простой вид

$$
\begin{aligned}
&\rho_1(t) = {}^2/_3 I_1, && \varphi_1(t) = -(\beta_1 \pm A \sqrt{{}^1/_3 I_1})\, t + \varphi_{10} \\
&\rho_2(t) = {}^2/_3 I_1, && \varphi_2(t) = -(\beta_2 \pm A \sqrt{{}^1/_3 I_1})\, t + \varphi_{20} \\
&\rho_3(t) = {}^1/_3 I_1, && \varphi_3(t) = -(\beta_3 \pm 2A \sqrt{{}^1/_3 I_1})\, t + \varphi_{30} \\
&\varphi_{10} + \varphi_{20} - \varphi_{30} = \psi_0, && \cos\psi_0 = +1 \text{ или } -1
\end{aligned}
\tag{5.3}
$$

При малых отклонениях от начальных условий, соответствующих центру, как в случае $I_1 < I_2$ (фиг., *б*), так и в случае $I_1 = I_2$ (фиг., *г*), изображающая точка будет описывать небольшие циклы около центра, т. е. величины ρ_i $(=1, 2, 3)$ будут совершать малые периодические колебания около ρ_i^*. В случае $I_1 = I_2$ особой точке ($\rho_3 = I_1$, $\rho_3^{\cdot} = 0$) также соответствует периодическое движение, при котором «движется» лишь один «быстрый» квазиосциллятор

$$\rho_3 = I_1, \quad \varphi_3(t) = -\beta_3 t + \varphi_{30}$$

Однако характер этого периодического движения таков, что при малейшем изменении начальных условий изображающая точка (фиг., *г*) начнет двигаться по близкому к сепаратрисе циклу, что соответствует «медленной» перекачке энергии между осцилляторами.

Автор благодарит В. В. Румянцева и Л. Г. Хазина за внимание к работе и полезные обсуждения. Пользуясь случаем, автор благодарит В. И. Арнольда, привлекшего внимание автора к работе [5].

Поступила 23 VII 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Хазин Л. Г., Цельман Ф. Х. О нелинейном взаимодействии резонирующих осцилляторов. Докл. АН СССР, 1970, т. 193, № 2.
2. Цельман Ф. Х. О перекачке энергии между нелинейно-связанными осцилляторами в случае резонанса третьего порядка, ПММ, 1970, т. 34, вып. 5.
3. Moser J. Lectures on hamiltonian systems. Mem. Amer. Math. Soc., 1968, vol. 81.
4. Брюно А. Д. Нормальная форма дифференциальных уравнений. Докл. АН СССР, 1964, т. 157, № 6.
5. Витт А., Горелик Г. Колебания упругого маятника как пример колебаний двух параметрически связанных линейных систем. Ж. техн. физ., 1933, т. 3, вып. 2, 3.
6. Mettler E. Kleine Schwingungen und Methode der säkularen Störungen. Z. angew. Meth. Mech., 1963, Bd. 43, t. 81—85.

О СВЯЗИ РАДИАЛЬНЫХ И ВЕРТИКАЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ ЧАСТИЦ В ЦИКЛИЧЕСКИХ УСКОРИТЕЛЯХ

В. М. Старжинский

(Москва)

Рассматриваются бетатронные колебания частиц в циклических ускорителях со слабой фокусировкой. Уравнения движения частиц записываются в виде системы Ляпунова [1, 2] четвертого порядка. Основываясь на преобразовании систем Ляпунова, предложенном автором [3, 4], уравнения движения сводятся к неавтономному уравнению второго порядка, содержащему малый параметр. При помощи метода малого параметра определяются вертикально-радиальные колебания частиц и описывается переходной процесс от чисто радиальных колебаний к вертикально-радиальным.

Уравнения бетатронных колебаний частиц в циклических ускорителях со слабой фокусировкой [8] могут быть записаны в виде [1]

$$\xi^{\cdot\cdot} + \xi = -{}^1/_2\,\beta\eta^2, \qquad \eta^{\cdot\cdot} + \alpha\eta = -\beta\xi\eta \tag{1}$$
$$\left(\xi = \frac{r - r_0}{r_0},\ \eta = \frac{z}{r_0};\quad \alpha = \frac{n}{1-n},\quad \beta = \frac{k}{\omega^2(1-n)}\right)$$

Здесь r и z — две из цилиндрических координат частицы, точка сверху означает дифференцирование по безразмерному времени τ и

$$\tau = \omega\sqrt{1-n}\,t, \qquad \omega = \frac{eH(r_0)}{mc}$$

$$n = -\frac{r_0}{H(r_0)}H'(r_0) \qquad (0 < n < 1), \qquad k = -\frac{r_0}{H(r_0)}H''(r_0)$$

m и e — масса и заряд частицы, c — скорость света, $H(r)$ — вертикальная компонента вектора напряженности магнитного поля, r_0 — радиус траектории, соответствующей заданной энергии частицы.

Система (1) обладает интегралом энергии частиц, соответствующим колебательной части движения

$$\xi^2 + \xi^{\cdot 2} + \alpha\eta^2 + \eta^{\cdot 2} + \beta\xi\eta^2 = \mu^2 \qquad (\mu > 0) \tag{2}$$

Прежде чем приступить к преобразованию системы (1), заметим, что она допускает решение (чисто радиальные колебания частиц)

$$\eta \equiv 0, \qquad \xi = \mu\cos(\tau - \tau_0) \tag{3}$$

Из интеграла (2) следует, что константа μ^2 равна квадрату амплитуды чисто радиальных колебаний. Для суждения об устойчивости последних положим в (1)

$$\xi = \mu\cos(\tau - \tau_0) + x, \qquad \eta = y$$

и получим уравнения в вариациях в виде

$$x^{\cdot\cdot} + x = 0, \qquad y^{\cdot\cdot} + [\alpha + \beta\mu\cos(\tau - \tau_0)]\,y = 0 \tag{4}$$

Отсюда следует, что неустойчивость чисто радиальных колебаний (3) определяется неустойчивостью тривиального решения второго из уравнений (4) — уравнения Матье. Области неустойчивости на плоскости μn примыкают к критическим точкам n_l на оси n с угловым коэффициентом χ наклона касательных

$$n_l = \frac{l^2}{4 + l^2}, \qquad \chi = \mp\frac{k}{2\omega^2}(1 - n_l) \qquad (l = 1, 2, \ldots)$$

Таким образом, в первом приближении области неустойчивости (3) в плоскости μn определяются неравенствами

$$\frac{l^2}{4+l^2} - \frac{2k}{\omega^2(4+l^2)}\mu + O(\mu^2) < n < \frac{l^2}{4+l^2} + \frac{2k}{\omega^2(4+l^2)}\mu + O(\mu^2)$$

для любого натурального l. Наибольший интерес представляет первая область неустойчивости ($l = 1$) с критическим значением $n_1 = {}^1/_5$.

Для отыскания периодических решений системы (1), отличных от чисто радиальных колебаний, преобразуем ее. Используя подстановку Ляпунова [1]

$$\xi = \rho\sin\vartheta, \qquad \xi^{\cdot} = \rho\cos\vartheta, \qquad \eta = \rho\zeta \tag{5}$$

и интеграл (2) и следуя [3, 4], придем к одному уравнению (штрих означает производную по ϑ)

[1] Здесь в первом уравнении (1) исправлена допущенная в [8] опечатка.

$$\zeta'' + \alpha\zeta = -\mu\beta\zeta \Big[\sqrt{1+\alpha\zeta^2+\zeta'^2}\sin\vartheta + $$
$$+ (1+\alpha\zeta^2+\zeta'^2)^{-1/2}\Big(\frac{1-4\alpha}{2}\zeta\sin\vartheta - {}^3/_2\,\zeta'\cos\vartheta\Big)\zeta\Big] + O(\mu^2) \tag{6}$$

Следуя Пуанкаре [6], будем искать периодическое решение уравнения (6) в виде ряда

$$\zeta(\vartheta;\ \mu) = \zeta_0(\vartheta) + \mu\zeta_1(\vartheta) + \mu^2\zeta_2(\vartheta) + \ldots$$

и подставляя этот ряд в уравнение (6), получим уравнения для нахождения ζ_0 и ζ_1

$$\zeta_0'' + \alpha\zeta_0 = 0 \tag{7}$$

$$\zeta_1'' + \alpha\zeta_1 = -\beta\zeta_0 \Big[\sqrt{1+\alpha\zeta_0^2+\zeta_0'^2}\sin\vartheta + $$
$$+ (1+\alpha\zeta_0^2+\zeta_0'^2)^{-1/2}\Big(\frac{1-4\alpha}{2}\zeta_0\sin\vartheta - {}^3/_2\,\zeta_0'\cos\vartheta\Big)\zeta_0\Big] \tag{8}$$

Уравнение (7) обладает семейством $T(\alpha)$-периодических решений

$$\zeta_0 = M_0\cos\sqrt{\alpha}\,\vartheta + N_0\sin\sqrt{\alpha}\,\vartheta \qquad (T(\alpha) = 2\pi\alpha^{-1/2}) \tag{9}$$

Решение (9) можно рассматривать и как $qT(\alpha)$-периодическое, где q — любое натуральное число. Уравнение (6) зависит явно от независимой переменной ϑ, и эту зависимость также можно рассматривать как $2p\pi$-периодическую с любым натуральным p. Поэтому решение (9) будет порождающим для $2p\pi$-периодического решения уравнения (6) тогда и только тогда, когда

$$qT(\alpha) = 2p\pi, \quad \text{т. е.}\ \alpha = \frac{q^2}{p^2} \quad \text{или} \quad n = \frac{q^2}{p^2+q^2} \tag{10}$$

где q и p — любые взаимно простые числа. Итак, уравнение (6) допускает периодические решения с наименьшим периодом $2p\pi$ ($p = 1, 2, \ldots$) только лишь для α, определяемых формулой (10). Множество значений $\{n\}$, определяемое формулой (10), всюду плотно на интервале (0, 1) изменения n, иначе говоря, каждое значение $n \in (0, 1)$ либо определяется формулой (10), либо может быть представлено ею с любой степенью точности.

Уравнение (8) с учетом (9) и (10) представляет собой уравнение для определения первой поправки по μ $2p\pi$-периодического решения (6) ($p = 1, 2, \ldots$). Неоднородная часть этого уравнения содержит тригонометрические функции с круговыми частотами а) $|p-q|/p$, б) $|p-3q|/p$, в) $(p+q)/p$, $(p+3q)/p$

Выясним, когда одна из этих частот совпадает с круговой частотой порождающего решения:

а) $(p-q)/p = q/p$, $p = 2$, $q = 1$, $\alpha = {}^1/_4$, $n = {}^1/_5$

б) $(p-3q)/p = q/p$, $p = 4$, $q = 1$, $\alpha = {}^1/_{16}$, $n = {}^1/_{17}$

$(3q-p)/p = q/p$, $p = 2$, $q = 1$, $\alpha = {}^1/_4$, $n = {}^1/_5$

В случае в) такое совпадение невозможно. В случаях а) и б) уравнение (8) допускает $2p\pi$-периодические решения при указанных p не для всех значений M_0 и N_0, а лишь для тех, при которых уничтожаются члены с $\sin(q\vartheta/p)$ и $\cos(q\vartheta/p)$ в его правой части. Уравнения для порождающих амплитуд при $n = {}^1/_5$

$$N_0(4 - 2M_0^2 + N_0^2) = 0, \qquad M_0(4 + M_0^2 - 2N_0^2) = 0$$

дадут ненулевые решения: $M_0 = \pm 2$, $N_0 = \pm 2$. Из (9) получим тогда

$$\zeta_0 = \pm 2\sqrt{2}\cos({}^1/_2\,\vartheta \mp {}^1/_4\,\pi) \tag{11}$$

т. е. единственное значение порождающей амплитуды равное $2\sqrt{2}$ при четырех значениях порождающей начальной фазы.

В случае $n = {}^1/_{17}$ уравнения для порождающих амплитуд обращаются в тождества. Поэтому при всех остальных значениях в (10), кроме $n = {}^1/_5$, формула (9) доставит семейство порождающих решений уравнения (6) от двух параметров.

Остановимся в заключение на $n = {}^1/_5$ — наименьшем значении n, для которого чисто радиальные колебания (3) неустойчивы при сколь угодно малой их амплитуде μ. Из формул (5), (11) имеем, следуя [3, 4]

$$\rho = {}^1/_3\sqrt{3}\mu + O(\mu^2), \quad \vartheta^{\cdot} = 1 + {}^2/_3\sqrt{3}\beta\mu\,(1 \pm \sin\vartheta)\sin\vartheta + O(\mu^2)$$

Отсюда получим для периода вертикально-радиальных колебаний (искомое периодическое решение)

$$T = \frac{\sqrt{5}}{2\omega}\int\limits_0^{4\pi}[1 + {}^2/_3\sqrt{3}\beta\mu\,(1 \pm \sin\vartheta)\sin\vartheta + O(\mu^2)]^{-1}\,d\vartheta =$$

$$= \frac{2\sqrt{5}\pi}{\omega}\left[1 \mp {}^5/_{12}\sqrt{3}\frac{k}{\omega^2}\mu + O(\mu^2)\right] \tag{12}$$

для закона движения

$$\begin{aligned} \xi &= \rho\sin\vartheta = {}^1/_3\sqrt{3}\mu\sin({}^2/_5\sqrt{5}\omega t) + O(\mu^2) \\ \eta &= \rho\zeta = \pm{}^2/_3\sqrt{6}\mu\cos({}^1/_5\sqrt{5}\omega t \mp {}^1/_4\pi) + O(\mu^2) \end{aligned} \tag{13}$$

Величина μ определяется по начальному значению приведенной энергии (2) колебаний.

Перейдем к описанию перекачки энергии при $n = {}^1/_5$ ($\alpha = {}^1/_4$), т. е. переходного процесса от неустойчивых чисто радиальных колебаний (3) к вертикально-радиальным колебаниям (13). Подстановка Ван-дер-Поля [7, 5]

$$\zeta = a\cos({}^1/_2\vartheta + \varphi), \qquad \zeta' = -{}^1/_2\,a\sin({}^1/_2\vartheta + \varphi) \tag{14}$$

и последующее осреднение по явно входящему независимому переменному ϑ приведет уравнение (6) при $\alpha = {}^1/_4$ к укороченным уравнениям Ван-дер-Поля относительно медленно меняющихся переменных a и φ

$$a' = {}^1/_4\mu\beta a\sqrt{4 + a^2}\cos 2\varphi + O(\mu^2), \qquad \varphi' = -{}^1/_8\mu\beta\frac{8 - a^2}{\sqrt{4 + a^2}}\sin 2\varphi + O(\mu^2) \tag{15}$$

Точное интегрирование этой системы приводит к трудно обозримым квадратурам. Ограничимся ее приближенным интегрированием. Из второго уравнения (15) следует, что при $|a| \leqslant 2\sqrt{2}$ имеем $\varphi' \leqslant 0$ и будем иметь $|\varphi_0| > |\varphi| \geqslant 0$. Поскольку при $|a| \leqslant 2\sqrt{2}$ в силу (14) имеем $|\zeta| \leqslant 2\sqrt{2}$, где, напомним, $2\sqrt{2}$ есть амплитуда порождающего решения (11), то на весь промежуток рассматриваемого перехода можно положить $\cos 2\varphi \approx 1$, если φ_0 достаточно мало. Тогда первое уравнение (15) даст нам для $a_0 = a(0) > 0$

$$\int\limits_{a_0}^{a}\frac{da}{a\sqrt{4 + a^2}} = \frac{1}{4}\mu\beta\vartheta$$

Отсюда получим приближенный закон изменения амплитуды a Ван-дер-Поля

$$a = \frac{4b_0\exp({}^1/_2\,\beta\mu\vartheta)}{1 - b_0^2\exp(\beta\mu\vartheta)} \qquad \left(b_0 = \frac{1}{a_0}\left[\sqrt{4 + a_0^2} - 2\right]\right) \tag{16}$$

Первая из формул (14) опишет теперь переходной процесс. Вычислим время перехода от чисто радиальных колебаний (3) к вертикально-радиальным (13). Полагая в (16) $a = 2\sqrt{2}$, будем иметь для соответствующего значения $\vartheta = \theta$

$$\theta = \frac{2}{\beta\mu}\ln\left(\frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}}\,\frac{a_0}{\sqrt{4 + a_0^2} - 2}\right) \tag{17}$$

Заметим, что переходной процесс происходит на интервале времени, длина которого имеет порядок $O(1/\mu)$, что соответствует алгоритму асимптотического интегрирования в методе усреднения [9]. В силу малости φ_0 имеем $a_0 \approx \zeta(0)$ и формула (17) для малых a_0 примет вид

$$\theta = \frac{2}{\beta\mu} \ln \frac{2\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{\zeta(0)} \tag{18}$$

Выразим $\zeta(0)$ через начальные значения исходных переменных

$$\zeta = \frac{\eta}{\rho}, \quad \rho = \sqrt{\xi^2 + \xi'^2}, \quad \zeta(0) = \eta(0)\left[\xi(0)^2 + {}^5/_4\,\omega^{-2}\left(\frac{d\xi}{dt}\right)_0^2\right]^{-1/2}$$

Аналогично (12) определим исходное время переходного процесса от чисто радиальных колебаний (3) к вертикально-радиальным (13) при $n = {}^1/_5$

$$\Gamma = \frac{\sqrt{5}}{2\omega}\left[\left(1 \mp {}^5/_{12}\,\sqrt{3}\frac{k}{\omega^2}\mu\right)\theta + O(\mu)\right]$$

где выбор знака определяется выбором в скобке (13), а величина μ определяется по начальному значению приведенной энергии (2) колебаний.

Поступила 29 XII 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. Харьков, 1892.
2. Малкин И. Г. Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний. М.— Л., Гостехиздат, 1949.
3. Старжинский В. М. Vereinigungen der Methoden von Ljapunow und Poincaré in der Theorie nichtlinearen Schwingungen. Berlin, Kl. Math. Phys. und Techn., 1965, No. 1.
4. Старжинский В. М. Об одном варианте метода определения периодических решений. Инж. ж. МТТ, 1968, № 6.
5. Ван-дер-Поль Б. Нелинейная теория электрических колебаний. М., Связьиздат, 1935.
6. Poincare. H. Les méthodes nouvelles de la méchanique céleste, Paris, 1892—1899, t. 1—3,
7. Митропольский Ю. А. Лекции по методу усреднения в нелинейной механике. Киев, «Наукова думка», 1966.
8. Коуэн Б. Циклотрон и фазотрон. В сб.: Ускорители. Госатомиздат, 1962.
9. Моисеев Н. Н. Асимптотические методы нелинейной механики. М., «Наука», 1969.

О ДВИЖЕНИИ ГАЗА ЗА ПЛОСКОЙ ДЕТОНАЦИОННОЙ ВОЛНОЙ, ОРТОГОНАЛЬНОЙ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

В. А. Сучков

(Челябинск)

Рассматривается задача о детонации четверти пространства, заполненного взрывчатым веществом, инициированного по одной из граней. Нахождение решения в возмущенной области приводится к решению задачи Гурса для квазилинейного дифференциального уравнения второго порядка от двух независимых переменных, которая решается численным методом характеристик. Приведено исследование особых точек, получено решение в возмущенной области и форма свободной поверхности.

Задача о движении газа за расходящейся детонационной волной в пространстве с вырезанным конусом рассматривалась в работах [1,2].