Прикладная математика и механика. Том 35, 1971

МИНИМАКСНОЕ ПОГЛОЩЕНИЕ В ИГРЕ СБЛИЖЕНИЯ

Н. Н. Красовский

(Свердловск)

Дается определение программного минимаксного поглощения цели в задаче сближения конфликтно управляемого движения с заданным множеством, и строятся достаточные условия успешного решения этой задачи.

1. Постановка задачи. Рассмотрим собственно линейную управляемую систему, описываемую векторным дифференциальным уравнением

$$dx / dt = A(t)x + f(t,u,v), \qquad u \in P, \quad v \in Q \tag{1.1}$$

Здесь x — n-мерный фазовый вектор системы, u и v — r-мерные векторы управления, подчиненные первому и второму конфликтующим игрокам соответственно, P и Q — ограниченные замкнутые множества, матрица-функция $A(t)$ и вектор-функция $f(t, u, v)$ предполагаются непрерывными. Пусть символ $\{x\}_m$ означает вектор, составленный из первых m-координат вектора x. По условиям задачи в пространстве векторов $\{x\}_m$ задано ограниченное, замкнутое и выпуклое целевое множество M. Зафиксирована начальная позиция $\{t_0, x_0\}$. Цель первого игрока — обеспечить встречу точки $\{x[t]\}_m$ с множеством M, второй игрок препятствует этой встрече.

Ниже будем интересоваться задачей лишь с позиций первого игрока, которому надлежит обеспечить встречу при всех возможных действиях противника. Уточним эту задачу, стоящую перед первым игроком. Назовем (чистой) стратегией $U(t, x)$ первого игрока функцию $U(t, x)$, которая всякой возможной позиции $\{t, x\}$ $(t \geqslant t_0)$ ставит в соответствие замкнутое множество $U(t, x) \subset P$. Обозначим символом $F(t, x; U)$ выпуклую оболочку множества всех векторов $f(t, u, v)$ при u из $U(t, x)$ и v из Q. Стратегию U будем считать допустимой, если множества $F(t, x; U)$ полунепрерывны сверху относительно включения по изменению позиции $\{t, x\}$. Движением $x[t] = x[t; t_0, x_0, U]$, порожденным на отрезке $[t_0, \vartheta]$ стратегией U из позиции $\{t_0, x_0\}$, назовем всякую абсолютно непрерывную функцию $x[t]$, удовлетворяющую начальному условию $x[t_0] = x_0$ и при почти всех $t \in [t_0, \vartheta]$ — контингенции

$$dx[t] / dt \in A(t)x[t] + F(t, x[t]; U) \tag{1.2}$$

Существование движений $x[t]$ обеспечено известными теоремами существования решений для уравнения (1.2) в контингенциях [1]. Скажем, что стратегия U из позиции $\{t_0, x_0\}$ обеспечивает встречу движения $x[t]$ (1.1) с множеством M в момент ϑ (к моменту ϑ), если всякое движение,

$x[t] = x[t; t_0, x_0, U]$ удовлетворяет условию $\{x[\vartheta]\}_m \in M$ ($\{x[t]\}_m \in M$, по крайней мере, один раз при $t \in [t_0, \vartheta]$).

Задача первого игрока состоит в отыскании таких ϑ и U, чтобы стратегия U обеспечивала встречу в момент ϑ (к моменту ϑ).

Из предложенной формализации задачи вытекает, что допускаются способы формирования управления v из весьма широкого класса. В частности, выбор значения $v[t]$ может опираться на информацию о значении $u[t]$, реализующемся в тот же момент времени t. Напротив, выбор управления $u[t]$ здесь делается лишь на основании информации о реализующейся позиции $\{t, x[t]\}$.

Подобная задача для линейной системы, описываемой уравнением

$$dx / dt = A(t)x + B(t)u - C(t)v$$

была рассмотрена в [2], где приведена и соответствующая библиография. Использованное там понятие программного поглощения целевого множества M, применимое в линейном случае для решения исходной позиционной игровой задачи сближения, здесь для нелинейной по u и v системы (1.1) уже не совсем пригодно, если оставаться в рамках чистых стратегий $U(t, x)$, определенных выше в соответствии с [2].

Если перейти к смешанным стратегиям $\{\mu(du) / t, x\}$, то понятие программного смешанного поглощения множества M, пригодное для задачи сближения в случае системы (1.1), получается почти автоматической трансформацией понятия программного поглощения из [2]. При этом лишь программные управления-функции $u(t)$ и $v(t)$ заменяются на смешанные программные управления-меры $\mu(du / t)$ и $\nu(dv / t)$ [3]. Однако в рамках чистых стратегий $U(t, x)$ переход от линейной системы к системе (1.1) требует уже более существенной трансформации понятия программного поглощения цели M, если иметь в виду использование этого понятия для решения исходной позиционной задачи сближения с точки зрения интересов первого игрока. Напротив, если иметь в виду решение позиционной задачи уклонения, интересной для второго игрока, то для этого решения и в случае системы (1.1) остается пригодным понятие программного поглощения цели, использованное в [2], которое можно теперь для различения именовать максиминным.

Цель данной статьи — дать определение понятия *программного минимаксного поглощения* множества M процессом (1.1) и, выделив регулярный случай этого поглощения, обосновать правило минимаксного экстремального прицеливания, которое формирует минимаксную экстремальную стратегию, обеспечивающую в этом регулярном случае встречу к моменту ϑ_0 программного минимаксного поглощения множества M из данной начальной позиции $\{t_0, x_0\}$. Так как рассуждения во многом идут по тому же плану, что и в [2], многие сходные элементы будут опущены и более подробно рассмотрены лишь те основные свойства рассматриваемого теперь программного минимаксного поглощения M, которые отличают его от программного максиминного поглощения M, рассмотренного в [2].

2. Минимаксное поглощение цели. Пусть выбрано некоторое число $\vartheta > t_0$. Обозначим $V(t, u)$ функцию, которая всякой паре $\{t, u\}$, где $t \in [t_0, \vartheta]$ и $u \in P$, ставит в соответствие множество $V(t, u) \in Q$. Обозначим $F(t; V)$ выпуклую замкнутую оболочку множества векторов $f(t, u, v)$ при всех v из $V(t, u)$ и u из P. Допустим только такие функции $V(t, u)$, для которых множества $V(t, u)$ — замкнутые и множества $F(t; V)$ полунепрерывны сверху относительно включения по изменению переменной t

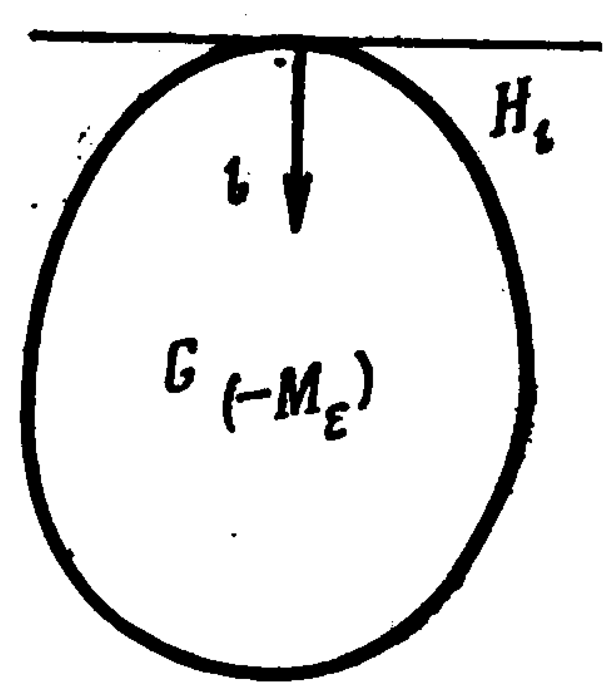
на отрезке $[t_0, \vartheta)$. Определим движение $x(t) = x(t;\ t_*,\ x_*,\ V)$ как любую абсолютно непрерывную функцию $x(t)$, удовлетворяющую начальному условию $x(t_*) = x_*$ и при почти всех t из $[t_*, \vartheta]$ — контингенции

$$dx(t)\ /\ dt \in A(t)\,x(t) + F(t;\ V) \tag{2.1}$$

Обозначим $G(t_*, x_*, \vartheta; V)$ область достижимости в пространстве $\{x\}_m$ ([2], стр. 399) из позиции $\{t_*, x_*\}$ к моменту $\vartheta \geqslant t_*$ для движений $x(t) = x(t; t_*, x_*, V)$ (2.1). Известно, что область G — ограниченное, выпуклое и замкнутое множество.

Скажем, что из позиции $\{t_*, x_*\}$ процесс (1.1) поглощает программно по минимаксу множество M в момент $\vartheta \geqslant t_*$, если при всяком выборе допустимой функции $V(t,\ u)$ область G пересекается с M. Иначе говоря, процесс (1.1) поглощает множество M программно по минимаксу из позиции $\{t_*,\ x_*\}$ в момент $\vartheta \geqslant t_*$ тогда и только тогда, когда при всяком выборе допустимой функции $V(t,\ u)$, по крайней мере, одно движение $x(t) = x(t;\ t_*,\ x_*,\ V)$ (2.1) в момент ϑ попадает на M, т. е. осуществляется вложение $\{x(\vartheta)\}_m \in M$.

Будем обозначать M_ε замкнутые евклидовы ε-окрестности множества M. Пусть $\varepsilon_0(t_*,\ x_*,\ \vartheta)$ — нижняя граница тех значений $\varepsilon \geqslant 0$, при которых процесс (1.1) поглощает программно по минимаксу множество M_ε из позиции $\{t_*,\ x_*\}$ в момент ϑ. Величину $\varepsilon_0(t,\ x,\ \vartheta)$ по аналогии с ([2], стр. 108) будем именовать минимаксным гипотетическим рассогласованием. Пусть $G(t_*,\ x_*,\ \vartheta;\ V_0)$ — те области достижимости $G(t_*,\ x_*,\ \vartheta;\ V)$, расстояние которых до M равно $\varepsilon_0(t_*,\ x_*,\ \vartheta)$. (Существование таких не пустых областей G_0 при условии $\varepsilon_0 > 0$ пока предполагаем априори, ниже их существование будет проверено). Назовем случай регулярным, если при всяком выборе позиции $\{t_*,\ x_*\}$, в которой $\varepsilon_0(t_*,\ x_*,\ \vartheta) > 0$, все области G_0 пересекаются с M_{ε_0} по одной единственной гиперплоскости. Число $\vartheta_0 \geqslant t_*$ для позиции $\{t_*,\ x_*\}$ назовем (первым) моментом программного поглощения по минимаксу множества M процессом (1.1), если это число ϑ_0 — наименьшее из чисел $\vartheta \geqslant t_*$, для которых процесс (1.1) из позиции $\{t_*,\ x_*\}$ в момент ϑ поглощает программно по минимаксу множество M.



3. Минимаксное гипотетическое рассогласование. Составим выражение для вычисления величины ε_0. Пусть выбрана некоторая допустимая функция $V(t, u)$. Область $G(t_*,\ x_*,\ \vartheta;\ V)$ пересекается с множеством M_ε тогда и только тогда, когда замкнутая «$(-M_\varepsilon)$-окрестность» $G(t_*, x_*, \vartheta;\ V)_{(-M_\varepsilon)}$ области $G(t_*,\ x_*,\ \vartheta;\ V)$ содержит точку $\{x\}_m = 0$. (Область $G_{(-M_\varepsilon)}$ складывается из всех векторов $q = g - h + k$, где $g \in G$, $h \in M$ и $\|k\| \leqslant \varepsilon$, причем $\|k\|$ означает евклидову норму вектора.) Но выпуклое, ограниченное замкнутое множество $G_{(-M_\varepsilon)}$ есть пересечение его опорных полупространств H_l (см. фигуру)

$$l'\{x\}_m \geqslant \min_q l'q, \quad q \in G(t_*, x_*, \vartheta; V)_{(-M_\varepsilon)} \tag{3.1}$$

Здесь l — единичный m-мерный вектор, штрихом обозначено транспонирование.

По определению множества $G(t_*, x_*, \vartheta; V)_{(-M_\varepsilon)}$, области достижимости $G(t_*, x_*, \vartheta; V)$ и в соответствии с (2.1) для $q \in G_{(-M_\varepsilon)}$ имеем

$$q = \{x(\vartheta)\}_m - h + k = \left\{X(\vartheta, t_*)x_* + \int_{t_*}^{\vartheta} X(\vartheta, t)w(t)\,dt\right\}_m - h + k \qquad (3.2)$$

Здесь $X(t, \tau)$ — фундаментальная матрица решений уравнения

$$dx / dt = A(t)x, \quad w(t) \in F(t; V), \quad h \in M, \quad \|k\| \leqslant \varepsilon$$

Из (3.1) и (3.2) следует, что точка $\{x\}_m = 0$ лежит в области $G(t_*, x_*, \vartheta; V)_{(-M_\varepsilon)}$ тогда и только тогда, когда для любого единичного вектора l выполнено условие

$$l'\{X(\vartheta, t_*)x_*\}_m + \min_{w(t)} \int_{t_*}^{\vartheta} l'\{X(\vartheta, t)w(t)\}_m\,dt +$$
$$+ \min_h l'(-h) - \varepsilon \leqslant 0, \quad w(t) \in F(t; V), \quad h \in M \qquad (3.3)$$

Из (3.3) следует, что величина $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(t_*, x_*, \vartheta)$ определяется соотношением

$$\varepsilon_0 = \sup_{\|l\|=1}\left(\left[\sup_V \min_{w(t)} \int_{t_*}^{\vartheta} l'\{X(\vartheta, t)w(t)\}_m\,dt\right] + \right.$$
$$\left. + l'\{X(\vartheta, t_*)x_*\}_m - \max_h l'h\right) \qquad (3.4)$$

если правая часть этого равенства неотрицательна; иначе $\varepsilon_0(t_*, x_*, \vartheta) = 0$. Проверим, что фигурирующая в квадратных скобках в правой части (3.4) верхняя грань по всем допустимым функциям $V(t, u)$ достигается на некоторой допустимой функции $V_l(t, u)$. Для этого достаточно выбрать в качестве множеств $V_l(t, u)$ те множества, которые складываются из всех векторов v_u из Q, удовлетворяющих условию

$$l'\{X(\vartheta, t)f(t, u, v_u)\}_m = \max_{v \in Q}(l'\{X(\vartheta, t)f(t, u, v)\}_m) \qquad (3.5)$$

В самом деле, функция $V_l(t, u)$ будет допустимой, ибо можно проверить, что множества $V_l(t, u)$, определенные условием (3.5), замкнуты и полунепрерывны сверху по включению относительно изменения t и u. Кроме того, при всяком значении u и любом v из (3.5) следует неравенство

$$l'\{X(\vartheta, t)f(t, u, v_u)\}_m \geqslant l'\{X(\vartheta, t)f(t, u, v)\}_m$$

Из этого неравенства следует

$$\min_{u \in P}(l'\{X(\vartheta, t)f(t, u, v_u)\}_m) \geqslant \min_{u \in P}(l'\{X(\vartheta, t)f(t, u, v)\}_m) \qquad (3.6)$$

или, по определению $F(t; V)$, при любой допустимой функции V

$$\min_{w \in F(t;\, V_l)}(l'\{X(\vartheta, t)w\}_m) \geqslant \min_{w \in F(t;\, V)}(l'\{X(\vartheta, t)w\}_m) \qquad (3.7)$$

Левые части (3.7) и (3.6) равны величине

$$\min_{u\in P}\max_{v\in Q}(l'\{X(\vartheta,t)f(t,u,v)\}_m)=\varkappa(t,\vartheta,l)$$

Она представляет собой непрерывную функцию переменной t. Отсюда и из свойств множеств $F(t;\ V_l)$ следует, что существует измеримая функция $w_l(t)\in F(t;\ V_l)$, которая при почти всех t удовлетворяет условию

$$l'\{X(\vartheta,t)w_l(t)\}_m=\min_{w\in F(t;\ V_l)}(l'\{X(\vartheta,t)w\}_m) \tag{3.8}$$

Далее из (3.7) и свойств множеств $F(t;\ V)$ следует, что, какова бы ни была допустимая функция $V(t,\ u)$, найдется такая измеримая функция $w(t)\in F(t;\ V)$ при почти всех t, для которой

$$\min_{w\in F(t;\ V_l)}(l'\{X(\vartheta,t)w\}_m)\geqslant l'\{X(\vartheta,t)w(t)\}_m$$

Сопоставляя полученные неравенства, придем к нужному соотношению

$$\int_{t_*}^{\vartheta}l'\{X(\vartheta,t)w_l(t)\}_m\,dt=\min_{w(t)\in F(t;\ V_l)}\left(\int_{t_*}^{\vartheta}l'\{X(\vartheta,t)w(t)\}_m\,dt\right)\geqslant$$

$$\geqslant\sup_V\min_{w(t)\in F(t;\ V)}\left(\int_{t_*}^{\vartheta}l'\{X(\vartheta,\ t)w(t)\}_m\,dt\right)$$

Это соотношение доказывает, что верхняя грань по V в (3.4) действительно достигается на допустимой функции $V_l(t,\ u)$. Более того, из приведенных соображений следует также, что величина $\varepsilon_0(t_*,\ x_*,\ \vartheta)$ в (3.4) определяется равенством

$$\varepsilon_0=\max_{\|l\|=1}\left(\int_{t_*}^{\vartheta}\min_{u\in P}\max_{v\in Q}l'\{X(\vartheta,t)f(t,u,v)\}_m\,dt+\right.$$

$$\left.+\,l'\{X(\vartheta,t_*)x_*\}_m-\max_{h\in M}l'h\right) \tag{3.9}$$

если правая часть этого равенства неотрицательна; иначе $\varepsilon_0(t_*,\ x_*,\ \vartheta)=0$. Приведенные соображения показывают также, что при $\varepsilon_0(t_*,\ x_*,\ \vartheta)>0$ действительно существуют области $G(t_*,\ x_*,\ \vartheta;\ V)_0$, расстояние которых от M равно величине ε_0. Эти области достижимости порождаются допустимыми функциями $V=V_l(t,\ u)$, отвечающими тем значениям l, которые максимизируют правую часть (3.9). Далее, как и в [2], заключаем из (3.9), что случай будет регулярным тогда и только тогда, когда при $\varepsilon_0>0$ максимум в правой части (3.9) достигается лишь на единственном векторе $l^\circ(t_*,\ x_*,\ \vartheta)$. Для этого, в свою очередь, необходимо и достаточно, чтобы величина, максимизируемая в (3.9), взятая с обратным знаком, была выпуклой функцией переменной l.

Наконец, повторяя с должными, но непринципиальными изменениями рассуждения из ([2], стр. 149), можно проверить, что в регулярном случае в области $\varepsilon_0(t, x, \vartheta) > 0$ при фиксированном значении ϑ величина $\varepsilon_0(t, x, \vartheta)$ — дифференцируемая функция переменных t и x, и ее непрерывные частные производные $\partial\varepsilon_0 / dt$, $\partial\varepsilon_0 / \partial x_i$ в точке $\{t, x\}$ определяются равенствами

$$\frac{\partial\varepsilon_0}{\partial t} = -\min_{u \in P} \max_{v \in Q} [s'(t) f(t, u, v)] - s'(t) A(t) x$$

$$\partial\varepsilon_0 / \partial x_i = s_i(t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{3.10}$$

Здесь $s(\tau)$ — вектор-функция, удовлетворяющая условиям

$$ds(\tau) / d\tau = -A'(\tau) s(\tau) \qquad (t \leqslant \tau \leqslant \vartheta) \tag{3.11}$$

$$s'(\vartheta) = (\overset{\circ}{l_1}, \ldots, \overset{\circ}{l_m}, 0, \ldots, 0)$$

причем $l^\circ(t, x, \vartheta)$ — вектор, который разрешает задачу (3.9) (при $t = t_*$, $x = x_*$).

4. **Минимаксное экстремальное прицеливание.** Рассмотрим регулярный случай. Пусть в некоторый момент $t = t_*$ реализовалась позиция $\{t_*, x_*\}$, причем $\varepsilon_0(t_*, x_*, \vartheta) > 0$ для какого-то фиксированного заранее момента ϑ. Из материала п. 3 следует, что существует некоторая область достижимости $G(t_*, x_*, \vartheta; V_{l^\circ})$, которая касается ε_0 —окрестности M_{ε_0} множества M, и всякая другая область достижимости $G(t_*, x_*, \vartheta; V)$ для движения $x(t; t_*, x_*, V)$ (2.1) также обязательно пересекается с M_{ε_0}

Пусть $\{x\}_m = g_0$ — одна из точек в пространстве $\{x\}_m$, по которым пересекаются множества M_{ε_0} и $G(t_*, x_*, \vartheta; V_{l^\circ})$. По условию регулярности все такие точки лежат на одной гиперплоскости $l^{\circ\prime}(t_*, x_*, \vartheta) \{x\}_m = \alpha$. Так как точка g_0, кроме того, лежит на границе области $G(t_*, x_*, \vartheta; V_{l^\circ})$, то движение $x(t; t_*, x_*, V_{l^\circ})$ (2.1), которое выводится на эту точку в момент $t = \vartheta$, будет оптимальным, и порождающее его управление $w^\circ(t) \in F(t; V_{l^\circ})$ $(t_* \leqslant t \leqslant \vartheta)$ должно удовлетворять соответствующему условию принципа максимума [4].

В рассматриваемом случае это условие удобно записать в форме условия минимума

$$s'(t) w^\circ(t) = \min_{w \in F(t;\, V_{l^\circ})} [s'(t) w] \tag{4.1}$$

где $s(t)$ — вектор-функция, определенная условиями (3.11).

Условие максимума заменено условием минимума по той причине, что вектор l°, определяющий краевое условие в (3.11), имеет смысл не внешней, а внутренней нормали к области достижимости G (фигура).

Так как $s'(t) = (l_1^\circ, \ldots, l_m^\circ, 0, \ldots, 0) X(\vartheta, t)$, то функция $w_0(t)$ из (3.8) при $l = l^\circ(t_*, x_*, \vartheta)$ как раз удовлетворяет условию (4.1).

Теперь, перенося на рассматриваемый случай определение экстремального прицеливания из ([2], стр. 115—121), скажем, что каждое управление w_e из множества всех значений $w_e(t_*) \in F(t_*; V_{l^\circ})$, которые удовлетворяют условию (4.1) при $t = t_*$, осуществляет *минимаксное экстремальное прицеливание* движения (2.1) из позиции $\{t_*, x_*\}$ в одну из точек g^ρ к моменту ϑ. В соответствии с этим минимаксную экстремальную стратегию U_e зададим множествами $U_e(t, x)$, которые во всякой позиции $\{t_*, x_*\}$ при $\varepsilon_0(t_*, x_*, \vartheta) > 0$ складываются из всех значений u_e, удовлетворяющих условию минимакса

$$\min_{u \in P} \max_{v \in Q} [s'(t_*) f(t_*, u, v)] = \max_{v \in Q} [s'(t_*) f(t_*, u_e, v)] \qquad (4.2)$$

а при $\varepsilon_0(t_*, x_*, \vartheta) = 0$ полагаем $U_e(t, x) = P$.

Можно проверить, что экстремальная стратегия будет допустимой. Далее из условий (4.2) и из выражений (3.10) следует, что в области $\varepsilon_0 > 0$ выполняется равенство

$$\max_{x[t]} \left(\frac{d\varepsilon_0(t, x[t], \vartheta)}{dt} \right)_{U_e} = \min_U \max_{x[t]} \left(\frac{d\varepsilon_0(t, x[t], \vartheta)}{dt} \right)_U = 0 \qquad (4.3)$$

Здесь символ $(d\varepsilon_0(t, x[t], \vartheta) / dt)_U$ означает полную производную по времени от функции $\varepsilon_0(t, x[t], \vartheta)$ вдоль движения $x[t]$ системы (1.1) при выбранной стратегии U, т. е. полную производную по времени t от функции $\varepsilon_0(t, x[t], \vartheta)$ вдоль какого-либо решения $x[t]$ уравнения (1.2) в контингенциях. Тогда, повторяя с соответствующими изменениями рассуждения ([2], стр. 153), убеждаемся в справедливости следующего утверждения.

Теорема. Пусть для начальной позиции $\{t_0, x_0\}$ существует момент ϑ_0 программного минимаксного поглощения множества M, и при этом значении $\vartheta = \vartheta_0$ случай является регулярным. Тогда экстремальная стратегия $U_e(t, x)$ при фиксированном значении $\vartheta = \vartheta_0$ обеспечивает встречу движения $x[t] = x[t; t_0 x_0, U_e]$ с M к моменту ϑ_0, так что для всякого движения $x[t] = x[t; t_0, x_0, U_e]$ имеем $\{x[\vartheta_0]\}_m \in M$.

Примечание. Если по ходу дела реализуется позиция $\{t_*, x_*\}$, для которой $\vartheta_0(t_*, x_*) < \vartheta_0(t_0, x_0)$, то, начиная с момента t_*, можно перейти на экстремальную стратегию U_e, отвечающую уже новому значению момента поглощения $\vartheta_0(t_*, x_*)$ (в предположении, что случай остается регулярным).

Поступила 19 VII 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Ф и л и п п о в А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. Матем. сб., 1960, т. 51 (93), вып. 1.
2. К р а с о в с к и й Н. Н. Игровые задачи о встрече движений. М., «Наука», 1970.
3. К р а с о в с к и й Н. Н., С у б б о т и н А. И. Экстремальные стратегии в дифференциальных играх. Докл. АН СССР, 1971, т. 196, № 2.
4. П о н т р я г и н Л. С., Б о л т я н с к и й В. Г., Г а м к р е л и д з е Р. В., М и щ е н к о Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М., Физматгиз, 1961.