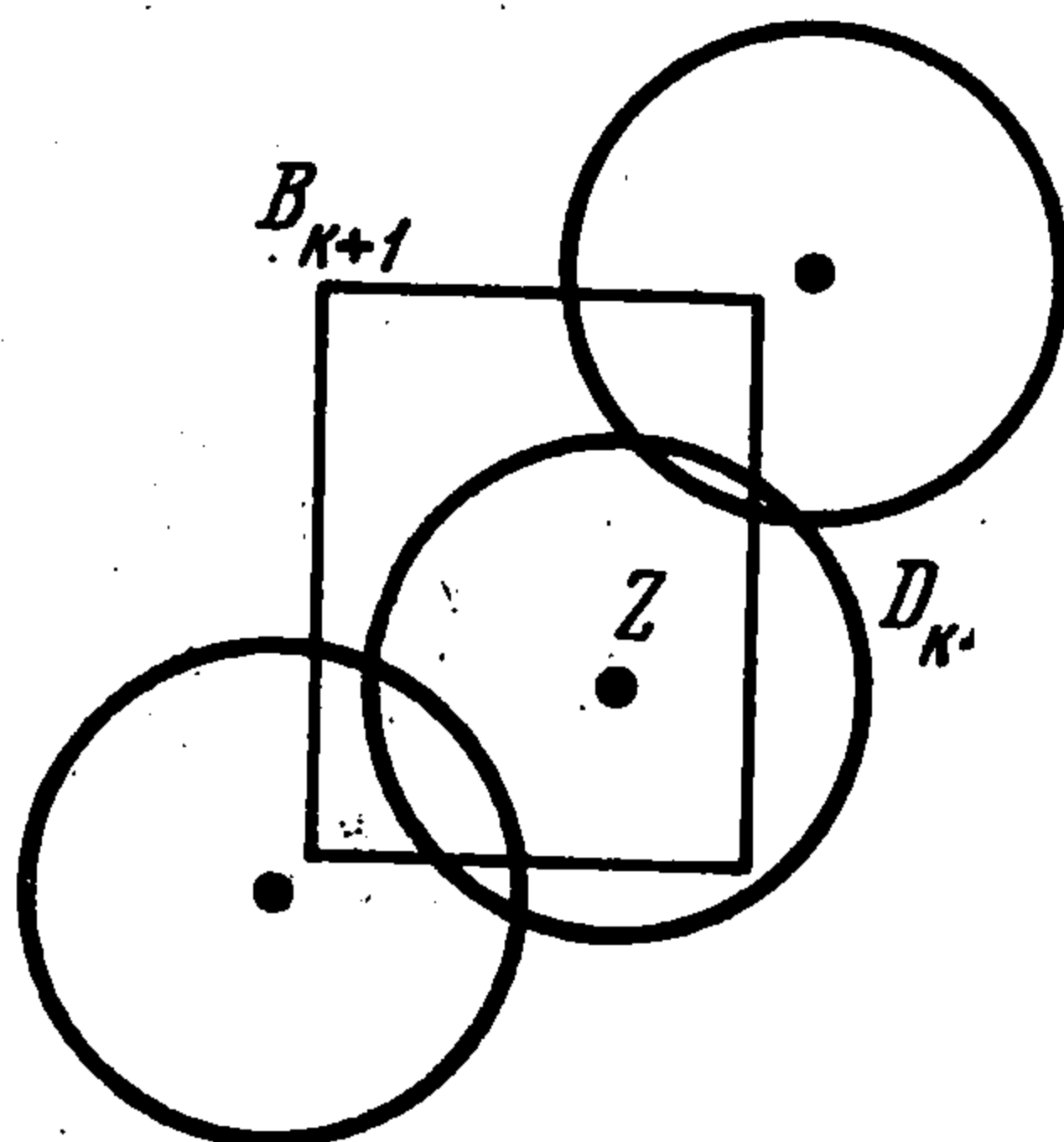
$$J = \sum_{k=0}^N R_k(u_k) + R_{N+1}(x_{N+1}) \quad (1.2)$$

Здесь R_k ($k = 0, 1, \dots, N + 1$) — непрерывные функции (или функционалы) своих аргументов.

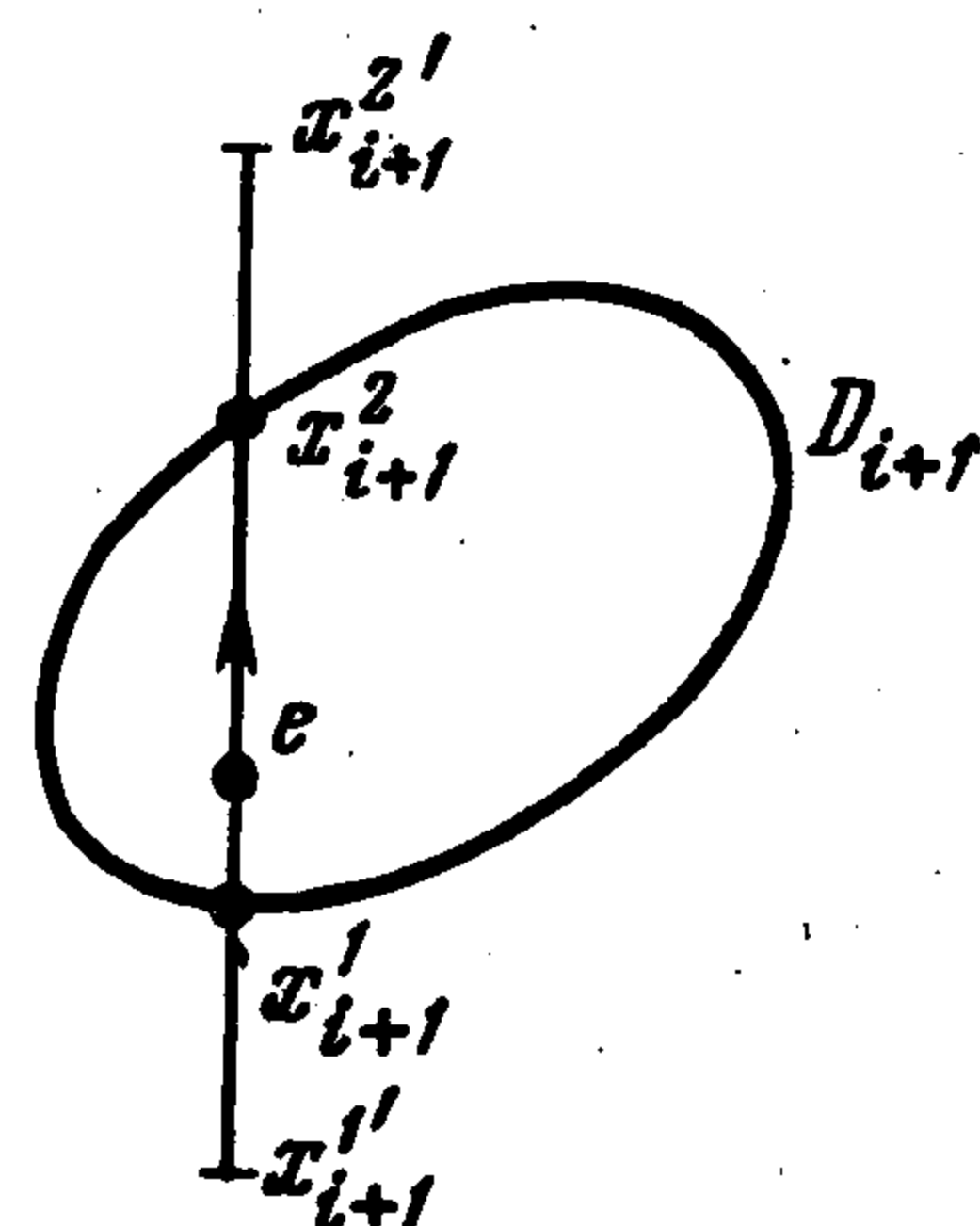
В начальный момент t_0 вектор x_0 задан неточно: известно лишь, что $x_0 \in B_0$, где B_0 — замкнутое множество, $B_0 \subset E^n$. Подставив в (1.1) некоторые управления u_k ($k = 0, 1, \dots, N$), можно [получить множества возможных положений фазового вектора в моменты t_k ($k = 1, 2, \dots, N + 1$). Положим, что множества возможных положений уточняются на каждом шаге при помощи измерений. Опишем эти измерения.

Пусть в момент t_k известно множество возможных положений B_k , т. е. такое множество, что $x_k \in B_k$. Очевидно, что в следующий момент времени $x_{k+1} \in F(B_k, u_k, t_k)$. Здесь принято обозначение $F(B_k, u_k, t_k) = \{x \in E^n: x = F(y, u_k, t_k), y \in B_k\}$. Предполагаем, что измерение, проведенное в момент t_{k+1} задает некоторое множество D_{k+1} , такое, что $x_{k+1} \in D_{k+1}$. Поэтому вектор x_{k+1} будет принадлежать и пересечению $D_{k+1} \cap F(B_k, u_k, t_k) = B_{k+1}$. Результаты измерений должны удовлетворять следующему условию непротиворечивости: пересечение B_{k+1} ($k = 0, 1,$

..., N) не пусто. По определению $D_0 = B_0$. Для каждого момента времени описан некоторый класс множеств $\{D_k\}$, элементы которого могут выступать в качестве D_k (класс возможных исходов измерений). Будем считать, что класс $\{D_k\}$ состоит из всех множеств, получаемых путем сдвигов в пространстве E^n из некоторого произвольного замкнутого выпуклого множества. Например, можно считать класс $\{D_k\}$, состоящим из n -мерных сфер с центром в некоторой точке $z \in E^n$ и заданным диаметром $d_k > 0$; выбор вектора z и определяет конкретный исход измерения D_k (фиг. 1).



Фиг. 1



Фиг. 2

Предполагаем, что управления u_k выбираются после того, как стало известно множество D_k (соответственно и B_k). Поставим следующую задачу: зная возможности измерений, т. е. классы $\{D_k\}$ ($k=1, 2, \dots, N+1$), и начальное множество B_0 , найти допустимые управления u_k (B_k) ($k=0, 1, \dots, N$) как функции результатов измерений, которые обеспечивают минимальное гарантированное значение функционала (1.2) на траекториях систем (1.1).

Расширим поставленную задачу и будем искать управления, доставляющие минимальное гарантированное значение функционалу

$$J_i = \sum_{k=i}^N R_k(u_k) + R_{N+1}(x_{N+1}) \quad (i=0, 1, \dots, N) \quad (1.3)$$

при фиксированном i на траекториях системы (1.1) при $i \leq k \leq N$. В момент t_i задано множество возможных положений B_i ($x_i \in B_i$).

Определим функцию Беллмана по формуле

$$S(B_i, t_i) = \min_{u_i} \max_{D_{i+1}} \min_{u_{i+1}} \max_{D_{i+2}} \dots \dots \min_{u_N} \max_{D_{N+1}} \max_{x_{N+1}} J_i \quad (i=0, 1, \dots, N) \quad (1.4)$$

Функция $S(B_i, t_i)$ равна минимальному значению, которое можно гарантировать для функционала J_i , имея в момент t_i множество B_i . Предполагается, что все экстремумы в (1.4) достигаются. Порядок расположения операций в (1.4) выбран в соответствии с порядком поступления информации и формирования управления. Минимумы по u_k берутся по множеству U_k . Первый справа максимум в (1.4) считается по множеству $B_{N+1} = D_{N+1} \cap F(B_N, u_N, t_N)$. Остальные максимумы берутся по $D_k \in \{D_k\}$, удовлетворяющим условию непротиворечивости. Далее понадобится одно свойство функции $S(B_i, t_i)$, легко проверяемое при помощи (1.4)

$$S(B_i, t_i) \leq S(B_i', t_i), \text{ если } B_i \subseteq B_i' \quad (1.5)$$

Преобразуем (1.4) с учетом (1.3)

$$S(B_i, t_i) = \min_{u_i} \max_{D_{i+1}} \left[R_i(u_i) + \min_{u_{i+1}} \max_{D_{i+2}} \dots \right. \\ \left. \dots, \min_{u_N} \max_{D_{N+1}} \max_{x_{N+1}} \left(\sum_{k=i+1}^N R_k(u_k) + R_{N+1}(x_{N+1}) \right) \right]$$

Заметим, что второе слагаемое в квадратных скобках, согласно (1.4), равно $S(B_{i+1}, t_{i+1})$, где $B_{i+1} = D_{i+1} \cap F(B_i, u_i, t_i)$. Следовательно, функция S удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$S(B_i, t_i) = \min_{u_i} \max_{D_{i+1}} [S(D_{i+1} \cap F(B_i, u_i, t_i), t_{i+1}) + R_i(u_i)] \quad (1.6)$$

$$u_i \in U_i, D_{i+1} \in \{D_{i+1}\}, D_{i+1} \cap F(B_i, u_i, t_i) \neq \emptyset \quad (i = 0, 1, \dots, N)$$

Положим далее

$$S(B_{N+1}, T) = \max_{x_{N+1} \in B_{N+1}} R_{N+1}(x_{N+1})$$

Зная функцию $S(B_i, t_i)$ для всех областей B_i , могущих реализоваться в момент t_i ($i = 0, 1, \dots, N$), можно получить управление $u_i(B_i)$ выполнением операций в (1.6). Для случая произвольных областей эта задача весьма сложна. Сделаем упрощающие предположения:

1°. Уравнения (1.1) линейны по x_k : $F(x_k, u_k, t_k) = A_k x_k + b_k(u_k)$, где A_k — квадратная матрица $n \times n$, $b_k \in E^n$.

2°. Множество B_0 является отрезком в E^n . Этот отрезок будем обозначать $I(x^1, x^2)$, где $x^1, x^2 \in E^n$ — концы отрезка.

Из этих предположений следует, что все области B_i ($i = 1, 2, \dots, N+1$) также будут отрезками $B_i = I(x_i^1, x_i^2)$. Таким образом, структура множеств B_i упростилась, и они задаются $2n$ -параметрами (координатами векторов x_i^1, x_i^2). Функцию S можно рассматривать теперь как функцию $2n+1$ переменного $S(x_i^1, x_i^2, t_i)$. Очевидно, что $S(x_i^1, x_i^2, t_i) = S(x_i^2, x_i^1, t_i)$. Отметим, что предположение 2° означает, что наиболее существенна начальная ошибка по одной линейной комбинации фазовых координат.

Предположения 1°, 2° позволяют существенно упростить (1.6).

Определим на единичной сфере функцию

$$d(e, t_{i+1}) = \max_{D_{i+1} \in \{D_{i+1}\}} |x_{i+1}^2 - x_{i+1}^1| \quad (i = 0, 1, \dots, N) \quad e \in E^n, |e| = 1$$

Знак модуля означает длину векторов в E^n . Точки x_{i+1}^1, x_{i+1}^2 представляют собой точки пересечения произвольной прямой, направленной по орту e , с границей множества D_{i+1} (фиг. 2). Предположим, например, что измеряется скалярное произведение $w_k = (c_k, x_k) + \Delta_k$, где ошибка $|\Delta_k| \leq v_k$, а c_k и v_k — заданные величины, $v_k \geq 0$. Тогда множествами $D_k \in \{D_k\}$ будут множества $D_k = \{x \in E^n : w_k - |\Delta_k| \leq (c_k, x) \leq w_k + |\Delta_k|\}$. Функция $d(e, t_k)$ в этом случае легко вычисляется и равна $2v_k |(c_k, e)|^{-1}$. Введенная функция $d(e, t_k)$ характеризует возможности измерения.

Пусть в момент t_i известен отрезок $I(x_i^1, x_i^2)$. В следующий момент t_{i+1} он в соответствии с предположением 1° отображится снова на некоторый отрезок $I(x_{i+1}^1, x_{i+1}^2)$. Если на i -ом шаге оказалось, что $|x_{i+1}^2 - x_{i+1}^1| \leq d(e_{i+1}, t_{i+1})$, где $e_{i+1} = (x_{i+1}^2 - x_{i+1}^1) |x_{i+1}^2 - x_{i+1}^1|^{-1}$, то значит существует множество $D'_{i+1} \in \{D_{i+1}\}$, такое, что $I(x_{i+1}^1, x_{i+1}^2) \subseteq D'_{i+1}$. Вспоминая свойство (1.5) функции S , можно заметить, что максимум в (1.6) достигается, например, на этом множестве D'_{i+1} . В этом случае можно опустить в (1.6) максимизацию по D_{i+1} и переписать это соотношение в виде

$$S(x_i^1, x_i^2, t_i) = \min_{u_i \in U_i} [S(x_{i+1}^1, x_{i+1}^2, t_{i+1}) + R_i(u_i)] \quad (1.7)$$

Этот случай означает, что в момент t_{i+1} измерение неэффективно, т. е. не гарантирует увеличение информации о положении системы.

Рассмотрим другой случай, когда $|x_{i+1}^2 - x_{i+1}^1| > d(e_{i+1}, t_{i+1})$ (измерение эффективно).

Пусть x_{i+1}^1, x_{i+1}^2 — точки пересечения отрезка $I(x_{i+1}^1, x_{i+1}^2)$ с множеством D_{i+1} . Из того же свойства (1.5) функции S следует, что максимизацию в (1.6) можно проводить только по тем $D_{i+1} \in \{D_{i+1}\}$, для которых $|x_{i+1}^2 - x_{i+1}^1| = d(e_{i+1}, t_{i+1})$, $x_{i+1}^1, x_{i+1}^2 \in I(x_{i+1}^1, x_{i+1}^2)$. Для таких множеств D_{i+1} векторы x_{i+1}^1, x_{i+1}^2 можно представить в виде (фиг. 2)

$$\begin{aligned} x_{i+1}^1 &= x_{i+1}^1 + \alpha(x_{i+1}^2 - x_{i+1}^1), & x_{i+1}^2 &= x_{i+1}^1 + \alpha'(x_{i+1}^2 - x_{i+1}^1) \\ \alpha' &= \alpha + d(e_{i+1}, t_{i+1}) |x_{i+1}^2 - x_{i+1}^1|^{-1}, & e_{i+1} &= (x_{i+1}^2 - x_{i+1}^1) |x_{i+1}^2 - x_{i+1}^1|^{-1} \end{aligned} \quad (1.8)$$

где α — вещественный параметр. Из условия $I(x_{i+1}^1, x_{i+1}^2) \subseteq I(x_{i+1}^1, x_{i+1}^2)$ можно получить, что α должно лежать в пределах

$$0 \leq \alpha \leq 1 - d(e_{i+1}, t_{i+1}) |x_{i+1}^2 - x_{i+1}^1|^{-1} \quad (1.9)$$

Как следует из описания классов $\{D_k\}$, каждому α из указанного интервала соответствует возможный исход измерения. Таким образом, из наилучших исходов измерений выделено однопараметрическое семейство, и максимум по D_{i+1} в (1.6) можно заменить максимумом по α . Действительно, заметив, что в рассматриваемом случае

$$S(D_{i+1} \cap F(B_i, u_i, t_i) t_{i+1}) = S(x_{i+1}^1, x_{i+1}^2, t_{i+1})$$

можно записать (1.6) в виде

$$S(x_i^1, x_i^2, t_i) = \min_{u_i \in U_i} \max_{\alpha} [S(x_{i+1}^1, x_{i+1}^2, t_{i+1}) + R_i(u_i)] \quad (1.10)$$

где α варьируется в интервале (1.9), а векторы x_{i+1}^1, x_{i+1}^2 берутся в виде (1.8).

Уравнение (1.10) упростится при замене переменных

$$z_i = 1/2(x_i^1 + x_i^2), \quad y_i = x_i^2 - x_i^1 \quad (1.11)$$

Теперь исход измерения определяет задание пары векторов z_i, y_i . Фазовый вектор x_i может принимать значения $x_i = z_i + \beta y_i, |\beta| \leq 1/2$.

Если в момент t_i известны векторы z_i, y_i , то штрихом, как и выше будем помечать векторы, в которые перейдут z_i, y_i , согласно (1.11) и предположению 1°

$$\begin{aligned} z'_{i+1} &= A_i z_i + b_i(u_i), & y'_{i+1} &= A_i y_i & (i=0, 1, \dots, N) \\ e_{i+1} &= y'_{i+1} |y'_{i+1}|^{-1} = A_i y_i |A_i y_i|^{-1} \end{aligned} \quad (1.12)$$

Последнее соотношение в (1.12) вытекает из (1.8), (1.11)

Векторы z_{i+1}, y_{i+1} находятся в результате измерения, т. е. пересечением отрезка $I(z'_{i+1} - 1/2 y'_{i+1}, z'_{i+1} + 1/2 y'_{i+1})$ с некоторым множеством $D_{i+1} \in \{D_{i+1}\}$. Функцию Беллмана будем считать зависящей от аргументов z_i, y_i, t_i , сохранив для нее прежнее обозначение $S(z_i, y_i, t_i)$.

Нетрудно видеть (см. соотношение (1.7)), что для моментов t_i , для которых $|y'_{i+1}| \leq d(e_{i+1}, t_{i+1})$, имеем

$$S(z_i, y_i, t_i) = \min_{u_i \in U_i} [S(A_i z_i + b_i(u_i), A_i y_i, t_{i+1}) + R_i(u_i)] \quad (1.13)$$

Если выполняется неравенство $|y'_{i+1}| > d(e_{i+1}, t_{i+1})$, то выделим, аналогично проделанному (см. соотношение (1.10)), однопараметрическое семейство наихудших исходов измерений. Из (1.8), (1.12) имеем

$$y_{i+1} = x^2_{i+1} - x^1_{i+1} = d(e_{i+1}, t_{i+1}) y'_{i+1} |y'_{i+1}|^{-1} = d(e_{i+1}, t_{i+1}) A_i y_i |A_i y_i|^{-1} \quad (1.14)$$

т. е. вектор y_{i+1} один и тот же для разных исходов измерения.

Для вектора z_i из (1.8) в соответствии с (1.11), (1.12) получаем

$$z_{i+1} = z'_{i+1} + \beta y'_{i+1} = A_i z_i + b_i(u_i) + \beta A_i y_i \quad (1.15)$$

где параметр β принимает значения (см. (1.9))

$$|\beta| \leq 1/2 (1 - d(e_{i+1}, t_{i+1}) |A_i y_i|^{-1}), \quad \beta = \alpha - 1/2 (1 - d(e_{i+1}, t_{i+1}) |A_i y_i|^{-1}) \quad (1.16)$$

В новых переменных (1.10) имеет вид

$$S(z_i, y_i, t_i) = \min_{u_i \in U_i} \max_{\beta} [S(z_{i+1}, y_{i+1}, t_{i+1}) + R_i(u_i)] \quad (1.17)$$

где z_{i+1}, y_{i+1} взяты соответственно из (1.14) и (1.15), а параметр β варьируется в пределах (1.16). Для $t = t_{N+1} = T$ функция S определяется соотношением

$$S(z_{N+1}, y_{N+1}, T) = \max_{\beta} R_{N+1}(x_{N+1}), \quad x_{N+1} = z_{N+1} + \beta y_{N+1}, |\beta| \leq 1/2 \quad (1.18)$$

Используя начальное условие (1.18) и рекуррентные соотношения (1.17) или (1.13) в зависимости от того, эффективно измерение или нет (т. е. выполнено ли неравенство $|y'_{i+1}| > d(e_{i+1}, t_{i+1})$ или нет), можно вычислить функцию $S(z_i, y_i, t_i)$ последовательно для моментов t_i ($i = N, N-1, \dots, 1, 0$) и получить попутно значения управления, гарантирующего функционалу (1.3) значение (1.4).

2. Непрерывная система, дискретные наблюдения. Задана система

$$\dot{x} = A(t)x + b(u, t), \quad t \in [t_0, T], \quad b, x \in E^n, \quad u(t) \in U_t \subset E^n \quad (2.1)$$

Здесь U_t — компакт для всех $t \in [t_0, T]$, $A(t)$ — матрица $n \times n$, зависящая от t . На траекториях системы (2.1) определен функционал

$$J = \int_{t_0}^T f_0(u, t) dt + R_T(x_T), \quad x_T = x(T) \quad (2.2)$$

Здесь f_0, R_T — непрерывные функции. Известно множество B_0 возможных начальных состояний $x(t_0) \in B_0$, которое может, в частности, быть отрезком. В заданные моменты времени $t_0 < t_1 < \dots < t_N < t_{N+1} = T$ состояния системы уточняются при помощи измерений. Аналогично изложенному в п. 1, описаны классы $\{D_k\}$. Управление на отрезке $[t_k, t_{k+1})$ выбирается после измерения в момент t_k .

Задача о получении минимального гарантированного значения функционала (2.2) сводится к задаче п. 1.

Покажем это. Пусть $X(t, \tau)$ — матрица Коши системы $\dot{x} = A(t)x$ [4]. Заменим систему (2.1) эквивалентной дискретной системой

$$x_{k+1} = X(t_{k+1}, t_k)x_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} X(t_{k+1}, \tau)b(u_k(\tau), \tau) d\tau \quad (2.3)$$

$$x_0 \in B_0, \quad x_k = x(t_k) \quad (k = 0, 1, \dots, N)$$

Здесь $u_k(t)$ — функции, заданные на отрезке $[t_k, t_{k+1})$ со значениями в U_t . Функционал (2.2) сводится к виду (1.2) подстановкой

$$R_k(u_k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} f_0(u_k(\tau), \tau) d\tau, \quad R_{N+1} = R_T$$

Функция Беллмана определяется аналогично. Она удовлетворяет соотношениям (1.4), (1.6) или (1.13), (1.17), (1.18).

3. Примеры. 1°. Рассмотрим скалярную систему

$$x_{k+1} = x_k + b_k u_k, \quad |u_k| \leq \mu, \quad b_k > 0 \quad (k = 0, 1, \dots, N), \quad \mu > 0 \quad (3.1)$$

В начальный момент значение x_0 задано с погрешностью: $a_1 \leq x_0 \leq a_2$. Известна функция измерения $d(e, t_k) = d_k, d_k > 0$ ($k = 0, 1, \dots, N+1$), причем $d_0 = a_2 - a_1$. Минимизируемый функционал имеет вид $J = R_{N+1}(x_{N+1}) = |x_{N+1}|$. Непрерывными аналогами (3.1) будут, например, следующие задачи:

$$1) \dot{x}_1 = b(t)u, \quad 2) \dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u$$

$$|u| \leq \mu, \quad t_0 \leq t \leq T, \quad J = |x_1(T)| - \min$$

где измеряется координата x_1 . Система 2) приводится к виду 1) подстановкой $\xi(t) = x_1(t) + (T-t)x_2(t)$; минимизируемый функционал при этом будет иметь тот же вид, так как $\xi(T) = x_1(T)$.

Вернувшись к системе (3.1), можно выписать сразу решение уравнения (1.13): $y_k = d_k$ ($k = 0, 1, \dots, N+1$) в предположении, что $|y'_{k+1}| > d_{k+1}$, т. е. $\Delta d_k = d_{k+1} -$

— $d_k < 0$ ($k = 0, 1, \dots, N$). Это предположение означает, что точность измерений растет со временем, и все измерения эффективны. Уравнение (1.15), задающее движение центра отрезка неопределенности, запишется после замены $\beta_k = (\Delta d_k / d_k) v_k$ в виде

$$z_{k+1} = z_k + b_k u_k + \Delta d_k v_k, |u_k| \leq \mu, |v_k| \leq 1/2 \quad (k = 0, 1, \dots, N)$$

Для функции Беллмана имеем, согласно (1.18), начальное условие

$$S(z_{N+1}, t_{N+1}) = |z_{N+1}| + 1/2 d_{N+1}$$

Вычислим при помощи (1.17) значение функции Беллмана в момент t_N

$$S(z_N, t_N) = \min_{u_N} \max_{v_N} |z_N + b_N u_N + \Delta d_N v_N| + 1/2 d_{N+1} \\ |u_N| \leq \mu, |v_N| \leq 1/2 \quad (3.2)$$

Предположим для определенности, что величина $l_i = b_i \mu + 1/2 \Delta d_i$ убывает с ростом i , причем $l_i > 0$ при $i \leq m$ и $l_i < 0$ при $i > m$, где $0 < m < N$.

Вычисление максимума в (3.2) дает следующие значения v_N :

$$v_N = -1/2 \operatorname{sgn} z_N, |z_N| \neq 0; v_N = \pm 1/2, |z_N| = 0 \quad (3.3)$$

Отметим для дальнейшего, что аналогичные формулы для «управления» v_k получаются и во все другие моменты времени t_k .

Функция Беллмана и управление u_N в момент t_N равны

$$S(z_N, t_N) = |z_N| - b_N \mu + 1/2 d_N, \quad u_N = 2\mu v_N$$

Используя повторно (1.16), можно получить

$$S(z_k, t_k) = |z_k| + 1/2 d_k - \mu \sum_{i=k}^N b_i, \quad u_k = 2\mu v_k \quad (k = m+1, m+2, \dots, N)$$

Для момента t_m , где $l_m > 0$, получаются следующие значения:

$$S(z_m, t_m) = |z_m| + 1/2 d_m - \mu \sum_{i=m}^N b_i, \quad u_m = 2\mu v_m \quad \text{при } |z_m| \geq l_m$$

$$S(z_m, t_m) = 1/2 d_{m+1} - \mu \sum_{i=m+1}^N b_i, \quad u_m = 2v_m b_m^{-1} (|z_m| - 1/2 \Delta d_m) \quad \text{при } |z_m| < l_m$$

Для остальных моментов t_k ($k \leq m-1$) получим

$$u_k = 2\mu v_k, \quad S(z_k, t_k) = \begin{cases} |z_k| + 1/2 d_k - \mu \sum_{i=k}^N b_i & \text{при } |z_k| \geq \sum_{i=k}^m l_i \\ 1/2 d_{m+1} - \mu \sum_{i=m+1}^N b_i & \text{при } |z_k| < \sum_{i=k}^m l_i \end{cases} \quad (3.4)$$

В приведенных формулах v_k определяется формулами (3.3) с заменой индекса N на k . В случае $|z_k| < \sum_{i=k}^m l_i$ управление u_k определяется неоднозначно; в (3.4) приведено лишь одно из возможных значений. Как видно, в области, лежащей между ломаной $|z_k| = l_k + \dots + l_m$, $k \leq m$ и отрезком $[t_0, t_{m+1}]$, функция Беллмана постоянна и задается нижней из формул (3.4). В общем случае, когда величина l_i меняет знак несколько раз, могут существовать несколько таких областей постоянства функции со своими значениями постоянной.

2°. Пусть система, как и прежде, описывается уравнением (3.1) с теми же измерениями, условиями информированности и минимизируемым функционалом, что и в примере 1°. Наложим интегральное ограничение на ресурсы управления

$$\sum_{k=0}^N |u_k| \leq q_0, \quad q_0 > 0$$

Для применения к этой задаче предложенной методики введем дополнительную фазовую координату q_k , подчинив ее уравнению

$$q_{k+1} = q_k - |u_k| \quad (k = 0, 1, \dots, N) \quad (3.5)$$

Будем считать также, что $|u_k| \leq q_k$ или $q_{k+1} \geq 0$ ($k = 0, 1, \dots, N$). Тогда из (3.5) следует, что

$$\sum_{i=k}^N |u_i| \leq q_k$$

т. е. q_k — оставшиеся ресурсы управления. Уравнение для координаты z_k имеет прежний вид и совместно с (3.5) задает систему второго порядка

$$\begin{aligned} z_{k+1} &= z_k + b_k u_k + \Delta d_k v_k, & |u_k| &\leq q_k, & |v_k| &\leq 1/2 \\ q_{k+1} &= q_k - |u_k| & (k &= 0, 1, \dots, N) \end{aligned} \quad (3.6)$$

При выводе (1.17) множества U_k ($u_k \in U_k$) не предполагались зависящими от фазовых координат. Нетрудно, однако, получить, проследив вывод (1.17), что функция Беллмана $S(z_k, q_k, t_k)$ задачи (3.6) удовлетворяет аналогичному уравнению. Последнее обусловлено тем, что координата q_k , определяющая ограничение управления, известна (измеряется) точно.

Приведем, опустив подробности, решение этого уравнения при дополнительном условии $b_{k+1} \leq b_k$ ($k = 0, 1, \dots, N-1$), означающем, что эффективность управления не возрастает со временем. Это решение имеет вид

$$S(z_k, q_k, t_k) = \max \{0, f_{kk}, f_{k,k+1}, \dots, f_{kN}\} \quad (k = 0, 1, \dots, N) \quad (3.7)$$

$$f_{kn} = \frac{b_n}{b_k} (|z_k| - b_k q_k - g_{kn}), \quad g_{kn} = \frac{b_k}{2} \sum_{i=k}^n \frac{\Delta d_i}{b_i} + \frac{b_k}{2b_n} \sum_{i=n+1}^N \Delta d_i \quad (n = k, k+1, \dots, N)$$

Решение (3.7) можно записать еще в следующей форме:

$$S(z_k, q_k, t_k) = \begin{cases} 0 & \text{при } \xi_k \leq p_k = \frac{b_k}{2} \sum_{i=k}^N \frac{\Delta d_i}{b_i} \\ f_{kn} & \text{при } p_{n-1} < \xi_k \leq p_n \quad (n = k+1, k+2, \dots, N) \\ f_{kk} & \text{при } \xi_k > p_N = 1/2 \Delta d_k \end{cases}$$

$$\xi_k = |z_k| - b_k q_k, \quad p_n = (b_n - b_{n+1})^{-1} (b_n g_{kn} - b_{n+1} g_{kn+1}) \quad (n = k+1, \dots, N-1)$$

Значения u_k, v_k , доставляющие минимакс, задаются соотношениями

$$\begin{aligned} v_k &= -1/2 \operatorname{sgn} z_k, \quad |z_k| \neq 0; & v_k &= \pm 1/2, \quad |z_k| = 0 \\ u_k &= 2v_k q_k, \quad \text{если } \xi_k > 1/2 \Delta d_k \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$u_k = u_k^* \equiv 2v_k b_k^{-1} (|z_k| - 1/2 \Delta d_k), \quad \text{если } p_k \leq \xi_k \leq 1/2 \Delta d_k \quad (k = 0, 1, \dots, N)$$

При $\xi_k < p_k$ оптимальное управление определяется неоднозначно; можно принять, например $u_k = u_k^*$. Синтез (3.8) предписывает обратить на начальном шаге

центр отрезка неопределенности в нуль и держать его равным нулю, пока не будут исчерпаны ресурсы управления. Если же ресурсы не позволяют обратить в нуль z_k , то на первом же шаге расходуется весь запас.

Отметим два частных случая (3.7). Если выполнено условие $b_k \equiv b$ ($k = 0, 1, \dots, N$), то $f_{kk} = f_{k,k+1} = \dots = f_{kN} = |z_k| - bq_k - 1/2 (d_{N+1} - d_k)$, что упрощает решение. В предположении же, что измерения точные, т. е. $d_k = 0$ ($k = 0, 1, \dots, N + 1$), из (3.7), (3.8) получаем очевидное решение задачи без неопределенности

$$S(z_k, q_k, t_k) = \max\{0, f_{kk}, f_{k+1}, \dots, f_{kN}\} = \max\{0, f_{kk}\} = \max\{0, |z_k| - b_k q_k\}$$

$$u_k = -\operatorname{sgn} z_k q_k, \quad \text{если } \xi_k > 0; \quad u_k = -z_k b_k^{-1}, \quad \text{если } \xi_k \leq 0$$

4. Непрерывная система, непрерывные наблюдения. Можно показать, что формальный переход к пределу в соотношениях п. 1. при $\Delta t = \max_k \{t_{k+1} - t_k\} \rightarrow 0$ позволяет получить соответствующие уравнения для случая непрерывного наблюдения. Будем считать интервалы между наблюдениями равными и положим $t_{i+1} - t_i = \Delta t = (T - t)(N + 1)^{-1}$. Индекс i заменим аргументом $t = t_0 + i\Delta t$, индекс $i + 1$ — аргументом $t + \Delta t$. Переход к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$ означает, что моменты наблюдения учащаются. В пределе наблюдения будут непрерывными. Следовательно, классы $\{D_t\}$ должны быть описаны для каждого момента $t \in [t_0, T]$.

Запишем уравнение (2.1) в виде

$$x(t + \Delta t) = x(t) + \Delta t A(t) x(t) + \Delta t b(u(t), t) + o(\Delta t^2) \quad (4.1)$$

В соотношениях п. 1 следует заменить матрицу A_i на $E + \Delta t A(t)$, где E — единичная матрица. Примем для простоты, что для любого Δt на каждом шаге выполняется неравенство

$$|y'_{i+1}| = |A_i y_i| > d(e_{i+1}, t_{i+1}) \quad (4.2)$$

означающее, согласно п. 1, что измерения всегда эффективны. Тогда из соотношений (1.12), (1.14) вытекает $e_{i+1} = y_{i+1} |y_{i+1}|^{-1}$ для всех i . Заменяя в полученном равенстве и в последнем равенстве (1.12) индексы на аргументы, получим $e(t) = y |y|^{-1}$, $e(t + \Delta t) = (y + \Delta t A y) |y + \Delta t A y|^{-1}$, где аргумент t в правых частях опущен. Переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, будем иметь

$$\dot{e} = P(e, t), \quad P(e, t) = A(t)e - (A(t)e, e)e, \quad t \in [t_0, T], \quad e(t_0) = y_0 |y_0|^{-1} \quad (4.3)$$

Можно отметить, что система (4.3) описывает изменение единичного вектора, параллельного вектору решения системы $y' = Ay$, $y(t_0) = y_0$.

Для получения непрерывного аналога условия (4.2) выясним, к чему стремится отношение $d(e_{i+1}, t_{i+1}) |A_i y_i|^{-1}$ при $\Delta t \rightarrow 0$. Заметим, что из (1.14) после замены индексов на аргументы следует $d(e(t), t) = |y(t)|$ для всех t . Далее с учетом (4.3) имеем

$$\frac{d(e(t + \Delta t), t + \Delta t)}{|y(t) + \Delta t A(t)y(t)|} = 1 - \frac{1}{|y|} D(e, t) \Delta t + o(\Delta t^2) \quad (4.4)$$

$$D(e, t) = d(e, t) (A(t)e, e) - \frac{\partial d}{\partial t} - \left(P(e, t), \frac{\partial d}{\partial e} \right)$$

Через dd / de обозначен градиент скалярной функции $d(e, t)$ по векторному аргументу e . Неравенство (4.2) переходит в пределе в неравенство

$$D(e, t) > 0 \quad (4.5)$$

Переходя в (1.14) к непрерывному аргументу t и устремляя $\Delta t \rightarrow 0$, получим с учетом (4.4)

$$y' = Ay - De, \quad y(t_0) = y_0, \quad e = y |y|^{-1} \quad (4.6)$$

Из (1.14) следует также, что решение уравнения (4.6) будет иметь вид $y(t) = d(e(t), t) \xi(t) |\xi(t)|^{-1}$, где вектор $\xi(t)$ — решение однородного уравнения $\xi' = A(t) \xi$, $\xi(t_0) = y_0$. Этот факт легко проверяется и непосредственной подстановкой в систему (4.6). Следовательно, решение уравнения (4.3) имеет вид $e(t) = \xi(t) |\xi(t)|^{-1}$.

Интервал (1.16) изменения β стягивается в точку при $\Delta t \rightarrow 0$ (см. (4.4)). Введем поэтому другой параметр p соотношением $\beta = p\Delta t$. Параметр β определял положение отрезка $I(x_k^1, x_k^2)$ на отрезке $I(x_k^{1'}, x_k^{2'})$ (фиг. 2), а параметр p соответствует скорости движения одного отрезка по другому (скорости изменения результата измерения). Поделив обе части в (1.16) на Δt и перейдя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, аналогично (4.4) получим интервал измерения параметра p

$$|p| \leq 1/2 D(e, t) / |y| \quad (4.7)$$

Уравнение (1.14) после замены $p = vD|y|^{-1}$ перейдет в уравнение:

$$z' = Az + b(u, t) + vD(e, t)e, \quad z(t_0) = z_0, \quad u(t) \in U_t, \quad |v(t)| \leq 1/2 \quad (4.8)$$

Уравнения (4.3), (4.6) решаются независимо от v и u , поэтому можно считать, что (4.8) задает дифференциальную игру с фазовым вектором z , где управлениями противников будут вектор u и скаляр v , платой — функционал (2.2). Зная векторы $z(t)$ и $y(t)$, можно утверждать, что $x(t) = z(t) + \gamma y(t)$, где $|\gamma| \leq 1/2$, $t \in [t_0, T]$.

Таким образом, задача об управлении непрерывной системой при неточном знании фазового вектора свелась в рассмотренном случае к дифференциальной игре (4.8), (2.2), и к ней можно применить методы решения дифференциальных игр [1,5].

Поступила I VI 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Красовский Н. Н. Игровые задачи о встрече движений. М., «Наука», 1970
2. Шелементьев Г. С. Об одной задаче коррекции движения. ПММ, 1969, т. 33, вып. 2
3. Черноусько Ф. Л. Минимаксная задача одноразовой коррекции при погрешностях измерений. ПММ, 1968, т. 32, вып. 4
4. Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., Физматгиз, 1965
5. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М., «Мир», 1967