Линия уровня $\rho = 0$ в окрестности точки C° есть прямая

$$y - y_0 = 1.314\ (x - x_0) \tag{6.3}$$

На фиг. 1 представлена область интегрирования в плоскости xy. Переход в плоскость $\xi_1\xi_2$ осуществляется при помощи формул (3.6). На фиг. 2 изображена картина течения в плоскости автомодельных переменных. Линия уровня $\rho = 0$ в окрестности точки C состоит из двух кусков ортогональных прямых

$$\xi_2 = -0.761\ (\xi_1 - 4), \qquad \xi_2 - \xi_{20} = 1.314\ (\xi_1 - \xi_{10}) \tag{6.4}$$

Поступила 10 XII 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Каждан Я. М. О движении газа за расходящейся детонационной волной в пространстве с вырезанным конусом. ПММ, 1967, т. 31, вып. 5.
2. Каждан Я. М. Исследование окрестности свободной границы при движении газа за расходящейся детонационной волной в пространстве с вырезанным конусом. ПММ, 1968, т. 32, вып. 2.
3. Сучков В. А. Двойные волны плоского потенциального течения политропного газа, Тр. Матем. ин-та им. Стеклова АН СССР, 1966, т. 74. ч. 1.

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ПОЛОГО КОНУСА

М. Ф. Мехтиев, Ю. А. Устинов

(Баку, Ростов-на-Дону)

Рассматривается осесимметричная задача теории упругости для тела, ограниченного двумя сферическими и двумя коническими поверхностями. На основе результатов работ [1,2] проводится асимптотический анализ напряженно-деформированного состояния оболочки. Методами, разработанными в работах [3,4], краевая задача сводится к бесконечным системам.

§ 1. Отнесем упругий полый конус к сферической системе координат

$$r,\quad \theta,\quad \varphi \quad (r_1 \leqslant r \leqslant r_2,\quad \theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2,\quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi)$$

Предположим, что на конических границах ($\theta = \theta_1$, $\theta = \theta_2$) заданы условия

$$\sigma_\theta = 0, \qquad \tau_{r\theta} = 0 \tag{1.1}$$

Методом однородных решений, используя результаты работ [1, 2], перемещения и напряжения можно представить в виде

$$u_r = u_r^\circ + r^{-1/2} \sum_{k=1}^{\infty} C_k r^{z_k} U_{rk}, \qquad u_\theta = u_\theta^\circ + r^{-1/2} \sum_{k=1}^{\infty} C_k r^{z_k} U_{\theta k} \tag{1.2}$$

$$\sigma_r = \sigma_r^\circ + 2Gr^{-3/2} \sum_{k=1}^{\infty} C_k r^{z_k} Q_{rk}$$

$$\sigma_\theta = \sigma_\theta^\circ + 2Gr^{-3/2} \sum_{k=1}^{\infty} C_k r^{z_k} Q_{\theta k}, \qquad \sigma_\varphi = \sigma_\varphi^\circ + 2Gr^{-3/2} \sum_{k=1}^{\infty} C_k r^{z_k} Q_{\varphi k} \tag{1.3}$$

$$\tau_{r\theta} = \tau_{r\theta}^\circ + 2Gr^{-3/2} \sum_{k=1}^{\infty} C_k r^{z_k} T_k$$

Здесь

$$\begin{aligned} u_r^\circ &= C_0 r^{-1}\,[4\,(1-\nu)\cos\theta-(1-2\nu)\,(\cos\theta_1+\cos\theta_2)]-A\cos\theta \\ u_\theta^\circ &= C_0 r^{-1}\,[(3-4\nu)\sin\theta-(1-2\nu)\,(1+\cos\theta_1\cos\theta_2)\csc\theta+ \\ &\quad+(1-2\nu)\,(\cos\theta_1+\cos\theta_2)\operatorname{ctg}\theta]+A\sin\theta \end{aligned} \tag{1.4}$$

$$\begin{aligned} \sigma_r^\circ &= 2GC_0 r^{-2}\,[2\,(2-\nu)\cos\theta-(1-2\nu)\,(\cos\theta_1+\cos\theta_2)] \\ \sigma_\theta^\circ &= -2\,(1-2\nu)\,GC_0 r^{-2}\,[\cos\theta-(1+\cos\theta_1\cos\theta_2)\operatorname{ctg}\theta\csc\theta+ \\ &\quad+(\cos\theta_1+\cos\theta_2)\operatorname{ctg}^2\theta] \\ \sigma_\varphi^\circ &= -2\,(1-2\nu)\,GC_0 r^{-2}\,[\cos\theta+(1+\cos\theta_1\cos\theta_2)\operatorname{ctg}\theta\csc\theta+ \\ &\quad+(\cos\theta_1+\cos\theta_2)\,(1+\operatorname{ctg}^2\theta)] \\ \overset{\circ}{\tau}_{r\theta} &= -2\,(1-2\nu)\,GC_0 r^{-2}\,[\sin\theta-(1+\cos\theta_1\cos\theta_2)\csc\theta+(\cos\theta_1+\cos\theta_2)\operatorname{ctg}\theta \end{aligned} \tag{1.5}$$

$$\begin{aligned} U_{rk} &= (z_k-{}^1/_2)\,(z_k+4\nu-{}^7/_2)\,\psi_1(\theta,z_k)-(z_k+{}^1/_2)\,\psi_2(\theta,z_k) \\ U_{\theta k} &= (z_k-4\nu+{}^7/_2)\,\frac{d\psi_1(\theta,z_k)}{d\theta}-\frac{d\psi_2(\theta,z_k)}{d\theta} \\ Q_{rk} &= (z_k-{}^1/_2)\,(z_k^2-4z_k+{}^7/_4+2\nu)\,\psi_1(\theta,z_k)-(z_k^2-{}^1/_4)\,\psi_2(\theta,z_k) \\ Q_{\theta k} &= -(z_k-{}^1/_2)\,(z_k^2+z_k+2\nu-{}^7/_4)\,\psi_1(\theta,z_k)-(z_k+{}^7/_4-4\nu)\,d\psi_1/d\theta+ \\ &\quad+(z_k+{}^1/_2)^2\,\psi_2(\theta,z_k)+\operatorname{ctg}\theta\,d\psi_2/d\theta \\ Q_{\varphi k} &= (z_k-{}^1/_2)\,(z_k-{}^7/_2+4\nu)\,\psi_1(\theta,z_k)+(z_k+{}^7/_4-4\nu)\operatorname{ctg}\theta\,d\varphi_1/d\theta- \\ &\quad-(z_k+{}^1/_2)\,\psi_2(\theta,z_k)-\operatorname{ctg}\theta\,d\psi_2/d\theta \\ T_k &= (z_k^2-z_k+2\nu-{}^7/_4)\,d\psi_1/d\theta-(z_k-{}^1/_2)\,d\psi_2/d\theta \end{aligned} \tag{1.6}$$

$$\begin{aligned} \psi_1(\theta,z) &= (z-{}^1/_2)\,(z^2-{}^1/_4)\,\varphi_1(-z)\,[\csc\theta_2 D_{z-{}^3/_2}(\theta,\theta_1)- \\ &\quad-D^{(1,0)}_{z+{}^1/_2}(\theta_1,\theta_2)\,D^{(0,1)}_{z-{}^3/_2}(\theta,\theta_2)]+ \\ &\quad+4\,(1-\nu)\,z\,(z-{}^1/_2)\operatorname{ctg}\theta_2 D^{(1,1)}_{z+{}^1/_2}(\theta_1,\theta_2)\,D^{(0,1)}_{z-{}^3/_2}(\theta,\theta_2)+ \\ &\quad+(z-{}^1/_2)^3\,\varphi_1(z)\,D^{(1,1)}_{z+{}^1/_2}(\theta_1,\theta_2)\,D^{(0,0)}_{z-{}^3/_2}(\theta,\theta_2) \end{aligned} \tag{1.7}$$

$$\begin{aligned} \psi_2(\theta,z) &= -(z-{}^1/_2)^2\,\varphi_1(z)\,\varphi_1(-z)\,[\csc\theta_2\dot{D}_{z+{}^1/_2}(\theta,\theta_2)- \\ &\quad-D^{(1,0)}_{z-{}^3/_2}(\theta_1,\theta_2)D^{(0,1)}_{z+{}^1/_2}(\theta_1,\theta_2)]+ \\ &\quad+4\,(1-\nu)\,z\varphi_1(-z)\operatorname{ctg}\theta_2 D^{(1,1)}_{z-{}^3/_2}(\theta_1,\theta_2)\,D^{(0,1)}_{z+{}^1/_2}(\theta,\theta_2)+ \\ &\quad+(z+{}^1/_2)^2\,\varphi_1^2(-z_k)\,D^{(1,1)}_{z-{}^3/_2}(\theta_1,\theta_2)\,D^{(0,1)}_{z+{}^1/_2}(\theta,\theta_2) \end{aligned} \tag{1.8}$$

$$D_t^{(s,l)}(\varphi_1\psi)=P_t^{(s)}(\cos\varphi)\,Q_t^{(l)}(\cos\psi)-P_t^{(s)}(\cos\psi)\,Q_t^{(l)}(\cos\varphi) \tag{1.9}$$

В формулах (1.2) — (1.9) $P_t^{(s)}(\cos\varphi)$, $Q_t^{(l)}(\cos\varphi)$ — функции Лежандра соответственно первого и второго рода, $\varphi_1(z)=z^2+z+2\nu-{}^7/_4$, G, ν — упругие постоянные, A, C_0, C_k — произвольные постоянные, z_k — комплексные нули функции

$$\begin{aligned} \Delta(z) &= -(z-{}^1/_2)^4\varphi_1^2(z)D^{(0,0)}_{z-{}^3/_2}(\theta_1,\theta_2)\,D^{(1,1)}_{z+{}^1/_2}(\theta_1,\theta_2)- \\ &\quad-(z+{}^1/_2)^4\varphi_1^2(-z)\,D^{(0,0)}_{z+{}^1/_2}(\theta_1,\theta_2)\,D^{(1,1)}_{z-{}^3/_2}(\theta_1,\theta_2)+ \\ &\quad+4\,(1-\nu)\,z\,(z-{}^1/_2)^2\,\varphi_1(z)\,D^{(1,1)}_{z+{}^1/_2}(\theta_1,\theta_2)\,[\operatorname{ctg}\theta_2 D^{(0,1)}_{z-{}^3/_2}(\theta_1,\theta_2)+ \\ &\quad+\operatorname{ctg}\theta_1 D^{(1,0)}_{z-{}^3/_2}(\theta_1,\theta_2)]-4\,(1-\nu)\,z\,(z+{}^1/_2)^2\,\varphi_1(-z)\,D^{(1,1)}_{z-{}^3/_2}(\theta_1,\theta_2)\times \\ &\quad\times[\operatorname{ctg}\theta_2 D^{(0,1)}_{z+{}^1/_2}(\theta_1,\theta_2)+\operatorname{ctg}\theta_1 D^{(1,0)}_{z+{}^1/_2}(\theta_1,\theta_2)]+ \\ &\quad+16\,(1-\nu^2)\,z^2\operatorname{ctg}\theta_1\operatorname{ctg}\theta_2\,D^{(1,1)}_{z-{}^3/_2}D^{(1,1)}_{z+{}^1/_2}(\theta_1,\theta_2)- \\ &\quad-(z^2-{}^1/_4)^2\,\varphi_1(z)\,\varphi_1(-z)\,[D^{(0,1)}_{z-{}^3/_2}(\theta_1,\theta_2)\,D^{(1,0)}_{z+{}^1/_2}(\theta_1,\theta_2)+ \\ &\quad+D^{(1,0)}_{z-{}^3/_2}(\theta_1,\theta_2)\,D^{(0,1)}_{z+{}^1/_2}(\theta_1,\theta_2)]-2\,(z^2-{}^1/_4)\,\varphi_1(z)\,\varphi_1(-z)\csc\theta_1\csc\theta_2 \end{aligned} \tag{1.10}$$

Содержащиеся в формулах (1.2), (1.3) слагаемые u_r°, u_θ°, $\overset{\circ}{\tau}_{r\theta}$ соответствуют действительным нулям $z_{01}=-0.5$, $z_{02}=0.5$ функции $\Delta(z)$.

§ 2. Обратимся теперь к исследованию картины напряженного состояния, описываемого однородными решениями (1.2) — (1.8).

Рассмотрим вначале связь однородных решений с главным вектором напряжений P, действующих в сечении $r = \text{const}$. Имеем

$$P = 2\pi r^2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} (\sigma_r \cos\theta - \tau_{r\theta} \sin\theta) \sin\theta \, d\theta \tag{2.1}$$

Подставляя теперь в выражение (2.1) формулы (1.3), получаем

$$P = C_0\gamma_0 + r^{1/2} \sum_{k=1}^{\infty} C_k r^{z_k} \gamma_k \tag{2.2}$$

$$\gamma_0 = -4\pi G (\cos\theta_2 - \cos\theta_1) \quad (\cos^2\theta_1 + 2\nu\cos\theta_1\cos\theta_2 + \cos^2\theta_2)$$

$$\gamma_k = 4\pi G \int_{\theta_1}^{\theta_2} (Q_{rk} \cos\theta - T_k \sin\theta) \sin\theta \, d\theta \tag{2.3}$$

Докажем, что все γ_k ($k = 1, 2, 3, \ldots$) равны нулю. Для этого рассмотрим следующую краевую задачу:

$$\begin{aligned} &\sigma_r = r_1^{z_k - 3/2} Q_{rs}, \quad \tau_{r\theta} = r_1^{z_k - 3/2} T_s \qquad (r = r_1) \\ &\sigma_r = r_2^{z_k - 3/2} Q_{rs}, \quad \tau_{r\theta} = r_2^{z_k - 3/2} T_s \qquad (r = r_2) \end{aligned} \tag{2.4}$$

В силу единственности решения задачи (2.4) получаем, положив в (1.2), (1.3) $C_k = 0$, для всех $k \neq s$ и $C_s = 1$. Главный вектор, соответствующий напряженному состоянию задачи (2.4), имеет вид

$$P_s = 4\pi G r^{z_s + 1/2} \gamma_s \tag{2.5}$$

Вектор P_s в силу условия разрешимости задачи теории упругости не должен зависеть от r, поэтому, следовательно, $P_s = 0$ и $\gamma_s = 0$. Таким образом, комплексным нулям z_k соответствует напряженное состояние, самоуравновешенное в каждом сечении $r = \text{const}$. Для главного вектора окончательно получаем

$$P = \gamma_0 C_0 \tag{2.6}$$

Дальнейшее исследование будем проводить, предполагая, что разность $2\varepsilon = \theta_2 - \theta_1$ мала. Положим $\theta_1 = \theta_0 - \varepsilon$, $\theta_2 = \theta_0 + \varepsilon$ и будем считать, что параметр ε мал, а $0 < \xi_1 < \theta_0 < \xi_2 < 1/2\pi$ (ξ_1, ξ_2 — некоторые постоянные).

Заметим, что $\theta_0 = 1/2\pi$ соответствует плите переменной толщины и в данной работе рассматриваться не будет.

Как было показано в работе [2], корни характеристического уравнения (1.10) по характеру их асимптотики при $\varepsilon \to 0$ можно разбить на три группы

1. $z_{01} = -0.5, \quad z_{02} = 0.5$ (2.7)

2. $z_k = \varepsilon^{-1/2}(a_{-1k} + \varepsilon a_{1k} + \ldots) \qquad (k = 1, 2, 3, 4)$

$$a_{-1k}^4 + 3(1 - \nu^2)\operatorname{ctg}^2\theta_0 = 0$$

$$a_{1k} = (40\, a_{-1k})^{-1} [24(1 - \nu^2)\operatorname{ctg}^2\theta_0 + 5(9 - 8\nu)] \tag{2.8}$$

3. $z_k = \varepsilon^{-1}[b_{-1k} + o(\varepsilon^2)] \qquad (k = 5, 6, \ldots)$ (2.9)

$$\sin^2 2b_{-1k} - 4b_{-1k}^2 = 0$$

Для удобства положим $a_{-1k} = \alpha_k$, $a_{1k} = \beta_k$, $b_{-1k} = \delta_l$ $(l = k - 4)$. Корням первой группы соответствует решение (1.4), (1.5). Как было показано, с помощью этого решения можно снять с торцевых поверхностей главный вектор напряжений. Заметим, что корню $z_{02} = 0.5$ соответствует перемещение конуса как твердого тела.

Нулям второй и третьей группы, как будет показано ниже, соответствуют решения краевого эффекта с различными показателями изменяемости напряженно-деформированного состояния.

Преобразуем решение (1.2), (1.3) с учетом малости ε и формул (2.7) — (2.9). Полагая $\theta = \theta_0 + \varepsilon\eta$, $r = r_1\rho$, $-1 \leqslant \eta \leqslant 1$ и раскладывая все выражения (1.4) — (1.7) по ε в соответствии с приведенными выше группами нулей, получим

$$\begin{gathered} u_r = u_r^{(0)} + u_r^{(1)} + u_r^{(2)}, \qquad u_\theta = u_\theta^{(0)} + u_\theta^{(1)} + u_\theta^{(2)} \\ \sigma_r = \sigma_r^{(0)} + \sigma_r^{(1)} + \sigma_r^{(2)}, \qquad \sigma_\theta = \sigma_\theta^{(0)} + \sigma_\theta^{(1)} + \sigma_\theta^{(2)} \\ \sigma_\varphi = \sigma_\varphi^{(0)} + \sigma_\varphi^{(1)} + \sigma_\varphi^{(2)}, \qquad \tau_{r\theta} = \tau_{r\theta}^{(0)} + \tau_{r\theta}^{(1)} + \tau_{r\theta}^{(2)} \end{gathered} \tag{2.10}$$

Здесь

$$\begin{gathered} u_r^{(0)} = r_1 C_0 \rho^{-1} [-2\cos\theta_0 + 4(1-\nu)\eta\varepsilon\sin\theta_0 + o(\varepsilon^2)] - A[\cos\theta_0 - \varepsilon\eta\sin\theta_0 + o(\varepsilon^2)] \\ u_\theta^{(0)} = r_1 C_0 \rho^{-1} [-2(1-\nu)\sin\theta_0 - 2(2-\nu)\varepsilon\eta\cos\theta_0 + o(\varepsilon^2)] + A[\sin\theta_0 + \varepsilon\eta\cos\theta_0 + o(\varepsilon^2)] \\ \sigma_r^{(0)} = C_0 G\rho^{-2} [4(1+\nu)\cos\theta_0 - 4(2-\nu)\varepsilon\eta\sin\theta_0 + o(\varepsilon^2)] \\ \sigma_\theta^{(0)} = C_0 G\rho^{-2}\varepsilon^2 [2(1-2\nu)(\eta^2-1)\cos\theta_0 + o(\varepsilon^2)] \\ \sigma_\varphi^{(0)} = -C_0 G\rho^{-2} [8(1-2\nu)\cos\theta_0\sin^{-2}\theta_0 - 4(1-2\nu)\varepsilon\eta(1+\cos^2\theta_0)^2\sin^{-3}\theta_0 + o(\varepsilon^2)] \\ \tau_{r\theta}^{(0)} = C_0 G\rho^{-2}\varepsilon^2 [2(1-2\nu)(\eta^2-1)\sin\theta_0 + o(\varepsilon)] \end{gathered} \tag{2.11}$$

$$\begin{gathered} u_r^{(1)} = r_1 (\varepsilon/\rho)^{1/2} \sum_{k=1}^{4} A_k U_{rk}^{(1)}, \qquad u_\theta^{(1)} = r_1 \varepsilon \rho^{-1/2} \sum_{k=1}^{4} A_k U_{\theta k}^{(1)} \\ \sigma_r^{(1)} = G\rho^{-3/2} \sum_{k=1}^{4} A_k \sigma_{rk}^{(1)}, \qquad \sigma_\theta^{(1)} = G\varepsilon\rho^{-3/2} \sum_{k=1}^{4} A_k \sigma_{\theta k}^{(1)} \\ \sigma_\varphi^{(1)} = G\rho^{-3/2} \sum_{k=1}^{4} A_k \sigma_{\varphi k}^{(1)}, \qquad \tau_{r\theta}^{(1)} = G\rho^{-1} (\varepsilon/\rho)^{1/2} \sum_{k=1}^{4} A_k \tau_{r\theta k}^{(1)} \end{gathered} \tag{2.12}$$

$$\begin{gathered} U_{rk}^{(1)} = \langle -12(1-\nu^2)(\eta\alpha_k + \nu\alpha_k^{-1}\operatorname{ctg}\theta_0)\operatorname{ctg}\theta_0 + \varepsilon^{1/2}[2(\nu-2)\alpha_k^2\beta_k - \\ - 3(1-\nu^2)\eta(2\alpha_k\beta_k - 3)\operatorname{ctg}\theta_0 - 6\nu(1-\nu^2)\alpha_k^{-1}\beta_k\operatorname{ctg}^2\theta_0] + \\ + \varepsilon\{2(7\nu-2)\alpha_k^2\beta_k - 42\eta(1-\nu^2)\beta_k\operatorname{ctg}\theta_0 - 3(1-\nu^2)\alpha_k^{-1}[(4\nu-5)\eta - \\ - 6\nu\operatorname{ctg}\theta_0]\operatorname{ctg}\theta_0 - 6(1-\nu^2)\alpha_k\operatorname{ctg}\theta_0[1 - 4/3(\nu+2)\operatorname{ctg}\theta_0 - \\ - (\eta-1)(\nu\eta-\nu+2)\operatorname{ctg}\theta_0]\} + \ldots\rangle \exp(\varepsilon^{-1/2}\alpha_k\ln\rho) \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} U_{\theta k}^{(1)} = \langle 12(1-\nu^2)\operatorname{ctg}\theta_0 + \varepsilon\{48(1-\nu^2)\alpha_k^{-1}\beta_k\operatorname{ctg}\theta_0 - [16(1-\nu^2)\operatorname{ctg}\theta_0 - \\ - 6(1+\nu)\ \nu(\eta^2-1)\operatorname{ctg}\theta_0 + (4\nu-5)\operatorname{tg}\theta_0]\alpha_k^2 + 12(1-\nu^2)\beta_k\operatorname{ctg}\theta_0 - \\ - 6(1-\nu^2)(2\nu\eta+1-\nu)\operatorname{ctg}^2\theta_0\} + \varepsilon^{3/2}\{6(1-\nu^2)\beta_k[1-(2\nu\eta+1-\nu)\operatorname{ctg}\theta_0]\operatorname{ctg}\theta_0 + \\ + 48(1-\nu^2)\alpha_k^{-1}\beta^2\operatorname{ctg}\theta_0 - [16(1-\nu^2)\operatorname{ctg}\theta_0 - 6\nu(1+\nu)(\eta^2-1)\operatorname{ctg}\theta_0 + \\ + (4\nu-5)\operatorname{tg}\theta_0]\alpha_k^2\beta_k + 2(1+\nu)(1-2\nu)(\eta^2-1)\alpha_k\operatorname{ctg}\theta_0\} + \ldots\rangle \exp(\varepsilon^{-1/2}\alpha_k\ln\rho) \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} \sigma_{rk}^{(1)} = 4(1+\nu)G\operatorname{ctg}\theta_0 \langle -6\eta\alpha^2 + 6\varepsilon^{1/2}[\eta(2-\nu-\alpha_k\beta_k)\alpha_k + \\ + (1-\nu^2)\alpha^{-1}\operatorname{ctg}\theta_0] + \varepsilon\{6(2\eta-\nu\eta-6)\alpha_k\beta_k - 3(1-2\nu)\eta - \\ - 3\eta\alpha_k^2\beta_k + [\operatorname{tg}\theta_0 + (3\nu\eta^2 - 6\eta\nu + 2 - 6\eta - \nu)\operatorname{ctg}\theta_0]\alpha_k^2\} + \ldots\rangle \exp(\varepsilon^{-1/2}\alpha_k\ln\rho) \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} \sigma_{\theta k}^{(1)} = 3(1+\nu)(\eta-1)G\operatorname{ctg}\theta_0 \langle 4(\eta+1)\operatorname{ctg}\theta_0[3(1-\nu^2)\operatorname{ctg}\theta_0 - 1/3(2\nu-1) + \\ + 1/3\,\nu\alpha_k^2]\alpha_k + \varepsilon^{1/2}\{4(\eta+1)\operatorname{ctg}\theta_0[3(1-\nu^2)\beta_k\operatorname{ctg}\theta_0 + 1/3\,\nu\alpha_k^2\beta_k - 1/3(2\nu-1)\beta_k]\} + \end{gathered}$$

$$+\varepsilon\{32(1-\nu^2)(3\eta+2)\alpha_k^{-1}\beta_k \operatorname{ctg}^2\theta_0 - {}^1/_2[8(1-\nu)(19\nu-7)\operatorname{ctg}^2\theta_0+(88-63\nu-$$
$$-20\nu^2](\eta+1)\operatorname{ctg}\theta_0+{}^2/_3\nu(\eta+1)\alpha_k^2\beta_k\operatorname{ctg}\theta_0+ \tag{2.13}$$
$$+\langle 4\nu(\eta+1)(\eta-6)-(3\eta+1)(16\nu-19)+\operatorname{ctg}^2\theta_0[2(9\nu^2+4\nu+$$
$$+15)+4\nu(2\eta^2-\eta+1)-4\nu(1-\nu)(\eta-1)^2-6(1-2\nu)(\eta+1)]\rangle\alpha_k^2\}+\ldots\rangle\exp(\varepsilon^{-1/2}\alpha_k\ln\rho)$$

$$\sigma_{\varphi k}^{(1)}=2G\langle 12(1+\nu)[(1-\nu^2)\operatorname{ctg}\theta_0-\nu\eta\alpha_k^2]\operatorname{ctg}\theta_0+\varepsilon^{1/2}\{12(1+\nu)\times$$
$$\times\alpha_k[(1-\nu^2)\operatorname{ctg}\theta_0-\nu\eta\alpha_k^2]\operatorname{ctg}\theta_0-12(1+\nu)(1-2\nu)\eta\alpha_k\operatorname{ctg}\theta_0\}+$$
$$+\varepsilon\{48(1+\nu)(1-\nu^2)\alpha_k^{-1}\beta_k\operatorname{ctg}^2\theta_0+(1+\nu)[1-8(1-2\nu)\operatorname{ctg}^2\theta_0+$$
$$+6\nu(1+\nu)(\eta^2-1)\operatorname{ctg}^3\theta_0]\alpha_k^2+12(1+\nu)\alpha_k\beta_k(2\eta-\nu\eta+2\nu)\times$$
$$\times\operatorname{ctg}\theta_0+6(1-\nu^2)(1+\nu)\alpha_k\operatorname{ctg}^2\theta_0-6\nu(1+\nu)\eta\alpha_k^2\beta_k\operatorname{ctg}\theta_0-$$
$$-3(1+\nu)[4(1-\nu^2)(\eta+1)\operatorname{ctg}^2\theta_0+(1-\nu)(2\nu-7)]\operatorname{ctg}\theta_0\}+\ldots\rangle\exp(\varepsilon^{-1/2}\alpha_k\ln\rho)$$

$$\tau_{r\theta k}^{(1)}=6G(1+\nu)\alpha_k(\eta^2-1)\operatorname{ctg}\theta_0\langle 2\alpha_k^2+\varepsilon^{1/2}(2\alpha_k\beta_k-3)\alpha_k+$$
$$+\varepsilon]11\alpha_k\beta_k+(\alpha_k-{}^4/_3\eta\operatorname{ctg}\theta_0)\alpha_k^2+6\nu-5]+\ldots\rangle\exp(\varepsilon^{-1/2}\alpha_k\ln\rho)$$

$$u_r^{(2)}=r_1\varepsilon\rho^{-1/2}\sum_{l=0}^{\infty}B_l[(1-k)\delta_lF_l(\eta)+(1+k)\delta_l^{-1}F_l''(\eta)]\exp(\varepsilon^{-1}\delta_l\ln\rho)$$

$$u_\theta^{(2)}=-r_1\varepsilon\rho^{-1/2}\sum_{l=1}^{\infty}B_l[(1+3k)F_l'(\eta)+(1+k)\delta_l^{-2}F''(\eta)]\exp(\varepsilon^{-1}\delta_l\ln\rho)$$

$$\sigma_r^{(2)}=2G\rho^{-3/2}\sum_{l=1}^{\infty}B_lF_l''(\eta)\exp(\varepsilon^{-1}\delta_l\ln\rho)$$

$$\sigma_\theta^{(2)}=2G\rho^{-3/2}\sum_{l=1}^{\infty}B_l\delta_l^2F_l(\eta)\exp(\varepsilon^{-1}\delta_l\ln\rho) \tag{2.14}$$

$$\sigma_\varphi^{(2)}=2G\rho^{-3/2}\sum_{l=1}^{\infty}B_l[F_l''(\eta)+\delta_l^2F_l(\eta)]\exp(\varepsilon^{-1}\delta_l\ln\rho)$$

$$\tau_{r\theta}^{(2)}=-2G\rho^{-3/2}\sum_{l=1}^{\infty}B_lF_l'(\eta)\exp(\varepsilon^{-1}\delta_l\ln\rho)$$

Здесь A_k, B_l — новые неизвестные постоянные $k=(1-2\nu)^{-1}$; в формулах (2.14) $F_l(\eta)$ — функции Папковича

$$F_l(\eta)=(\delta_l^{-1}\sin\delta_l+\cos\delta_l)\cos\delta_l\eta+\eta\sin\delta_l\sin\delta_l\eta\qquad(l=1,3,\ldots) \tag{2.15}$$

$$F_l(\eta)=(\sin\delta_l-\delta_l^{-1}\cos\delta_l)\sin\delta_l\eta+\eta\cos\delta_l\cos\delta_l\eta\qquad(l=2,4,\ldots) \tag{2.16}$$

§ 3. Рассмотрим вопрос о снятии напряжений с торцевых поверхностей оболочки. Пусть при $r=r_s$ ($s=1,2$) заданы напряжения

$$\sigma_r=f_{1s}(\theta),\qquad \tau_{r\theta}=f_{2s}(\theta) \tag{3.1}$$

Функции $f_{js}(\theta)$ удовлетворяют условиям равновесия

$$2\pi r_1^2\int_{\theta_1}^{\theta_2}(f_{11}\cos\theta-f_{21}\sin\theta)\sin\theta d\theta=2\pi r_2^2\int_{\theta_1}^{\theta_2}(f_{12}\cos\theta-f_{22}\sin\theta)\sin\theta d\theta=P \tag{3.2}$$

Здесь P — главный вектор усилий, действующих в произвольном сечении $r=\mathrm{const}$.

Как было показано выше, несамоуравновешенную часть напряжений (3.1) можно снять при помощи проникающего решения (1.4), (1.5), причем, связь постоянной C_0 с главным вектором P дается равенством (2.6). Ниже будем предполагать, что $P = 0$.

Будем отыскивать решение в виде (1.2), (1.3); в силу принятого предположения $C_0 = 0$. Для определения производных констант C_k, вариации которых будем считать независимыми, как и в работах [3,4], используем вариационный принцип Лагранжа.

Поскольку однородные решения удовлетворяют уравнениям равновесия и граничным условиям на конической поверхности, вариационный принцип принимает следующую форму:

$$r_1 \sum_{s=1}^{2} \rho_s^2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} [(\sigma_r - f_{1s})\, \delta u_r + (\tau_{r\theta} - f_{2s})\, \delta u_\theta]_{\rho=\rho_s} \sin\theta\, d\theta = 0 \tag{3.3}$$

Приравнивая нулю коэффициенты при независимых вариациях δC_k, получаем следующую бесконечную систему:

$$\sum_{k=1}^{\infty} m_{jk} C_k = a_j \qquad (j = 1, 2, 3, \ldots) \tag{3.4}$$

Здесь

$$m_{jk} = (\rho_1^{z_j + z_k} + \rho_2^{z_j + z_k}) \int_{\theta_1}^{\theta_2} (Q_{rk} U_{rj} + T_k U_{\theta j}) \sin\theta d\theta \tag{3.5}$$

$$a_j = \sum_{s=1}^{2} \rho_s^{z_j + 3/2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} (f_{1s} U_{rj} + f_{2s} U_{\theta j}) \sin\theta d\theta \tag{3.6}$$

Можно показать, что эта система будет положительно определенной в пространстве энергий $H_Э$ и поэтому всегда разрешима при физически осмысленных условиях, наложенных на правую часть.

Используя малость параметра тонкостенности оболочки $2\varepsilon = \theta_2 - \theta_1$, можно построить асимптотическое решение системы (3.4). Прежде всего уточним предположения относительно внешней нагрузки.

Допустим, что $f_{1s} \sim 1$, тогда, если учесть, что σ_r и $\tau_{r\theta}$, соответствующие корням второй группы, имеют разный порядок ($\sigma_r^{(1)} \sim 1$, $\tau_{r\theta}^{(1)} \sim \sqrt{\varepsilon}$), то при выборе порядка f_{2s} нужно руководствоваться следующими соображениями. Используя формулы (2.13), (2.14), а также тот факт, что $F_k(\pm 1) = 0$, получаем

$$\int_{-1}^{1} \tau_{r\theta} d\eta = -16\, G\, (1 + \nu)\, \rho^{-3/2} \operatorname{ctg} \theta_0 \varepsilon^{1/2} \sum_{k=1}^{4} A_k \alpha_k^3 \exp(\varepsilon^{-1/2} \alpha_k \ln \rho) \tag{3.7}$$

Если теперь заданные на границе касательные напряжения представить в виде

$$f_{2s} = f_{2s}^{(1)} + f_{2s}^{(2)}, \qquad f_{2s}^{(1)} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} f_{2s} d\eta, \qquad f_{2s}^{(2)} = f_{2s} - f_{2s}^{(1)} \tag{3.8}$$

то на основании асимптотической формулы (3.7) необходимо предполагать, что $f_{2s}^{(1)}$ имеют порядок $\varepsilon^{1/2}$, $f_{2s}^{(2)}$ могут иметь тот же порядок, что и f_{1s}, т. е. $f_{2s}^{(2)} \sim 1$.

Далее, используя формулы (2.13), (2.14), неизвестные постоянные A_k, B_l будем отыскивать в виде

$$A_k = A_{k0} + \sqrt{\varepsilon}\, A_{k1} + \ldots, \qquad B_l = B_{l0} + \sqrt{\varepsilon}\, B_{l1} \tag{3.9}$$

Учитывая принятый порядок относительно заданных на границе напряжений, на основе вариационного принципа получим следующую систему уравнений относительно A_{k0}, B_{l0}:

$$\sum_{k=1}^{4} n_{jk} A_{k0} = a_j \qquad (j = 1, 2, 3, 4 \ldots) \tag{3.10}$$

$$\sum_{l=1,3}^{\infty} g_{tl} B_{l0} = b_t \quad (t = 1, 3, \ldots), \qquad \sum_{l=2,4}^{\infty} g_{tl} B_{l0} = b_t \quad (t = 2, 4, \ldots) \tag{3.11}$$

Здесь

$$n_{jk} = 16\, G\, (1 - \nu^2)\, \alpha_k^2 (\alpha_j - d_k) \operatorname{ctg}^2 \theta_0 \tag{3.12}$$

$$a_j = \sum_{s=1}^{2} \rho_s^{1/2} \exp(\varepsilon^{-1/2} \alpha_j \ln \rho_s) \int_{-1}^{1} [f_{2s} - f_{1s} \varepsilon^{-1/2} (\eta \alpha_j + \nu \operatorname{ctg} \theta_0\, \alpha_j^{-1})]\, d\eta$$

$$g_{tl} = 4G \frac{\delta_t^2 \delta_l^2 (\sin^2 \delta_t - \sin^2 \delta_l)}{(\delta_t^2 - \delta_l^2)(\delta_t - \delta_l)} [(k-1)(\delta_t^2 + \delta_l^2) +$$

$$+ 2(k+1)\delta_t \delta_l] \sum_{s=1}^{2} \rho_s^2 \exp\left(\frac{\delta_t + \delta_l}{\varepsilon} \ln \rho_s\right)$$

$$g_{tt} = 4G \delta_t^2 (1 - {}^2/_3 \sin^2 \delta_t) \sum_{s=1}^{2} \rho_s^2 \exp(2\delta_t / \varepsilon \ln \rho_s)$$

$$b_t = \sum_{s=1}^{2} \rho_s^{3/2} \exp\left(\frac{\delta_t}{\varepsilon} \ln \rho_s\right) \int_{-1}^{1} \left\{ f_{1s} \left[(1-k)\, \delta_t F_t(\eta) + (1+k) \frac{F_t''}{\delta_t^2} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - f_{2s} \left[(1+3k) F_t' + (1+k) \frac{F_t''}{\delta_t^2} \right] \right\} d\eta \qquad (t, l = 1, 3, \ldots)$$

Для $t, l = 2, 4, \ldots$ соответствующие выражения g_{tl} получаются заменой в приведенных выше формулах $\cos \delta_l$ на $\sin \delta_l$ и $\sin \delta_l$ на $- \cos \delta_l$ соответственно.

Из структуры полученной системы можно заключить, что неизвестные A_{k0}, соответствующие второй группе нулей, и неизвестные B_{k0}, соответствующие третьей группе нулей, находятся независимо.

Определение A_{ki}, B_{ki} $(i = 1, 2, \ldots)$ неизменно сводится к обращению одних и тех же матриц, которые совпадают с матрицами систем (3.10), (3.11).

Уместно отметить, что системы (3.11) уже встречались в теории толстых плит [5,6], на основе ее уже неоднократно проводился численный анализ различных задач.

Система уравнений (3.10), (3.11) значительно упрощается, если исследовать напряженное состояние полубесконечного конуса ($\rho_1 = 1$, $\rho_2 \to \infty$) либо конуса с вершиной ($\rho_2 = 1$, $\rho_1 = 0$).

В первом случае все неизвестные, соответствующие нулям, у которых $\operatorname{Re} \alpha_k > 0$, $\operatorname{Re} \delta_l > 0$, следует положить равными нулю, во втором случае в силу ограниченности решения в вершине следует положить нулю те неизвестные, для которых $\operatorname{Re} \alpha_k < 0$, $\operatorname{Re} \delta_l < 0$.

В обоих случаях получаем одинаковую по виду систему

$$\sum_{k=1}^{2} n_{jk}^{(0)} A_{k0} = a_j^{(0)} \quad (j = 1, 2) \tag{3.13}$$

$$\sum_{l=1}^{\infty} g_{tl}^{(0)} B_{l0} = b_t^{(0)} \quad (t = 1, 2, \ldots)$$

Коэффициенты и правые части системы уравнений (3.13) легко получить из соответствующих коэффициентов и правых частей (3.10), (3.11), если в них положить $\rho_1 = 1$, $\rho_2 \to \infty$ в первом случае и $\rho_1 = 0$, $\rho_2 = 1$ во втором случае.

Разъясним теперь картину напряженного состояния, соответствующую нулям второй и третьей групп. Для простоты положим $\rho_1 = 0$, $\rho_2 = 1$ ($r = \rho r_2$) и подсчитаем изгибающий момент и перерезывающую силу для каждой группы решений. Имеем

$$M = r_2^2 \int\limits_{\theta_1}^{\theta_2} \{\sigma_r \sin(\theta - \theta_0) - \tau_{r\theta}[1 - \cos(\theta - \theta_0)]\} \sin\theta d\theta \approx$$

$$\approx \varepsilon^2 r_2^2 \sin\theta_0 \int\limits_{-1}^{1} \sigma_r dr + o(\varepsilon^3) \tag{3.14}$$

$$Q = r_2^2 \int\limits_{\theta_1}^{\theta_2} [\sigma_r \sin(\theta - \theta_0) + \tau_{r\theta} \cos(\theta - \theta_0)] \sin\theta d\theta = \varepsilon r_2 \sin\theta_0 \int\limits_{-1}^{1} \tau_{r\theta} d\eta + o(\varepsilon^2)$$

Подставляя выражения для напряжений, получаем

$$\begin{gathered} M_1 = -32G(1+\nu)\varepsilon^2\rho^{-3/2} r_2^2 \cos\theta_0 \sum_{k=1}^{4} A_{k0}\alpha_k^2 \exp(\varepsilon^{-1/2}\alpha_k \ln\rho) + o(\varepsilon^{5/2}) \\ Q_1 = -8G(1+\nu) r_2 \cos\theta_0 \left(\frac{\varepsilon}{\rho}\right)^{3/2} \sum_{k=1}^{4} A_k\alpha_k^3 \exp(\varepsilon^{-1/2}\alpha_k \ln\rho) + o(\varepsilon^2) \end{gathered} \tag{3.15}$$

$$M_2 = o(\varepsilon^3), \qquad Q_2 = o(\varepsilon^2) \tag{3.16}$$

Таким образом, главные части изгибающего момента и перерезывающей силы определяет решение второй группы.

В заключение заметим, что в данной работе разработан асимптотический метод для снятия напряжений с торцевой части границы полого конуса. Снятие напряжений с конической части границы можно проводить путем построения прикладных теорий, методами и приемами, разработанными в работах [3,4], что само по себе является предметом специального исследования; снятие можно проводить решением задачи теории упругости для неограниченного полого конуса при помощи преобразования Меллина.

Поступила 30 X 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Нуллер Б. М. К решению задачи теории упругости об усеченном полом конусе. Инж. ж., МТТ, 1967, вып. 5.
2. Мехтиев М. Ф., Устинов Ю. А. Асимптотическое поведение решения осесимметричной задачи теории упругости для полого конуса. Тр. 7-й Всесоюзн. конференции по теории оболочек и пластинок. Днепропетровск, 1969. М., «Наука», 1969.
3. Виленская Т. В., Ворович И. И. Асимптотическое поведение решения задачи теории упругости для сферической оболочки малой толщины. ПММ, 1966, т. 30, вып. 2.
4. Базаренко Н. А., Ворович И. И. Асимптотическое поведение решения задачи теории упругости для полого цилиндра конечной длины при малой толщине. ПММ, 1965, т. 29, вып. 6.
5. Аксентян О. К., Ворович И. И. Напряженное состояние плиты малой толщины. ПММ, 1963, т. 27, вып. 6.
6. Ворович И. И., Малкина О. С. Напряженное состояние толстой плиты. ПММ, 1967, т. 31, вып. 2.