ОДНА ТЕОРЕМА О НЕУСТОЙЧИВОСТИ РАВНОВЕСИЯ

Л. Н. Авдонин

(Москва)

Рассмотрим голономную систему, стесненную стационарными связями. Пусть ее кинетическая энергия и силовая функция

$$T = \sum_{s, r=1}^{k} g_{sr} p_s p_r, \qquad U = U(q_1, \ldots, q_k), \qquad (U(0, \ldots, 0) = 0)$$

где $q_1, \ldots, q_k$ — лагранжевы координаты.

Теорема. При выполнении следующих условий:

1) в пространстве q_i существует область A $(U > 0)$, для которой начало координат O есть граничная точка;

2) существует шар B $(q_1^2 + \ldots + q_k^2 \leqslant \lambda)$ столь малого радиуса, что в области $C = A \cap B$ выполняется условие

$$f \equiv \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial U}{\partial q_i} q_i \neq 0$$

3) функции U и g_{sr} непрерывно дифференцируемы в области C; равновесие неустойчиво.

Доказательство. Канонические уравнения Гамильтона примем за уравнения возмущенного движения и рассмотрим функцию [1]

$$V = \sum_{i=1}^{k} q_i p_i$$

производная которой, в силу этих уравнений, имеет вид

$$V^{\cdot} = \sum_{s, r=1}^{k} \left(2g_{sr} - \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial g_{sr}}{\partial q_j} q_j\right) p_s p_r + f$$

Положительная определенность квадратичной формы импульсов в этом выражении, при достаточно малых по абсолютной величине значениях координат q_i, показапа в работе [2]. Пользуясь критерием Сильвестра, можно установить радиус соответствующей окрестности D начала координат пространства q_i.

Будем полагать, что шар B выбран согласно условию $B \subset D$. Значение функции f, определенной в области C в силу условия (3), в некоторой точке $M \in C$ совпадает по знаку со значением взятой в этой точке производной функции U по направлению луча OM. Но U вдоль луча OM — функция одного переменного и, обращаясь в нуль в точке $L \in B$ пересечения луча OM с границей области A, положительна в точке M.

Отсюда по теореме о среднем, вытекает существование точки $N \in LM$, в которой $f > 0$. Тогда, в силу условия (2), непрерывная функция f сохраняет знак в области C. Следовательно, $V^{\cdot}$ — положительная функция координат и импульсов, пока координаты изменяются так, что точка, изображающая движение в пространстве q_i, принадлежит области C. Но эта точка не может покинуть область C через границу области A, если в начальный момент времени положить все $p_i = 0$, а координаты выбрать в области C согласно условию $U_0 = \varepsilon$. В силу консервативности системы, будет выполняться неравенство $U \geqslant U_0$.

Функция f на компакте $(U \geqslant \varepsilon) \cap B$ достигает своего наименьшего положительного значения l. Из равенства

$$V = \int_{t_0}^{t} V^{\cdot} dt$$

вытекает

$$V > l\,(t - t_0)$$

Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$, найдется такое l, что неравенство

$$\lambda < V = \sum_{i=1}^{k} p_i q_i \leqslant \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k} (p_i^2 + q_i^2)$$

выполняется не позже, чем в момент времени

$$t = t_0 + \lambda \,/\, l$$

Это и означает неустойчивость по Ляпунову [1]. Таким образом, классические методы [1,2] оказываются применимыми в более общих задачах.

Пример 1. Рассмотрим математический маятник, состоящий из невесомого стержня, несущего на одном конце материальную точку и закрепленного другим концом посредством плоского шарнира в неподвижной точке. Пусть θ — угол отклонения стержня от вертикали, отсчитываемый по часовой стрелке.

Предположим, что маятник снабжен спиральной пружиной, расположенной в плоскости его качания. Внутренний конец пружины заделан неподвижно, а внешний связан с маятником посредством крючка так, что при $\theta < 0$ маятник с пружиной не связан, а при $\theta \geqslant 0$ — связан. Момент, развиваемый пружиной, примем равным $M = -k^2\theta$.

Силовая функция

$$U = \begin{cases} mgl\,(1 - \cos\theta) - {}^1\!/_2 k^2\theta^2, & \theta \geqslant 0 \\ mgl\,(1 - \cos\theta), & \theta < 0 \end{cases}$$

в исследуемом положении равновесия $\theta = 0$ терпит разрыв второй производной.

Пример 2. Рассмотрим движение материальной точки вдоль прямой по закону

$$\theta^{\cdot\cdot} = \varphi(\theta) = \begin{cases} -\theta^2, & \theta < 0 \\ \theta \sin\theta^{-1}, & \theta \geqslant 0 \end{cases}$$

Силовая функция

$$U = \int_0^{\theta} \varphi(\theta)\, d\theta$$

как и в примере 1, при $\theta < 0$ удовлетворяет условиям данного рассмотрения, утверждающего (очевидную здесь непосредственно) неустойчивость равновесия.

Поступила 4 XI 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. М.— Л., Гостехиздат, 1950.
2. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М., Изд-во АН СССР, 1962.
3. Hagedorn P. Zur Umkehrung des Satres von Iagrange über die Stabilität. ZAMP, 1970, vol. 21, No 5.

[1] После сдачи данной заметки в печать, автору стала известна статья [3], в которой показана неустойчивость равновесия системы с двумя степенями свободы в том случае, когда аналитическая силовая функция имеет минимум в положении равновесия.