

Заметим, что переходной процесс происходит на интервале времени, длина которого имеет порядок $O(1/\mu)$, что соответствует алгоритму асимптотического интегрирования в методе усреднения [9]. В силу малости φ_0 имеем $a_0 \approx \zeta(0)$ и формула (17) для малых a_0 примет вид

$$\theta = \frac{2}{\beta\mu} \ln \frac{2\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{\zeta(0)} \quad (18)$$

Выразим $\zeta(0)$ через начальные значения исходных переменных

$$\zeta = \frac{\eta}{\rho}, \quad \rho = \sqrt{\xi^2 + \xi'^2}, \quad \zeta(0) = \eta(0) \left[\xi(0)^2 + {}^{5/4}\omega^{-2} \left(\frac{d\xi}{dt} \right)_0^2 \right]^{-1/2}$$

Аналогично (12) определим исходное время переходного процесса от чисто радиальных колебаний (3) к вертикально-радиальным (13) при $n = 1/5$

$$\Gamma = \frac{\sqrt{5}}{2\omega} \left[\left(1 \mp {}^{5/12} \sqrt{3} \frac{k}{\omega^2} \mu \right) \theta + O(\mu) \right]$$

где выбор знака определяется выбором в скобке (13), а величина μ определяется по начальному значению приведенной энергии (2) колебаний.

Поступила 29 XII 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Л я п у н о в А. М. Общая задача об устойчивости движения. Харьков, 1892.
2. М а л к и н И. Г. Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний. М.—Л., Гостехиздат, 1949.
3. С т а р ж и н с к и й В. М. Vereinigungen der Methoden von Ljapunow und Poincaré in der Theorie nichtlinearen Schwingungen. Berlin, Kl. Math. Phys. und Techn., 1965, No. 1.
4. С т а р ж и н с к и й В. М. Об одном варианте метода определения периодических решений. Инж. ж. МТТ, 1968, № 6.
5. В а н - д е р - П о л ь Б. Нелинейная теория электрических колебаний. М., Связьиздат, 1935.
6. Р о и н с а г е Н. Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, Paris, 1892.—1899, t. 1—3.
7. М и т р о п о л ь с к и й Ю. А. Лекции по методу усреднения в нелинейной механике. Киев, «Наукова думка», 1966.
8. К о у э н Б. Циклотрон и фазотрон. В сб.: Ускорители. Госатомиздат, 1962.
9. М о и с е е в Н. Н. Асимптотические методы нелинейной механики. М., «Наука», 1969.

О ДВИЖЕНИИ ГАЗА ЗА ПЛОСКОЙ ДЕТОНАЦИОННОЙ ВОЛНОЙ, ОРТОГОНАЛЬНОЙ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

В. А. Сучков

(Челябинск)

Рассматривается задача о детонации четверти пространства, заполненного взрывчатым веществом, инициированного по одной из граней. Нахождение решения в возмущенной области приводится к решению задачи Гурса для квазилинейного дифференциального уравнения второго порядка от двух независимых переменных, которая решается численным методом характеристик. Приведено исследование особых точек, получено решение в возмущенной области и форма свободной поверхности.

Задача о движении газа за расходящейся детонационной волной в пространстве с вырезанным конусом рассматривалась в работах [1,2].

1. Рассмотрим бесконечную область

$$x_1 > 0, \quad x_2 < 0 \quad \text{при } t < 0 \quad (1.1)$$

заполненную неподвижным взрывчатым веществом с постоянной плотностью ρ_0 . Давление p во всем пространстве равно нулю.

Будем считать, что продукты взрыва описываются уравнением состояния

$$p = \gamma p^\gamma, \quad \gamma > 1 \quad (\rho_0 = \gamma/(\gamma + 1)) \quad (1.2)$$

В момент времени $t = 0$ взрывчатое вещество инициируют по поверхности $x_1 = 0$. От плоскости инициирования $x_1 = 0$ будет распространяться с постоянной скоростью $D = \gamma + 1$, плоская нормальная детонационная волна, ортогональная свободной поверхности $x_2 = 0$.

2. Движение при $t > 0$ будет автомодельным с независимыми переменными

$$\xi_1 = x_1/t, \quad \xi_2 = x_2/t \quad (2.1)$$

Фронту детонационной волны соответствует прямая $\xi_1 = D$. За фронтом волны газодинамические параметры принимают значения

$$u_1 = 1, \quad u_2 = 0, \quad \rho = 1, \quad c = \gamma \quad (2.2)$$

где u_1, u_2 — компоненты вектора скорости, c — скорость звука. Вдали от прямой $\xi_2 = 0$ в области

$$-D/(\gamma - 1) < \xi_1 < D$$

движение будет одномерным.

$$u_1 = \frac{2}{\gamma + 1} \left(\xi_1 - \frac{D}{2} \right), \quad u_2 = 0, \quad c = \frac{\gamma - 1}{2} u_1 + \frac{D}{2} \quad (2.3)$$

Прямая $\xi_1 = -D/(\gamma - 1)$ соответствует плоскому фронту истечения в вакуум.

В окрестности линии $\xi_2 = 0$ одномерное движение (2.3) возмущается центрированной волной разрежения (волной Прандтля — Майера), исходящей из точки A ($\xi_1 = D, \xi_2 = 0$). Область возмущенного течения (1) отделена от области одномерного течения (0) слабым разрывом, проходящим через точки A и B ($\xi_1 = -D/(\gamma - 1), \xi_2 = 0$), который можно найти, решив дифференциальное уравнение для характеристик одномерного движения (2.3)

$$\frac{d\xi_2}{d\xi_1} = \frac{\xi_2^2 - c^2}{2\xi_2 c} \quad (2.4)$$

Функция $c(\xi_1)$ должна быть взята из (2.3)

$$c = \mu^2 \xi_1 + \frac{D}{\gamma + 1}, \quad \mu = \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right)^{1/2} \quad (2.5)$$

Интегрируя (2.4), найдем граничную характеристику для $\gamma \neq 3$

$$\xi_2 = -\frac{c}{\mu} \left\{ \frac{1}{\tau} \left[1 - \left(\frac{c}{\gamma} \right)^\tau \right] \right\}^{1/2}, \quad \tau = \frac{3 - \gamma}{\gamma - 1} \quad (2.6)$$

В формуле (2.6) взят знак «минус», так как должно быть $\xi_2 \leq 0$. Постоянная в (2.6) выбрана из условия $\xi_2 = 0$ при $\xi_1 = D$, а функция $c(\xi_1)$ определяется из (2.5). Из формулы (2.6) видно, что граничная характеристика проходит через точку B , где $c = 0$. Для $\gamma = 3$ вместо (2.6) получим

$$\xi_2 = -c \left(-2 \ln \frac{c}{3} \right)^{1/2} \quad (2.7)$$

Формулу (2.7) можно получить из (2.6) предельным переходом при $\gamma \rightarrow 3$, поэтому ниже не выделяется случай $\gamma = 3$ и предполагается, что возможен предельный переход.

В точке A граничная характеристика имеет бесконечный наклон, т. е. касается детонационной волны. В точке B наклон зависит от γ . Для $\gamma < 3$ в точке B

$$d\xi_2/d\xi_1 = -\mu/\sqrt{\tau} \quad (2.8)$$

Для $\gamma \geq 3$ граничная характеристика имеет бесконечный наклон, следовательно, касается границы с вакуумом $[\xi_1 = -D/(\gamma - 1)]$.

В точке M функция (2.6) имеет минимум, здесь

$$\xi_1 = -\frac{D}{\gamma - 1} + 2\gamma(2\mu^2)^{1/\tau-1}, \quad \xi_2 = -\gamma(2\mu^2)^{1/\tau} \quad (2.9)$$

В точке A область (1) граничит с волной разрежения Прандтля — Майера

$$\begin{aligned} u_1 &= D - \gamma a \cos \alpha + \gamma b \cos\left(\frac{a}{b}\alpha\right), & a &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu} + 1\right) \\ u_2 &= \gamma a \sin \alpha - \gamma b \sin\left(\frac{a}{b}\alpha\right), & b &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu} - 1\right) \\ c &= \gamma \cos\left(\frac{\alpha}{2b}\right) & (0 \leq \alpha \leq \pi b) \end{aligned} \quad (2.10)$$

Здесь α — параметр, при $\alpha = 0$ из формул (2.10) получим значения величин за фронтом детонационной волны (2.2), при $\alpha = \pi b$ скорость звука обращается в нуль.

Замыкается возмущенная область (1) криволинейным фронтом истечения в вакуум, проходящим через точки A и B .

3. Решение в возмущенной области получается в результате взаимодействия двух простых волн (2.3) и (2.10), поэтому представляет собой двойную волну [3]. Простые и двойные волны являются обобщением на многомерный случай волн Римана. Функция $c = c(u_1, u_2)$, связывающая скорость звука со скоростью вещества, удовлетворяет квазилинейному дифференциальному уравнению второго порядка

$$a_{22}(\Phi_{11} + 1) - 2a_{12}\Phi_{12} + a_{11}(\Phi_{22} + 1) = 0 \quad (3.1)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{c^2}{\gamma - 1}, & \Phi_i &= \frac{\partial \Phi}{\partial u_i}, & \Phi_{ij} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_i \partial u_j} \\ a_{ij} &= \Phi_i \Phi_j - c^2 \delta_{ij} & (i, j &= 1, 2) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Если функция $c(u_1, u_2)$ определена из уравнения (3.1), то решение в плоскости автомодельных переменных $\xi_1 \xi_2$ находится из соотношений

$$\xi_i = u_i + \Phi_i \quad (i = 1, 2) \quad (3.3)$$

В уравнении (3.1) сделаем замену переменных

$$x = \frac{k}{\gamma}(1 - u_1), \quad y = \frac{k}{\gamma}u_2, \quad z = \frac{c}{\gamma} \quad \left(k = \frac{\gamma - 1}{2}\right) \quad (3.4)$$

Вычислив производные функции $\Phi(u_1, u_2)$ из (3.4) и подставив их в (3.1), получим уравнение

$$(z_y^2 - 1)z_{xx} - 2z_x z_y z_{xy} + (z_x^2 - 1)z_{yy} = \frac{1}{z} [2 + \tau(2 - z_x^2 - z_y^2)] \quad (3.5)$$

Вместо соотношений (3.3) будем иметь

$$\xi_1 = 1 - \gamma\left(\frac{x}{k} + z z_x\right), \quad \xi_2 = \gamma\left(\frac{y}{k} + z z_y\right) \quad (3.6)$$

Условия примыкания двойной волны к одномерному течению в области (0) дают

$$y = 0, \quad z = 1 - x, \quad z_x = -1, \quad z_y = -\theta(x) \quad (3.7)$$

$$\theta(x) = \frac{1}{\mu} \left\{ \frac{1}{\tau} [1 - (1 - x)^\tau] \right\}^{1/2} \quad (3.8)$$

Из условия примыкания к централизованной простой волне (2.10) получим

$$\begin{aligned} x &= k \left[a \cos \alpha - b \cos \left(\frac{a}{b} \alpha \right) - 1 \right] \\ y &= k \left[a \sin \alpha - b \sin \left(\frac{a}{b} \alpha \right) \right] \quad (0 \leq x \leq \pi b) \\ z &= \cos \left(\frac{\alpha}{2b} \right), \quad z_x = -\frac{1}{z} \left(1 + \frac{x}{k} \right), \quad z_y = -\frac{y}{kz} \end{aligned} \quad (3.9)$$

Производные z_x и z_y в (3.9) определяются из равенств (3.6) после подстановки значений $\xi_1 = \gamma + 1$, $\xi_2 = 0$. Задача нахождения решения в возмущенной области сведена к решению уравнения (3.5) с условиями на характеристиках (3.7), (3.9). Дискриминант уравнения (3.5)

$$\delta = z_x^2 + z_y^2 - 1 \quad (3.10)$$

всюду на характеристиках (3.7), (3.9) больше нуля, за исключением точки $x = y = 0$, где $z_x = -1$, $z_y = 0$, т. е. $\delta = 0$. В этой точке характеристики, несущие начальные данные, касаются одна другой.

4. Для определения функции $z(x, y)$ получена задача Гурса. Область интегрирования в плоскости xy представляет собой криволинейный треугольник $A^\circ, B^\circ, C^\circ$, вершины которого имеют координаты

$$x = 0, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad y = 0, \quad x = x_0, \quad y = y_0$$

Значения x_0, y_0 , соответствующие точке C° , вычисляются из формул (3.9) при $\alpha = \pi b$

$$x_0 = \frac{km}{\mu} - k, \quad y_0 = -\frac{kn}{\mu} \quad \left(m = \sin \frac{\pi}{2\mu}, \quad n = \cos \frac{\pi}{2\mu} \right) \quad (4.1)$$

В дальнейшем будем считать, что $\gamma > 1.25$, тогда $n < 0$.

В окрестности точки A° на характеристиках (3.8) и (3.9) имеют место разложения

$$y = 0, \quad z = 1 - x, \quad z_x = -1, \quad z_y = -\frac{1}{\mu} x^{1/2} \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} y &= \lambda_1 x^{3/2}, \quad z = 1 - x - \frac{x^2}{2\mu^2}, \quad z_x = -1 - \frac{x}{\mu^2} \\ z_y &= -\frac{\lambda_1}{k} x^{3/2}, \quad \lambda_1 = \frac{a_1}{2\mu}, \quad a_1 = \frac{4\sqrt{2}}{3} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Рассмотрим поведение решения задачи Гурса в окрестности точки A° . Положим

$$\lambda = \lambda_1^{-1} y x^{-3/2} \quad (4.4)$$

и будем искать решение в виде

$$z = 1 - x - \frac{x^2}{2\mu^2} \psi(\lambda) \quad (4.5)$$

Значения параметра $\lambda = 0$ и $\lambda = 1$ соответствуют характеристикам (4.2) и (4.3). Дифференцируя (4.5) по x и y , найдем

$$z_x = -1 - \frac{x}{\mu^2} (\psi - 3/4 \lambda \psi'), \quad z_y = -\frac{x^{1/2} \psi'}{a_1 \mu} \quad (4.6)$$

Подставив (4.5), (4.6) в (3.5), (4.2), (4.3), получим для функции $\psi(\lambda)$ дифференциальное уравнение

$$\psi'' (\psi - \lambda^2) - 1/4 \psi'^2 + \lambda \psi' - 3/9 (\psi - 1) = 0 \quad (4.7)$$

и граничные условия

$$\psi(0) = 0, \quad \psi'(0) = a_1; \quad \psi(1) = 1, \quad \psi'(1) = 0 \quad (4.8)$$

Разложение решения уравнения (4.7) в окрестности особой точки $\lambda = 0$ имеет вид

$$\psi = a_1 \lambda - a_2 \lambda^{3/2} - a_3 \lambda^2 - a_4 \lambda^{5/2} - \dots \quad (4.9)$$

$$a_3 = 1/9 (1 + 6a_2^2 / a_1^3), \quad a_4 = 1/18 (1 + 9a_3) a_2 / a_1, \dots \quad (4.10)$$

Коэффициенты ряда (4.9) зависят от произвольного параметра $a_2 > 0$, который определяется при численном интегрировании уравнения (4.7) из условия, что решение проходит через вторую особую точку $\lambda = 1$. В результате численного интегрирования получили $a_2 = 0.6105$. Для малых λ из (4.4), (4.5), (4.9) получим разложение

$$z = 1 - x - \mu^{-1} x^{1/2} y + \frac{1}{3\mu^{1/2}} x^{-1/4} y^{3/2} \quad (4.11)$$

В окрестности точки $\lambda = 1$ разложение для ψ имеет вид

$$\psi = 1 - 0.84 (1 - \lambda)^{3/2} \quad (4.12)$$

В окрестности характеристики $y = 0$ будем искать решение в виде разложения по степеням y

$$z = 1 - x - y\theta(x) + y^{3/2} F(x) \quad (4.13)$$

Разложение (4.11) является предельным для разложения (4.13) при x , стремящемся к нулю, поэтому для $F(x)$ должны иметь

$$\lim_{x \rightarrow 0} F(x) x^{1/4} = \frac{1}{3\mu^{1/2}} \quad (4.14)$$

Подставим (4.13) в (3.5) для $F(x)$, получим уравнение

$$\frac{F'}{F} = -\frac{1}{2} \frac{\theta'}{\theta} - \frac{\tau}{1-x} \quad (4.15)$$

Интегрируя (4.15), найдем

$$F(x) = \frac{1}{3\mu} \theta^{-1/2} (1-x)^\tau \quad (4.16)$$

Постоянную интегрирования в (4.16) определили из соотношения (4.14). При $z = 0$ из (4.13) получим вид границы с вакуумом в окрестности точки B^0 :

для $\gamma < 3$ (граница прямая)

$$y = \mu \sqrt{\tau} (1-x) \quad (4.17)$$

для $\gamma = 3$

$$y = (1-x) [-2 \ln(1-x)]^{-1/2} \quad (4.18)$$

для $\gamma > 3$, $-1 < \tau < 0$

$$y = \mu \sqrt{-\tau} (1-x)^{1-1/2\tau} \quad (4.19)$$

Для $\gamma \geq 3$ граница с вакуумом касается характеристики $y = 0$ и имеет в точке B^0 бесконечную кривизну. В окрестности точки B^0 величины zz_x и zz_y / y , вычисленные из (4.13), стремятся к нулю, так что из (3.6) получим

$$x = k(1 - \xi_1) / \gamma, \quad y = k\xi_2 / \gamma \quad (4.20)$$

Подставив (4.20) в (4.17) — (4.19), получим асимптотику свободной границы в окрестности точки B .

5. Исследуем поведение решения задачи (3.5), (3.7), (3.9) в окрестности точки C^0 . Исключив α из (3.9), получим

$$z = k^{-1/2} [k(k+1) - (k+x)^2 - y^2]^{1/2} \quad (5.1)$$

Для (3.9) в окрестности точки C^0 можно записать разложения

$$y - y_0 = \frac{m}{n}(x - x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2\mu n^3}, \quad x > x_0 \quad (5.2)$$

$$z = -\frac{1}{n}(x - x_0), \quad z_x = \frac{mn}{\mu(x - x_0)}, \quad z_y = -\frac{n^2}{\mu(x - x_0)} \quad (5.3)$$

Разложение для z получается из (5.1) с учетом членов второго порядка малости в (5.2).

Будем искать решение уравнения (3.5) в окрестности точки C^0 в виде

$$z = -\frac{1}{n}(x - x_0)f(\zeta) \quad (5.4)$$

$$\zeta = 2\mu mn^2 \left[\frac{n}{m} \frac{(y - y_0)}{(x - x_0)^2} - \frac{1}{x - x_0} \right] \quad (5.5)$$

Для разложения (5.2) величина $\zeta = 1$. Для производных от z по x и y имеем

$$z_x = -\frac{1}{n}(f - \zeta f') + \frac{2\mu mn f'}{x - x_0}, \quad z_y = -\frac{2\mu n^2 f'}{x - x_0} \quad (5.6)$$

Подставив функцию z из (5.4) в уравнение (3.5), для функции f получим дифференциальное уравнение второго порядка

$$(1 + f^2)f'' + 2f'^2(f - \zeta f') + \frac{\tau f'^2}{f} = 0 \quad (5.7)$$

Из формул (5.3) найдем граничные условия

$$f(1) = 1, \quad f'(1) = 1 + \frac{1}{2}\tau \quad (5.8)$$

Значение $f'(1) > 0$ всегда, так как $\tau > -1$. Функция $f(\zeta)$ должна быть такова, что при некотором $\zeta = \zeta_0 < 1$ она обращается в нуль. В окрестности точки $\zeta = 1$ для функции $f(\zeta)$ справедливо разложение

$$f = 1 + (1 + \frac{1}{2}\tau)(\zeta - 1) \quad (5.9)$$

которое для $\tau = 0$ дает точное решение задачи (5.7), (5.8). Для малых τ формулу (5.9) можно рассматривать как приближенное решение. В этом случае величина ζ_0 приближенно равна 0.5τ , для $\tau = 0$, $\zeta_0 = 0$.

Из соотношений (3.6) найдем ξ_1 , ξ_2 для решения (5.4) при $x = x_0$

$$\xi_1 = D - \frac{\gamma m}{\mu}(1 - 2\mu^2 ff'), \quad \xi_2 = -\frac{\gamma n}{\mu}(1 - 2\mu^2 ff') \quad (5.10)$$

Исключив ff' из (5.10), получим

$$\xi_2 = (\xi_1 - D)n/m \quad (5.11)$$

Отсюда следует, что точка C^0 в плоскости $\xi_1\xi_2$ переходит в отрезок прямой (5.11), заключенный между точками A и C . Координаты точки C вычислим из (5.10), подставив туда $\zeta = \zeta_0$. Окрестность точки C^0 переходит в окрестность прямой (5.11). Для однозначности отображения (5.10) необходимо, чтобы величина ff' была монотонной функцией ζ в интервале $(1, \zeta_0)$.

Положив в (5.7), (5.8)

$$g = \frac{1}{2}f^2, \quad g' = ff' \quad (5.12)$$

для функции $g(\zeta)$ получим задачу

$$g'' = \frac{g'^2}{g(1 + 2g)}(\zeta g' - g - \kappa) \quad \left(\kappa = \frac{\tau - 1}{2} = \frac{2 - \gamma}{\gamma - 1} \right) \quad (5.13)$$

$$g(1) = \frac{1}{2}, \quad g'(1) = 1 + \frac{1}{2}\tau$$

Из (5.13) следует, что для $\zeta = 1$

$$g' > 0, \quad g'' > 0 \quad (5.14)$$

Покажем, что всюду в интервале $(1, \zeta_0)$ выполняются условия (5.14). Решение задачи (5.13) можно найти в квадратурах

$$\frac{1}{g'} = \frac{1}{1 + 1/2\tau} + I \quad (5.15)$$

$$\zeta = (g + \kappa) \frac{1}{g'} + \Phi \quad (5.16)$$

$$I(\kappa, g) = \int_g^{1/2} \frac{\Phi dg}{g(1+2g)} \quad (5.17)$$

$$\Phi(\kappa, g) = 2^{\kappa+1} \mu^2 g^\kappa \left(\frac{1}{2} + g \right)^{1/2-\kappa} \quad (5.18)$$

Функция $\Phi(\kappa, g) > 0$ для всех $g > 0$, поэтому $I(\kappa, g) \geq 0$. Подставим (5.16) в (5.13), получим

$$g'' = \frac{\Phi g'^3}{g(1+2g)} \quad (5.19)$$

Из (5.15) и (5.19) следует, что условия (5.14) имеют место всюду в интервале $(1, \zeta_0)$, а это означает, что f и ff' — монотонные функции.

Подставим (5.15) в (5.16), получим формулу

$$\zeta(\kappa, g) = \Phi + (g + \kappa) \left(I + \frac{1}{1 + 1/2\tau} \right) \quad (5.20)$$

Интеграл (5.17) берется в элементарных функциях только для

$$\gamma = 3, \quad \gamma = 1 + 1/(N+1), \quad N = 0, 1, 2, \dots \quad (5.21)$$

Например, для $\kappa = 0$ ($\gamma = 2$)

$$\zeta(0, g) = \frac{\sqrt{2}}{3} \left[r + g \left(\sqrt{2} + \ln \frac{r+1}{\sqrt{2}+1} - \ln \frac{r-1}{\sqrt{2}-1} \right) \right] \quad (5.22)$$

$$r = (1 + 2g)^{1/2}$$

Отсюда $\zeta_0 = \zeta(0, 0) = \sqrt{2}/3$. Проинтегрировав I по частям, и положив $g = 0$ в (5.20), получим для произвольных κ

$$\zeta_0 = \tau \mu^2 (1 + 1/2 R)_2 \quad R = \int_0^{1/2} \left(\frac{2g}{1/2 + g} \right)^\kappa \frac{dg}{(1/2 + g)^{3/2}} \quad (5.23)$$

Продифференцировав ζ_0 по κ , найдем

$$\frac{d\zeta_0}{d\kappa} = 4\mu^4 \left(1 + \frac{1}{2} R \right) + \frac{1}{2} \tau \mu^2 \frac{dR}{d\kappa} \quad (5.24)$$

Положив в (5.23) $s = 2g / (1/2 + g)$, получим оценки

$$\frac{1}{\sqrt{2}(\kappa+1)} \leq R \leq \frac{1}{\kappa+1} \quad (5.25)$$

$$-\frac{1}{(\kappa+1)^2} \leq \frac{dR}{d\kappa} \leq -\frac{1}{\sqrt{2}(\kappa+1)^2} \quad (5.26)$$

Используя (5.25), (5.26), из (5.24) найдем, что $d\zeta_0/d\kappa > 0$, т. е. $\zeta_0(\kappa)$ — монотонно возрастающая функция. Из (5.25) можно получить приближенную формулу для вычис-

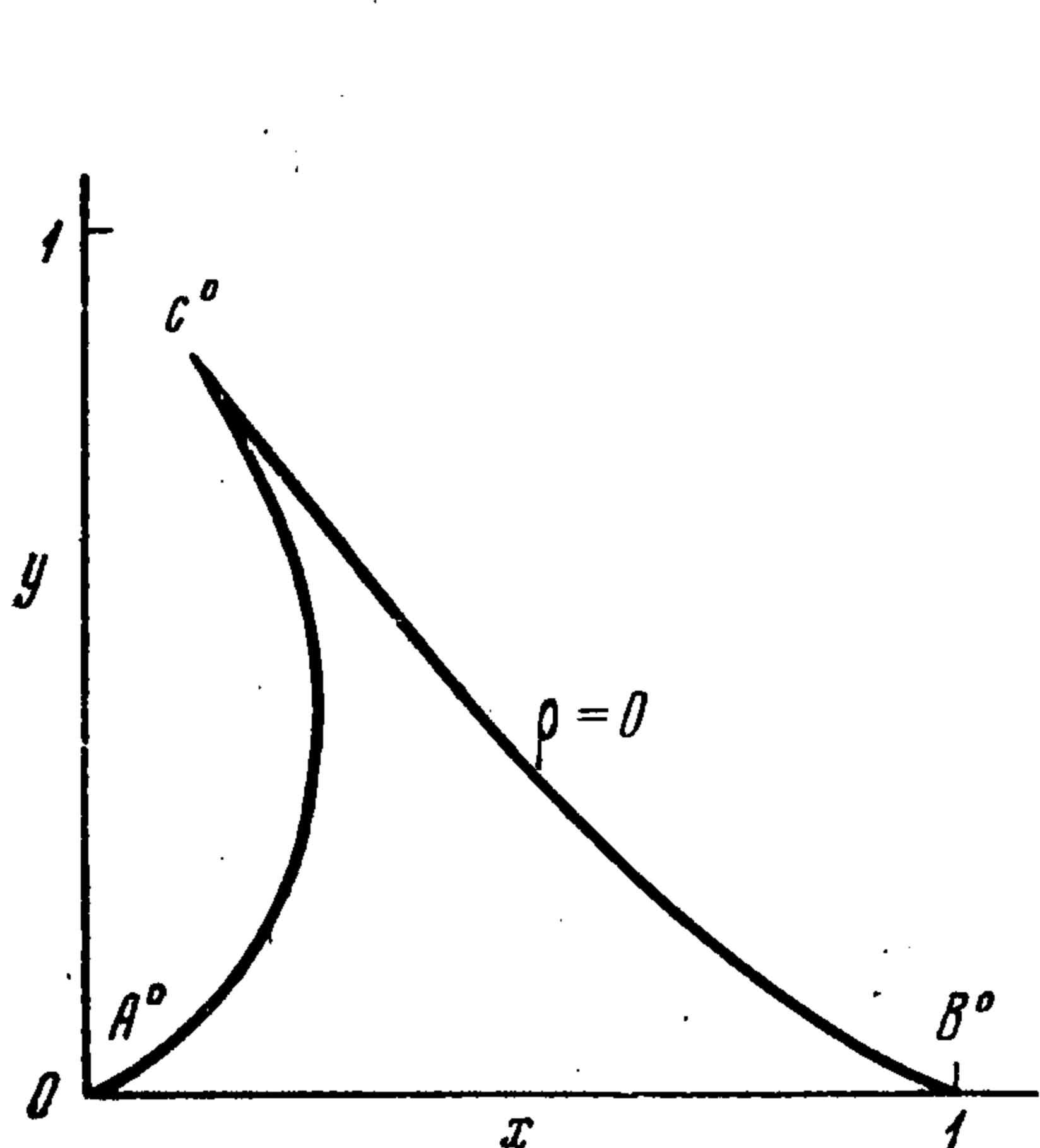
ления ζ_0 (для $\kappa > -0.6$ погрешность меньше 2%)

$$\zeta_0 = \tau \mu^2 \left(1 + \frac{0.4}{\kappa + 1} \right) \quad (5.27)$$

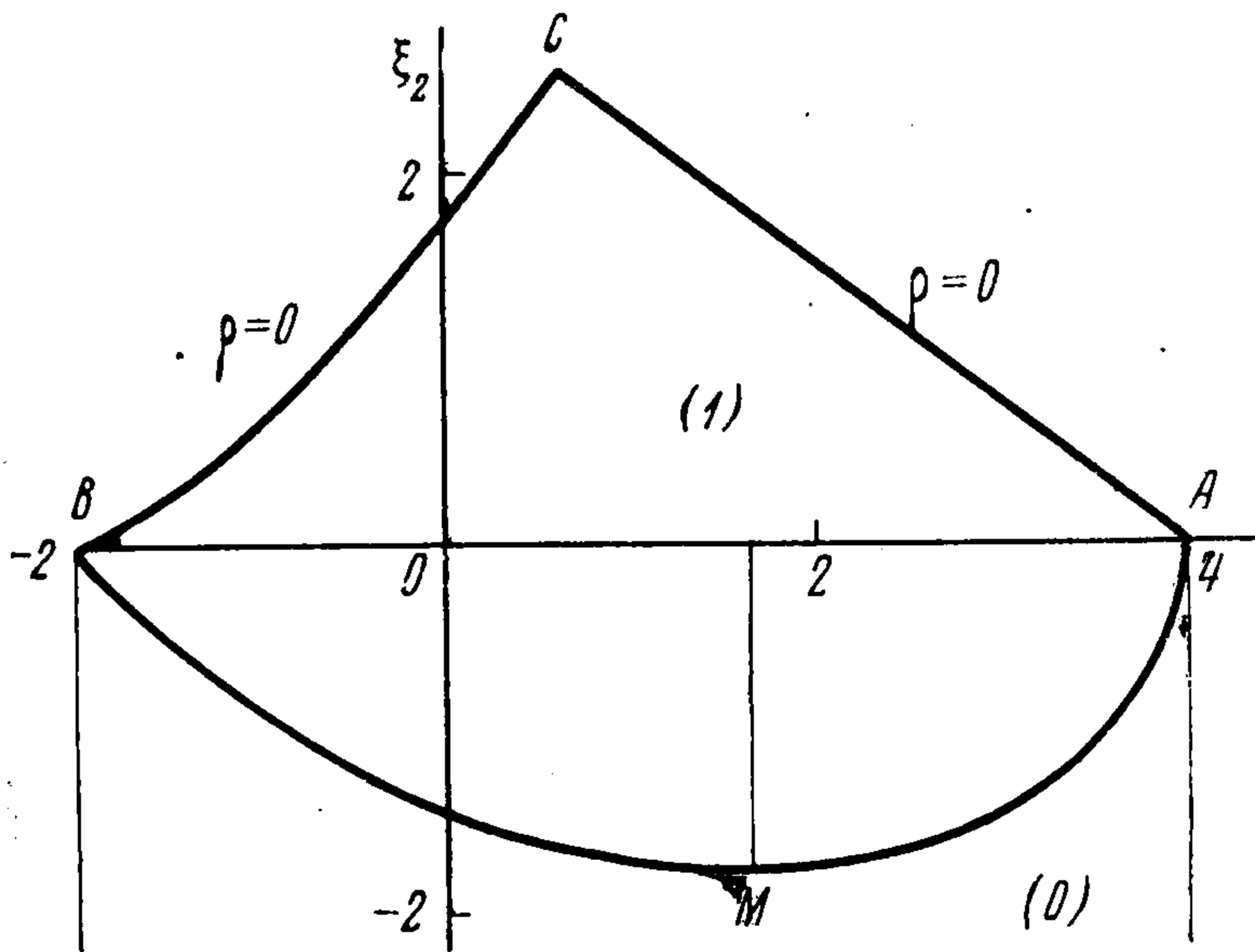
Можно показать, что $\zeta_0 \rightarrow -\infty$ по логарифмическому закону при $\kappa \rightarrow -1$.
Кривая $z = 0$ в окрестности точки C° имеет вид

$$y - y_0 = \frac{m}{n} (x - x_0) + \frac{\zeta_0}{2\mu n^3} (x - x_0)^2 \quad (5.28)$$

т. е. она касается характеристики (5.2). Для $\gamma = 3$, $\zeta_0 = 0$, и линия $z = 0$ в окрестности точки C° — прямая. Для $\gamma \neq 3$ она имеет отличную от нуля кривизну, причем



Фиг. 1



Фиг. 2

для $\gamma < 3$ кривая $z = 0$ лежит в области между характеристикой (5.2) и касательной к ней в точке C° , для $\gamma > 3$ — вне этой области.

Из (5.10) вычислим координаты точки C

$$\xi_{10} = D + \frac{m}{n} \xi_{20}, \quad \xi_{20} = -\frac{\gamma n}{\mu} [1 - 2\mu^2 g'(\kappa, 0)] \quad (5.29)$$

Производная $g'(\kappa, 0) = \kappa / \zeta_0$ для $\kappa > 0$, для $\kappa \leq 0$ она равна нулю. Используя формулы (3.6), найдем, что линия (5.28) переходит в плоскости $\xi_1 \xi_2$ в кривую

$$\xi_2 - \xi_{20} = -\frac{m}{n} (\xi_1 - \xi_{10}) + \frac{k\zeta_0}{2\gamma\mu n^3} (\xi_1 - \xi_{10})^2 \quad (5.30)$$

Таким образом, линия уровня $z = 0$ в окрестности точки C состоит из двух кусков ортогональных кривых (5.11) и (5.30).

6. Задача Гурса для уравнения (3.5) решалась численным методом характеристик. Во всех узловых точках области $A^\circ B^\circ C^\circ$ вычислялись значения x, y, z, z_x, z_y . Расчет начали от точки A° . В первой расчетной точке z, z_x, z_y вычисляли по формулам (4.5), (4.6). Через эту точку проводили характеристику того же семейства, что и характеристика $A^\circ B^\circ$. Для малых y она имеет вид

$$y = \theta_0 / \theta \quad (\theta_0 = \text{const}) \quad (6.1)$$

На характеристике (6.1) для вычислений использовали разложение (4.13). Все последующие точки вычислялись по методу характеристик. В окрестности точки C° метод характеристик давал малую точность, решение здесь получалось при помощи разложения \mathbb{V} (5.4).

В качестве примера приведем результаты для $\gamma = 3$. В этом случае $z = \rho$ — плотность газа

$$m = 0.796, \quad n = -0.606, \quad x_0 = 0.125, \quad y_0 = 0.857, \quad \xi_{10} = 0.624, \quad \xi_{20} = 2.57 \quad (6.2)$$

Линия уровня $\rho = 0$ в окрестности точки C° есть прямая

$$y - y_0 = 1.314 (x - x_0) \quad (6.3)$$

На фиг. 1 представлена область интегрирования в плоскости xy . Переход в плоскость $\xi_1\xi_2$ осуществляется при помощи формул (3.6). На фиг. 2 изображена картина течения в плоскости автомодельных переменных. Линия уровня $\rho = 0$ в окрестности точки C состоит из двух кусков ортогональных прямых

$$\xi_2 = -0.761 (\xi_1 - 4), \quad \xi_2 - \xi_{20} = 1.314 (\xi_1 - \xi_{10}) \quad (6.4)$$

Поступила 10 XII 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. К а ж д а н Я. М. О движении газа за расходящейся детонационной волной в пространстве с вырезанным конусом. ПММ, 1967, т. 31, вып. 5.
2. К а ж д а н Я. М. Исследование окрестности свободной границы при движении газа за расходящейся детонационной волной в пространстве с вырезанным конусом. ПММ, 1968, т. 32, вып. 2.
3. С у ч к о в В. А. Двойные волны плоского потенциального течения политропного газа, Тр. Матем. ин-та им. Стеклова АН СССР, 1966, т. 74. ч. 1.

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ПОЛОГО КОНУСА

М. Ф. Мехтиев, Ю. А. Устинов

(Бакў, Ростов-на-Дону)

Рассматривается осесимметричная задача теории упругости для тела, ограниченного двумя сферическими и двумя коническими поверхностями. На основе результатов работ [1,2] проводится асимптотический анализ напряженно-деформированного состояния оболочки. Методами, разработанными в работах [3,4], краевая задача сводится к бесконечным системам.

§ 1. Отнесем упругий полый конус к сферической системе координат

$$r, \theta, \varphi \quad (r_1 \leq r \leq r_2, \quad \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi)$$

Предположим, что на конических границах ($\theta = \theta_1, \theta = \theta_2$) заданы условия

$$\sigma_\theta = 0, \quad \tau_{r\theta} = 0 \quad (1.1)$$

Методом однородных решений, используя результаты работ [1, 2], перемещения и напряжения можно представить в виде

$$u_r = u_r^\circ + r^{-1/2} \sum_{k=1}^{\infty} C_k r^{z_k} U_{rk}, \quad u_\theta = u_\theta^\circ + r^{-1/2} \sum_{k=1}^{\infty} C_k r^{z_k} U_{\theta k} \quad (1.2)$$

$$\sigma_r = \sigma_r^\circ + 2Gr^{-3/2} \sum_{k=1}^{\infty} C_k r^{z_k} Q_{rk}$$

$$\sigma_\theta = \sigma_\theta^\circ + 2Gr^{-3/2} \sum_{k=1}^{\infty} C_k r^{z_k} Q_{\theta k}, \quad \sigma_\varphi = \sigma_\varphi^\circ + 2Gr^{-3/2} \sum_{k=1}^{\infty} C_k r^{z_k} Q_{\varphi k} \quad (1.3)$$

$$\tau_{r\theta} = \tau_{r\theta}^\circ + 2Gr^{-3/2} \sum_{k=1}^{\infty} C_k r^{z_k} T_k$$