

О КОЛЕБАНИЯХ СИСТЕМЫ СВЯЗАННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ ПРИ ОДНОМ РЕЗОНАНСЕ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Ф. Х. Цельман

(Москва)

Случай, когда между частотами осцилляторов имеется одно резонансное соотношение $\beta_1 = 2\beta_2$, изучался в статьях [1, 2]. Рассматривается возможный случай резонанса третьего порядка при колебаниях в гамильтоновой системе нелинейно связанных осцилляторов, когда между частотами трех осцилляторов имеется одно резонансное соотношение вида $\beta_1 + \beta_2 = \beta_3$ [1]. Эта задача изучалась с помощью метода секулярных возмущений в работе [6].

1. **Постановка задачи.** Рассматривается гамильтонова система нелинейно связанных осцилляторов с гамильтонианом

$$H(p, q) = H_2(p, q) + H_3(p, q) + \dots + H_i(p, q) + \dots \quad (1.1)$$

$$p = (p_1, \dots, p_n), \quad q = (q_1, \dots, q_n)$$

$$H_2(p, q) = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^n \beta_{\nu} (q_{\nu}^2 + p_{\nu}^2) \quad (\beta_{\nu} > 0) \quad (1.2)$$

Здесь $\pm i\beta_{\nu}$ — собственные значения линеаризованной системы; $H_i(p, q)$ — однородный многочлен степени i . Величины $\beta_{\nu} > 0$, соответствующие частотам «расцепленных» осцилляторов, т. е. случаю, когда в (1.1) все $H_i(p, q) = 0$ ($i \geq 3$), будем называть в дальнейшем просто частотами.

Пусть существует соотношение

$$k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + \dots + k_n\beta_n = 0 \quad (1.3)$$

где k_i — целые числа. Тогда говорят, что имеет место резонанс. Вектор $k = (k_1, \dots, k_n)$ называется резонансным вектором, а число $k = |k_1| + \dots + |k_n|$ — порядком резонанса.

Рассмотрим систему из n осцилляторов в случае, когда между частотами осцилляторов имеется лишь одно линейно независимое резонансное соотношение (1.3), которое (при соответствующей нумерации осцилляторов) записывается так:

$$\beta_1 + \beta_2 = \beta_3 \quad (1.4)$$

В этом случае, согласно теореме [3] о возможности приведения гамильтониана системы в случае резонанса (1.3) к простейшей, так называемой «нормальной» форме, гамильтониан системы (1.1), (1.2) может быть приведен канонической полиномиальной заменой переменных $(p, q \rightarrow \xi, \eta)$ к виду

$$H = \sum_{\nu=1}^n \beta_{\nu} \rho_{\nu} + 2A \sqrt{\rho_1 \rho_2 \rho_3} \cos \psi + R(\rho, \varphi) \quad (1.5)$$

$$\xi_{\nu} = \sqrt{2\rho_{\nu}} \sin \varphi_{\nu}, \quad \eta_{\nu} = \sqrt{2\rho_{\nu}} \cos \varphi_{\nu} \quad (1.6)$$

Здесь ρ_{ν} , φ_{ν} — канонические полярные координаты; ψ — «резонансная фаза»:

$$\psi = \varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3 \quad (1.7)$$

$R(\rho, \varphi)$ имеет по переменным ρ степень не ниже второй.

Гамильтониан $\Gamma = H - R(\rho, \varphi)$, отличающийся от H на члены не ниже второго порядка по переменным ρ , т. е. на члены выше третьего порядка по исходным переменным, совпадает с указанной точностью с «нормальной формой» гамильтониана [3, 4].

В дальнейшем будем рассматривать модельную систему с гамильтонианом

$$\Gamma = \sum_{v=1}^n \beta_v \rho_v + 2A \sqrt{\rho_1 \rho_2 \rho_3} \cos \psi \quad (1.8)$$

В переменных ρ, φ гамильтонов вид системы уравнений движения

$$\frac{d\rho_v}{dt} = \frac{\partial \Gamma}{\partial \varphi_v}, \quad \frac{d\varphi_v}{dt} = - \frac{\partial \Gamma}{\partial \rho_v} \quad (1.9)$$

Предположим, что константа A в (1.8) отлична от нуля. Отметим, что, поскольку система с гамильтонианом (1.8) является, с указанной точностью, модельной для «всех»¹ рассматриваемых нами систем из n связанных осцилляторов с гамильтонианом (1.1), (1.2) и резонансным соотношением (1.4), то ее изучение позволяет дать картину движений сразу для «всех» таких систем.

Система (1.9) с гамильтонианом (1.8) обладает следующими интегралами [3, 1]:

$$J_2 = \rho_2 - \frac{k_2}{k_1} \rho_1 = \rho_2 - \rho_1, \quad J_3 = \rho_3 - \frac{k_3}{k_1} \rho_1 = \rho_3 + \rho_1 \quad (1.10)$$

$$J_4 = \rho_4, \quad J_5 = \rho_5, \dots, \quad J_n = \rho_n$$

Здесь k_α — компоненты резонансного n -мерного вектора k (1, 1, -1, 0, ..., 0). У системы (1.9) имеется еще интеграл

$$F = 2A \sqrt{\rho_1 \rho_2 \rho_3} \cos \psi \quad (1.11)$$

Уравнения для фаз φ_j имеют вид

$$\frac{d\varphi_j}{dt} = -\beta_j \quad (j = 4, 5, \dots, n) \quad (1.12)$$

Отсюда и из (1.10) имеем для этих «квазиосцилляторов»²

$$\rho_j = J_j, \quad \varphi_j = -\beta_j t + \varphi_{j0} \quad (j = 4, 5, \dots, n) \quad (1.13)$$

где φ_{j0} — начальное значение фазы φ_j . Таким образом, соотношения (1.13) полностью определяют (в рассматриваемом приближении) движение квазиосцилляторов (ρ_j, φ_j) ($j = 4, 5, \dots, n$), которое «устроено» в переменных ρ_j, φ_j как движение точки по окружности постоянного радиуса $\rho_j = J_j$ с постоянной угловой скоростью $-\beta_j$, равной частоте j -го осциллятора, при отсутствии связи с другими осцилляторами.

В переменных $\rho_\alpha, \varphi_\alpha$ изучение движения рассматриваемой системы (1.9) осцилляторов можно проводить независимо для квазиосцилляторов (ρ_i, φ_i) ($i = 1, 2, 3$), «существенно» связанных резонансным соотношением (1.4) (т. е. $k_i \neq 0$ ($i = 1, 2, 3$)) и для остальных квазиосцилляторов (ρ_j, φ_j) ($j = 4, 5, \dots, n$), движение которых полностью определяется соотношениями (1.13). Поэтому в дальнейшем будем рассматривать движение только первых трех квазиосцилляторов (ρ_i, φ_i) ($i = 1, 2, 3$).

2. Уравнения движения «резонирующих» осцилляторов. Интегралы. «Резонирующими» будем называть те осцилляторы, частоты которых входят в резонансное соотношение (1.4) с коэффициентом $k_\alpha \neq 0$. (В нашем случае — это первые три осциллятора или, после перехода к нормальной форме гамильтониана, первые три квазиосциллятора (ρ_i, φ_i) ($i = 1, 2, 3$)).

Интегралы (1.10), относящиеся к этим трем квазиосцилляторам, удобно переписать в следующем виде, вводя новые обозначения для интегралов

$$\rho_1 + \rho_3 = J_3 \equiv I_1, \quad \rho_2 + \rho_3 = J_2 + J_3 \equiv I_2 \quad (2.1)$$

¹ Для некоторых систем $A = 0$. Исследование таких систем с указанной точностью проводится элементарно: $\rho_i = \text{const}$, $\varphi_i = -\beta_i t + \varphi_{i0}$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

² «Квазиосциллятором» здесь называется пара переменных $(\rho_\alpha, \varphi_\alpha)$.

Напишем уравнение для ρ_3

$$\frac{d\rho_3}{dt} = 2A \sqrt{\rho_1 \rho_2 \rho_3} \sin \psi \quad (2.2)$$

Если при помощи интеграла F (1.11) получить выражение для $\sin \psi$, а с помощью интегралов (2.1) выразить ρ_1 и ρ_2 через ρ_3 и подставить эти выражения в (2.2), то получим для ρ_3 следующее автономное уравнение:

$$\frac{d\rho_3}{dt} = \pm 2A \sqrt{\rho_3 (I_1 - \rho_3) (I_2 - \rho_3) - F_1^2} \quad (F_1 = F/2A) \quad (2.3)$$

Исследование этого уравнения позволяет получить качественную картину возможных движений при различных начальных данных. При конкретных значениях начальных условий уравнение (2.3) может быть непосредственно проинтегрировано. Величины ρ_1 и ρ_2 получаются затем из интегралов I_1 и I_2 (2.1). Величины фаз $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ получаются после этого квадратурами из уравнений для фаз, причем, используя интеграл F , эти уравнения можно записать так:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_1}{dt} &= - \frac{\partial \Gamma}{\partial \rho_1} = - (\beta_1 + A \sqrt{\rho_2 \rho_3 / \rho_1} \cos \psi) = - \left(\beta_1 + \frac{F}{2\rho_1} \right) \\ \frac{d\varphi_i}{dt} &= - \left(\beta_i + \frac{F}{2\rho_i} \right) \quad (i = 2, 3) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Отсюда, между прочим, видно, что скорость изменения фазы φ_i ($i = 1, 2, 3$) зависит только от «своего» переменного ρ_i , т. е. после получения значения ρ_i уравнение для φ_i может быть проинтегрировано независимо от других значений $\rho_\alpha, \varphi_\alpha$ ($\alpha \neq i$).

3. «Фазовый портрет» системы в случае $I_1 \neq I_2$. Перейдем к исследованию уравнения (2.3). Обозначим подкоренное выражение через $\Phi(\rho_3; F_1)$, т. е.

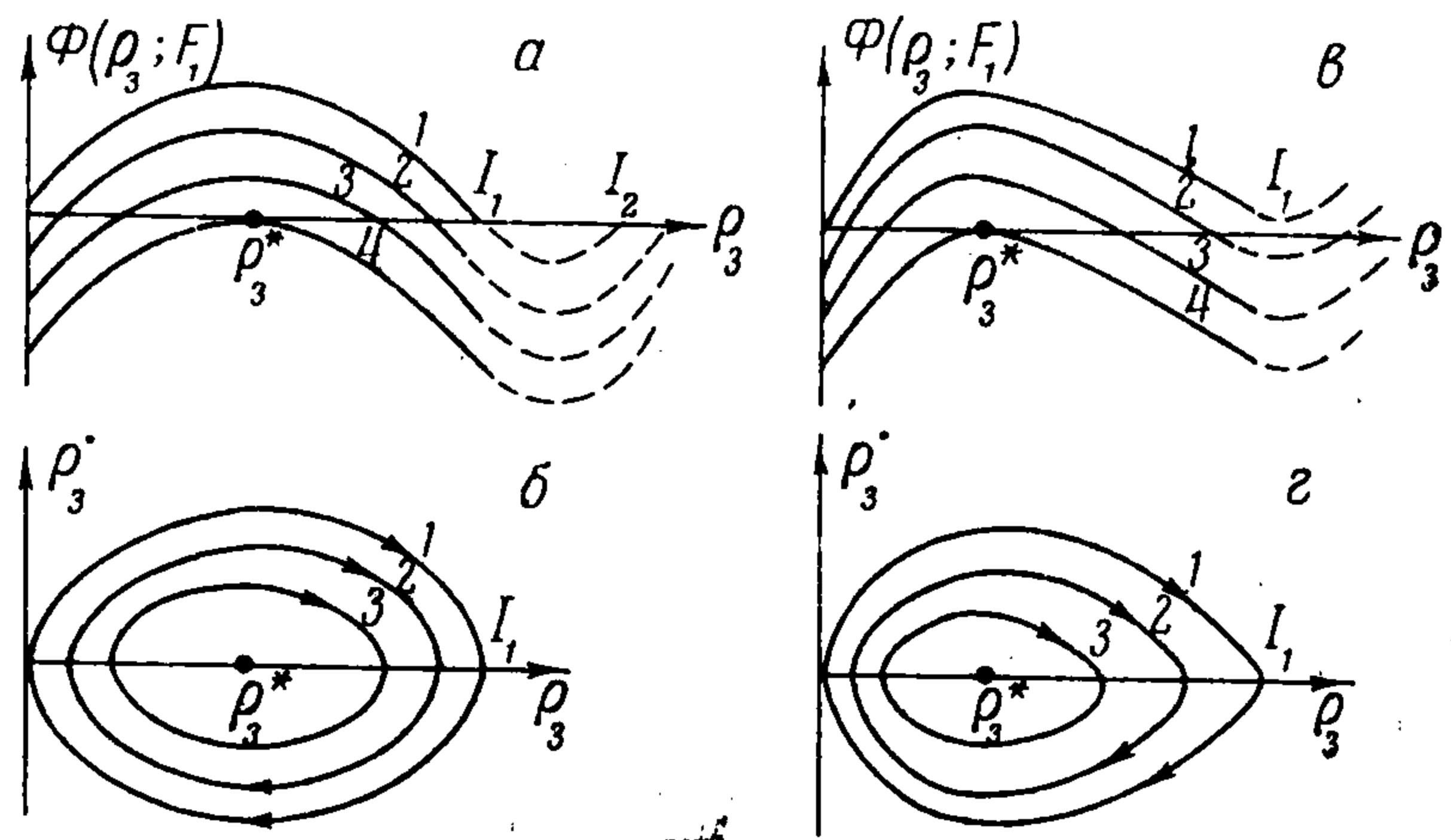
$$\Phi(\rho_3; F_1) = \rho_3 (I_1 - \rho_3) (I_2 - \rho_3) - F_1^2 \quad (3.1)$$

Будем исследовать эту функцию при фиксированных значениях интегралов I_1 и I_2 в зависимости от значения интеграла F_1 . Рассмотрим сначала более общий случай, когда $I_1 \neq I_2$ и пусть, для определенности,

$$0 < I_1 < I_2 \quad (3.2)$$

(Заметим, что, в силу неотрицательности ρ_i , интегралы $I_1, I_2 \geq 0$.) Из выражений (2.1), (3.2) и неотрицательности ρ_i следует, что во все время движения

$$\begin{aligned} \rho_1(t) &\leq I_1, & \rho_2(t) &\leq I_2, \\ \rho_3(t) &\leq I_1 \end{aligned} \quad (3.3)$$



Сама запись кубического многочлена $\Phi(\rho_3; F_1)$ позволяет легко представить себе вид функции (3.1) при $F_1 = 0$ (кривая 1 на фигуре, а) и, следовательно, при $F_1 \neq 0$, так как кривая 1 фиг., а просто опускается на F_1^2 . Нетрудно показать, что при всех возможных значениях интеграла F_1 функции $\Phi(\rho_3; F_1)$ имеют максимум в точке

$$\rho_3^* = \frac{1}{3} [I_1 + I_2 - \sqrt{(I_1 + I_2)^2 - 3I_1 I_2}] \quad (3.4)$$

Здесь ρ_3^* — тот корень уравнения $\Phi'(\rho_3; F_1) = 0$, который лежит в области возможных движений $0 \leq \rho_3 \leq I_1$. Отметим также, что $\Phi(\rho_3^*; F_1)$ обращается в нуль при $|\cos \psi| = 1$, или, другими словами, при максимально возможном значении интеграла F_1^2 , равного

$$(F_1^2)^* = (I_1 - \rho_3^*) (I_2 - \rho_3^*) \rho_3^* \quad (3.5)$$

Вид кривых $\Phi(\rho_3; F_1)$ при фиксированном значении интегралов I_1 и I_2 и при различных возможных значениях интеграла F_1 показан на фиг., а. Кривая 1 получается, когда $F_1 = 0$, кривая 4 — когда F_1^2 достигает значения (3.5). Остальные кривые соответствуют промежуточным значениям интеграла F_1 .

На фиг., б изображены соответствующие кривые на фазовой плоскости (ρ_3, ρ_3') . Имеем одну особую точку

$$\rho_3 = \rho_3^*, \quad \rho_3' = 0 \quad (3.6)$$

где ρ_3^* определяется выражением (3.4).

Интегральные кривые, не проходящие через эту особую точку, — циклы, пересекающие ось ρ_3 под прямым углом.

При всех возможных начальных значениях, кроме $\rho_{30} = \rho_3^*$ и одновременно $|\cos \psi_0| = 1$, имеет место периодическое изменение ρ_3 (и, соответственно, из интегралов I_1 и I_2 , периодическое изменение ρ_1 и ρ_2), которое, учитывая, что в первом приближении ρ_i пропорциональны (с коэффициентом β_i) энергии i -го осциллятора, и следуя терминологии работы [5], будем называть перекачкой энергии между осцилляторами. Перекачка происходит с периодом

$$\tau = \oint \frac{d\rho_3}{2A \sqrt{\rho_3 (I_1 - \rho_3) (I_2 - \rho_3) - F_1^2}} \quad (3.7)$$

где интеграл берется вдоль цикла, соответствующего рассматриваемым начальным условиям. Таким образом, при начальных условиях, отличных от особой точки (3.6), происходит периодическое изменение ρ_3 между ρ_{31} и ρ_{32} . Значения ρ_{31} и ρ_{32} являются корнями уравнения $\Phi(\rho_3; F_1) = 0$, лежащими на отрезке $0 \leq \rho_3 \leq I_1$. Чем больше значение интеграла F_1^2 отличается от своего максимально возможного значения (3.5), тем в больших пределах происходит изменение величины ρ_3 (следовательно, ρ_1 и ρ_2), тем «глубже» [5] перекачка энергии.

Кривая 1 фиг., б соответствует в случае $I_1 < I_2$ режиму периодической перекачки энергии, причем на этой кривой происходит периодическая «полная» перекачка энергии между третьим и двумя другими осцилляторами, т. е. ρ_3 периодически колеблется между значениями $\rho_3 = 0$ и $\rho_3 = I_1$. При этом ρ_1 периодически колеблется между $\rho_1 = I_1$ и $\rho_1 = 0$, а ρ_2 периодически колеблется между значениями I_2 и $(I_2 - I_1)$. Период этих колебаний дается формулой (3.7), если в качестве цикла взять кривую 1 фиг., б и учесть, что при этом $F_1 = 0$, т. е.

$$\tau = \int_0^{I_1} \frac{d\rho_3}{A \sqrt{\rho_3 (I_1 - \rho_3) (I_2 - \rho_3)}}$$

В случае $I_1 \neq I_2$ эта величина конечна.

Отметим, что движение рассматриваемой системы происходит так, что когда ρ_3 принимает максимальное (или минимальное) значение, величины ρ_1 и ρ_2 одновременно принимают минимальные (или максимальные) значения, соответственно.

4. «Фазовый портрет» в случае $I_1 = I_2$. Этот случай интересен тем, что возникает лимитационный режим. Уравнение для ρ_3 принимает вид

$$\rho_3' = \pm 2A \sqrt{\rho_3 (I_1 - \rho_3)^2 - F_1^2} \quad (4.1)$$

Вид кривых

$$\Phi(\rho_3; F_1) = \rho_3 (I_1 - \rho_3)^2 - F_1^2 \quad (4.2)$$

указан на фиг., в. Кривая 1 фиг., в соответствующая случаю $F_1 = 0$, касается в точке $\rho_3 = I_1$ оси ρ_3 .

В точке

$$\rho_3 = \rho_3^* = I_1 / 3 \quad (4.3)$$

функции $\Phi(\rho_3; F_1)$ достигают максимума на рассматриваемом отрезке $0 \leq \rho_3 \leq I_1$ при любом возможном значении F_1 . При максимальном значении F_1^2 , равном

$$F_1^2 = \rho_3^* (I_2 - \rho_3^*)^2 = 4/27 I_1^3$$

кривая $\Phi(\rho_3; F_1)$ имеет вид кривой 4 фиг., в. Остальные кривые на фиг., в соответствуют промежуточным значениям F_1^2 .

На фиг., г изображены соответствующие кривые на фазовой плоскости (ρ_3, ρ_3') . В рассматриваемом случае имеются две особые точки:

$$\rho_3 = \rho_3^* = 1/3 I_1, \quad \rho_3' = 0 \quad (4.4)$$

$$\rho_3 = I_1, \quad \rho_3' = 0 \quad (4.5)$$

Основное качественное отличие фиг., г от фиг., б, соответствующей случаю $I_1 < I_2$, состоит в появлении особой точки (4.5) и соответственно сепаратрисы (кривая 1 фиг., г). Все кривые на фазовой плоскости, не проходящие через особые точки, являются циклами (фиг., г). Эти циклы соответствуют периодической перекачке энергии между осцилляторами с периодом

$$\tau = \oint \frac{d\rho_3}{2A \sqrt{(I_1 - \rho_3)^2 - F_1^2}}$$

При начальных значениях, соответствующих сепаратрисе ($F_1 = 0$), возникает лимитационное движение. Изображающая точка (фиг., г) придет в особую точку (4.5) за бесконечное время: интеграл (4.6) при $F_1 = 0$ имеет особенность в точке $\rho_3 = I_1$ и расходится. Таким образом, сепаратриса соответствует в нашем случае $I_1 = I_2$ режиму полной перекачке («передаче») энергии двух квазиосцилляторов (ρ_1, φ_1) и (ρ_2, φ_2) в «быстрый» квазиосциллятор (ρ_3, φ_3) (вспомним, что $\beta_3 = \beta_1 + \beta_2$). Перекачка эта длится бесконечно долго.

5. Периодические движения. При начальных условиях, соответствующих особой точке типа центр, как в случае $I_1 < I_2$, так и в случае $I_1 = I_2$, имеет место периодическое движение осцилляторов. Рассмотрим сначала периодическое движение в случае $I_1 < I_2$.

В точке типа центр $(\rho_3 = \rho_3^*, \rho_3' = 0)$ значение ρ_3^* задается выражением (3.4), значение же резонансной фазы ψ таково, что $|\cos \psi| = 1$; поэтому из уравнений (2.4) видно, что

$$\begin{aligned} d\varphi_3 / dt &= -(\beta_3 \pm A \sqrt{\rho_1^* \rho_2^* / \rho_3^*}) \\ \rho_1^* &= I_1 - \rho_3^*, \quad \rho_2^* = I_2 - \rho_3^* \end{aligned} \quad (5.1)$$

Знак перед A выбирается в зависимости от знака $\cos \psi$ (равного в нашем случае плюс 1 или минус 1). Аналогичные уравнения для φ_1 и φ_2 легко получаются из (2.4). Таким образом, точке типа центр соответствуют два типа периодических движений:

$$\begin{aligned} \rho_1(t) &= \rho_1^*, & \varphi_1(t) &= -(\beta_1 \pm A \sqrt{\rho_2^* \rho_3^* / \rho_1^*}) t + \varphi_{10} \\ \rho_2(t) &= \rho_2^*, & \varphi_2(t) &= -(\beta_2 \pm A \sqrt{\rho_1^* \rho_3^* / \rho_2^*}) t + \varphi_{20} \\ \rho_3(t) &= \rho_3^*, & \varphi_3(t) &= -(\beta_3 \pm A \sqrt{\rho_1^* \rho_2^* / \rho_3^*}) t + \varphi_{30} \end{aligned} \quad (5.2)$$

Здесь $\varphi_{10} + \varphi_{20} - \varphi_{30} = \psi_0$, причем $\cos \psi_0 = 1$ для первого типа периодических движений и $\cos \psi_0 = -1$ для второго типа.

Движение изображающей точки в координатах (ρ_3, φ_3) представляет собой движение точки по окружности радиуса $\rho_3 = \rho_3^*$ с постоянной угловой скоростью $-(\beta_3 + A \sqrt{\rho_2^* \rho_3^* / \rho_1^*})$ для одного типа периодических движений, и угловой скорости $-(\beta_3 - A \sqrt{\rho_2^* \rho_3^* / \rho_1^*})$ для другого типа. Аналогичная картина имеется в плоскостях (ρ_1, φ_1) , (ρ_2, φ_2) . Отметим, что частоты в двух различных типах рассматриваемых движений в одном случае больше, а в другом — меньше собственной частоты соответствующего осциллятора. В этих периодических движениях нелинейная связь между осцилляторами сказывается на изменении частоты их колебаний, в то время как величины $\rho_i = \rho_i^*$ ($i = 1, 2, 3$) сохраняются, т. е. нет перекачки энергии.

В случае $I_1 = I_2$ частоты периодических движений, соответствующих центру, выглядят более просто, поэтому периодические решения (5.2) принимают более

простой вид

$$\begin{aligned} \rho_1(t) &= \frac{2}{3} I_1, & \varphi_1(t) &= -(\beta_1 \pm A \sqrt{1/3 I_1}) t + \varphi_{10} \\ \rho_2(t) &= \frac{2}{3} I_1, & \varphi_2(t) &= -(\beta_2 \pm A \sqrt{1/3 I_1}) t + \varphi_{20} \\ \rho_3(t) &= \frac{1}{3} I_1, & \varphi_3(t) &= -(\beta_3 \pm 2A \sqrt{1/3 I_1}) t + \varphi_{30} \\ \varphi_{10} + \varphi_{20} - \varphi_{30} &= \psi_0, & \cos \psi_0 &= +1 \text{ или } -1 \end{aligned} \quad (5.3)$$

При малых отклонениях от начальных условий, соответствующих центру, как в случае $I_1 < I_2$ (фиг., б), так и в случае $I_1 = I_2$ (фиг., г), изображающая точка будет описывать небольшие циклы около центра, т. е. величины ρ_i ($i = 1, 2, 3$) будут совершать малые периодические колебания около ρ_i^* . В случае $I_1 = I_2$ особой точке ($\rho_3 = I_1, \rho_3' = 0$) также соответствует периодическое движение, при котором «движется» лишь один «быстрый» квазиосциллятор

$$\rho_3 = I_1, \quad \varphi_3(t) = -\beta_3 t + \varphi_{30}$$

Однако характер этого периодического движения таков, что при малейшем изменении начальных условий изображающая точка (фиг., г) начнет двигаться по близкому к сепаратрисе циклу, что соответствует «медленной» перекачке энергии между осцилляторами.

Автор благодарит В. В. Румянцева и Л. Г. Хазина за внимание к работе и полезные обсуждения. Пользуясь случаем, автор благодарит В. И. Арнольда, привлечшего внимание автора к работе [5].

Поступила 23 VII 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Хази́н Л. Г., Це́льман Ф. Х. О нелинейном взаимодействии резонирующих осцилляторов. Докл. АН СССР, 1970, т. 193, № 2.
2. Це́льман Ф. Х. О перекачке энергии между нелинейно-связанными осцилляторами в случае резонанса третьего порядка, ПММ, 1970, т. 34, вып. 5.
3. Мосе́р J. Lectures on hamiltonian systems. Mem. Amer. Math. Soc., 1968, vol. 81.
4. Брюно́ А. Д. Нормальная форма дифференциальных уравнений. Докл. АН СССР, 1964, т. 157, № 6.
5. Витт А., Горелик Г. Колебания упругого маятника как пример колебаний двух параметрически связанных линейных систем. Ж. техн. физ., 1933, т. 3, вып. 2, 3.
6. Меттле́р E. Kleine Schwingungen und Methode der säkularen Störungen. Z. angew. Meth. Mech., 1963, Bd. 43, t. 81—85.

О СВЯЗИ РАДИАЛЬНЫХ И ВЕРТИКАЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ ЧАСТИЦ В ЦИКЛИЧЕСКИХ УСКОРИТЕЛЯХ

В. М. Старжинский

(Москва)

Рассматриваются бетатронные колебания частиц в циклических ускорителях со слабой фокусировкой. Уравнения движения частиц записываются в виде системы Ляпунова [1; 2] четвертого порядка. Основываясь на преобразовании систем Ляпунова, предложенном автором [3; 4], уравнения движения сводятся к неавтономному уравнению второго порядка, содержащему малый параметр. При помощи метода малого параметра определяются вертикально-радиальные колебания частиц и описывается переходной процесс от чисто радиальных колебаний к вертикально-радиальным.