Прикладная математика и механика. Том 35, 1971

О РАСПРОСТРАНЕНИИ УДАРНЫХ ВОЛН В УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЕ С УПРОЧНЕНИЕМ

А. Е. Лимарев, А. Д. Чернышов

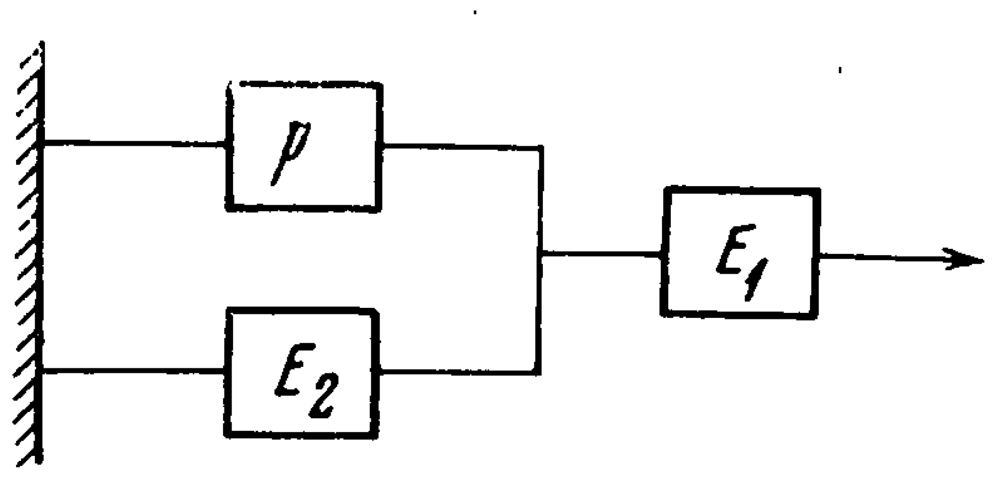
(Воронеж)

Исследуется задача о распространении ударных волн в упруго-пластической среде с трансляционным упрочнением [1].

Для многих реологических материалов не удается получить замкнутой системы уравнений в скачках [2]. В работе [3] показывается, что в таких случаях замкнуть систему уравнений в разрывах можно при помощи рассмотрения структуры ударного слоя. Это приводит к необходимости совместного решения задач о распространении и структуре ударных волн.

В задаче о структуре волны изменение разрывных величин внутри переходного слоя описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Условия существования и единственности переходных решений подобных систем достаточно изучены [1] и предполагаются выполненными.

Точное решение совместных задач о распространении и структуре затруднительно, поэтому для упрощения предлагается считать линейной зависимость между «разрывными» функциями внутри переходного слоя. Ниже на основании этого метода удается получить замкнутую систему уравнений в скачках для упруго-пластической среды и исследовать свойства ударных волн.



Фиг. 1

1. Материал предполагается пластически несжимаемым, его реологическая модель изображена на фиг. 1. Зависимость между напряжениями s_{ij}^1, s_{ij}^2 и деформациями e_{ij}^1, e_{ij}^2 на первом и втором элементах упругости соответственно запишем в виде закона Гука

$$s_{ij}^1 = \lambda_1 e_{kk}^1 \delta_{ij} + 2\mu_1 e_{ij}^1, \quad s_{ij}^{*2} = 2\mu_2 e_{ij}^{*2} \tag{1.1}$$

Здесь λ_1, μ_1 и μ_2 — упругие постоянные; звездочка вверху обозначает девиаторную часть тензора.

На элементе пластичности напряжения s_{ij}^p и скорость деформации ε_{ji}^p связаны ассоциированным законом течения [1]

$$\varepsilon_{ij}^p{}^* = \frac{\partial\varphi}{\partial t} s_{ij}^p{}^*, \qquad \varepsilon_{kk}^p = 0 \tag{1.2}$$

Напряжения $s_{ij}^p{}^*$ удовлетворяют условию пластичности Мизеса

$$s_{ij}^p{}^* s_{ij}^p{}^* = 2k^2 \qquad (k \text{ — предел текучести}) \tag{1.3}$$

[1] Любарский Г. Я. Диссертация, М., 1965.

Так как элементы P и E_2 соединены параллельно, то деформации на этих элементах совпадают

$$e_{ij}^p = e_{ij}^2 \tag{1.4}$$

Деформация e_{ij} и скорость деформаций среды ε_{ij} складываются из деформаций и скорости деформаций на элементах P и E_1, т. е.

$$e_{ij} = e_{ij}^p + e_{ij}^1, \qquad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^p + \varepsilon_{ij}^1 \tag{1.5}$$

Напряжение в среде σ_{ij} совпадает с напряжением на элементе E_1, которое равно сумме напряжений на элементах P и E_2

$$\sigma_{ij} = s_{ij}^1 = s_{ij}^2 + s_{ij}^p \tag{1.6}$$

Совместное решение системы уравнений (1.1), (1.2), (1.4) — (1.6) относительно σ_{ij}, e_{ij} и ε_{ij} приводит к уравнениям

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^*}{\partial t} = 4(\mu_1\mu_2 e_{ij}^* - \mu_0\sigma_{ij}^*)\frac{\partial \varphi}{\partial t} + 2\mu_1\varepsilon_{ij}^* \tag{1.7}$$

$$\sigma_{kk} = (3\lambda_1 + 2\mu_1)e_{kk}, \qquad 2\mu_0 = \mu_1 + \mu_2$$

Условие пластичности приводится к выражению

$$\left(\sigma_{ij}^* - \frac{\mu_1\mu_2}{\mu_0}e_{ij}^*\right)\left(\sigma_{ij}^* - \frac{\mu_1\mu_2}{\mu_0}e_{ij}^*\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{k\mu_1}{\mu_0}\right)^2 \tag{1.8}$$

Перемещения частиц u_i, скорость v_i, тензор малых деформаций e_{ij} и тензор скорости деформаций ε_{ij} связаны соотношениями

$$v_i = \partial u_i / \partial t, \qquad e_{ij} = {}^1/_2(u_{i,j} + u_{j,i}) \tag{1.9}$$

$$\varepsilon_{ij} = \partial e_{ij} / \partial t = {}^1/_2(v_{i,j} + v_{j,i})$$

Пусть в сплошной среде распространяется поверхность сильного разрыва Σ со скоростью G.

Структуру переходного слоя ударной волны можно описать введением дополнительных вязких свойств сплошной среды, которые не проявляются вне ударного слоя. Тогда внутри переходного слоя определяющие уравнения получим из (1.7) и (1.8), заменяя σ_{ij} на разность $\sigma_{ij} - d_{ij}$, где d_{ij} — тензор напряжений, обусловленный дополнительными вязкими свойствами. Однако на уровне линейной аппроксимации зависимости между разрывными величинами ударной волны напряжения d_{ij} не вносят вклад в уравнения для разрывов [3]. Поэтому внутри переходного слоя будут использоваться определяющие уравнения (1.7) и (1.8).

Если f и ψ — две разрывные функции, то внутри переходного слоя между ними будет использоваться линейная зависимость

$$f(\psi) = f^+ + \frac{\psi - \psi^+}{[\psi]}[f], \qquad [f] = f^+ - f^- \tag{1.10}$$

Знак плюс или минус вверху означает, что значение разрывной величины берется перед или за фронтом ударной волны соответственно.

Зависимость (1.10) позволяет записать первое уравнение (1.7) в скачках. Для этого проинтегрируем его поперек переходного слоя от заднего до переднего ударного фронта

$$\int_{x_n^-}^{x_n^+}\left(\frac{\delta\sigma_{ij}^*}{\delta t}-G\frac{\partial\sigma_{ij}^*}{\partial x_n}\right)dx_n-2\mu_1\int_{x_n^-}^{x_n^+}\left(\frac{\delta e_{ij}^*}{\delta t}-G\frac{\partial e_{ij}^*}{\partial x_n}\right)dx_n=$$

$$=4\int_{x_n^-}^{x_n^+}\left(\frac{\delta\varphi}{\delta t}-G\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\right)(\mu_1\mu_2e_{ij}^*-\mu_0\sigma_{ij}^*)\,dx_n \qquad (1.11)$$

Здесь x_n — нормальная координата к переходному слою, x_n^+ и x_n^- — координаты переднего и заднего ударных фронтов соответственно. С учетом свойства дельта-производной по времени левая часть выражения (1.11) интегрируется с точностью до малых высшего порядка. Правая часть тоже может быть проинтегрирована, если использовать соотношение (1.10). После указанных преобразований получим искомое соотношение в разрывах

$$[\sigma_{ij}^*]-2\mu_1[e_{ij}^*]=2[\varphi]\{2\mu_1\mu_2e^{*+}_{ij}-2\mu_0\sigma^{*+}_{ij}-\mu_1\mu_2[e_{ij}^*]+$$
$$+\mu_0[\sigma_{ij}^*]\}+\ldots \qquad (1.12)$$

Точками в (1.12) обозначены малые члены, содержащие скачки в степени выше второй.

Из второго уравнения в (1.7) и из условия пластичности (1.8) находим

$$[\sigma_{kk}]=(3\lambda_1+2\mu_1)[e_{kk}] \qquad (1.13)$$

$$\left[\sigma_{ij}^*-\frac{\mu_1\mu_2}{\mu_0}e_{ij}^*\right]\left\{2\left(\sigma_{ij}^*-\frac{\mu_1\mu_2}{\mu_0}e_{ij}^*\right)^+-\left[\sigma_{ij}^*-\frac{\mu_1\mu_2}{\mu_0}e_{ij}^*\right]\right\}=0 \qquad (1.14)$$

Замыкают систему уравнений (1.12) — (1.14) кинематические и динамические условия совместности разрывов

$$[\sigma_{ij}]\nu_j=-\rho^+G[v_i],\qquad [u_{i,j}]=\omega_i\nu_j,\qquad [v_i]=-G\omega_i \qquad (1.15)$$

где ν_i — нормаль к поверхности разрывов.

Из (1.15) можно получить вспомогательные соотношения

$$[\sigma_{ij}^*]\nu_i\nu_j=(\rho^+G^2-\lambda_1-{}^2/_3\,\mu_1)\,\omega_n \qquad (1.16)$$
$$[e_{ij}^*]\nu_i\nu_j={}^2/_3\,\omega_n,\qquad \omega_n=\omega_i\nu_i$$

Умножая (1.12) на $\nu_i\nu_j$ и используя (1.16), получим

$$2[\varphi]=F_1\omega_n(\mu_0\omega_nF_2-\mu_1s^{p\,+}_{nn})^{-1} \qquad (1.17)$$

$$F_1=\rho^+G^2-\lambda_1-2\mu_1,\ F_2=\rho^+G^2-\lambda_1-{}^2/_3\,\mu_1(1+\mu_2/\mu_0)$$

Индекс n в (1.17) означает направление нормали. Здесь и в дальнейшем по этому индексу при повторении не суммировать.

Величина φ характеризует необратимые пластические деформации сплошной среды. Если скачок этой величины на ударной волне равен нулю, то пластические деформации непрерывны, и такая поверхность сильного разрыва называется нейтральной. Из (1.17) видно, что $[\varphi]=0$, если $\rho^+G^2=\lambda_1+2\mu_1$ или когда $\omega_n=0$. Если $\omega_n=$

$= 0$ и $[\varphi] = 0$, то из (1.12) и (1.15) следует, что $\rho^+G^2 = \mu_1$, т. е. нейтральные ударные волны в упруго-пластической среде с упрочнением так же, как и в упруго-пластической среде [3], могут распространяться только с двумя различными скоростями.

Из (1.17) видно, что в общем случае $[\varphi]$ зависит от ω_n. В частном случае $s_{nn}^{p*+} = 0$ величина $[\varphi]$ не зависит от ω_n и выражается через скорость ударной волны. Этот случай будет исследоваться ниже.

Разрешая уравнение (1.12) относительно $[\sigma_{ij}{}^*]$, получим

$$[\sigma_{ij}{}^*] = \{\mu_1 (1 - \mu_2 [\varphi]) (\omega_i \nu_j + \omega_j \nu_i - {}^2/_3\, \omega_n \delta_{ij}) - \\ - 2 [\varphi] \mu_1 s_{ij}^{p*+}\} (1 - 2\mu_0 [\varphi])^{-1} + \ldots \tag{1.18}$$

Подстановка (1.13) и (1.18) в (1.15) приводит к уравнению

$$\{\rho^+G^2\omega_i - (\lambda_1 + {}^2/_3\, \mu_1)\, \omega_n \nu_i\} (1 - 2\mu_0 [\varphi]) = \\ = \mu_1 (1 - \mu_2 [\varphi]) (\omega_i + {}^1/_3\, \omega_n \nu_i) - 2 s_{ni}^{p*+} \mu_1 [\varphi] + \ldots \tag{1.19}$$

Исключим $[\varphi]$ из (1.19) при помощи (1.17)

$$F_1 \{[2\lambda_1\mu_0 + {}^1/_3\, \mu_1 (\mu_2 + 4\mu_0)]\, \omega_n{}^2 \nu_i + (\mu_1\mu_2 - 2\mu_0\rho^+G^2)\, \omega_n\omega_i\} + 2\mu_1 s_{ni}^{p*+} F_1 \omega_n = \\ = 2 (\mu_0\omega_n F_2 - \mu_1 s_n^{p*+}) \{(\lambda_1 + \mu_1)\, \omega_n \nu_i - F_3 \omega_i\} + \ldots \tag{1.20}$$

$$F_3 = \rho^+G^2 - \mu_1$$

Среди трех уравнений (1.20) лишь два независимых. Для упрощения дальнейших вычислений введем локальную систему координат с началом, движущимся вместе с поверхностью разрыва Σ; ось x_3 направим по нормали к Σ. Полагая $i = \alpha$ ($\alpha = 1, 2$), получим

$$F_1 (\mu_1\mu_2 - 2\mu_0\rho^+G^2)\, \omega_3\omega_\alpha + F_1\mu_1\omega_3 s_{3\alpha}^{p+} + 2F_3 (\mu_0\omega_3 F_2 - \mu_1 s_{33}^{p**})\, \omega_\alpha = 0 \tag{1.21}$$

Отсюда ω_α выражается через ω_3. Исключение $[\varphi]$, ω_α и $[\sigma_{ij}{}^*]$ из (1.14) при помощи (1.21), (1.17) и (1.18) приводит к уравнению четвертой степени относительно ρ^+G^2. Опуская промежуточные вычисления, запишем окончательный вид этого уравнения

$$AF_3 \{3\mu_1{}^2 F_1 s_{\alpha 3}^{p+} s_{\alpha 3}^{p+} s_{33}^{p*+} + 3\mu_1{}^2 F_3 (s_{33}^{p*+})^3 + 6k^2\mu_0 F_3 F_1 s_{33}^{p*+} - \mu_1{}^3 \omega_3 F_4 (s_{3\,3}^{p*+})^2 - \\ - 6\mu_0\mu_1\omega_3 F_1 F_2 s_{\alpha 3}^{p+} s_{\alpha 3}^{p+} - 6\mu_0\mu_1\omega_3 F_2 F_3 (s_{33}^{p*+})^2 - k^2\mu_0\mu_1\omega_3 F_1 F_4\} = 0 \tag{1.22}$$

$$A = \mu_0 F_2 \omega_3 - \mu_1 s_{33}^{p*+}, \qquad F_4 = \rho + G^2 + 3\lambda_1 + 2\mu_1$$

Первый корень этого уравнения $\rho^+G^2 = \mu_1$ соответствует поперечной нейтральной волне, на которой отсутствует разрыв пластических деформаций и $[\varphi] = 0$. Более подробно такие волны будут исследованы ниже.

Приравнивая нулю множитель A, найдем другой корень для ρ^+G^2. Но такая ударная волна не может реализоваться, так как в противном случае $[\varphi] \to \infty$, что невозможно.

Для нахождения двух оставшихся корней уравнения (1.22) приравняем нулю выражение в фигурной скобке и получим квадратное уравнение. Следовательно, в трехмерной упруго-пластической среде с упрочнением возможны две ударные пластические волны. В случае ударных волн очень малой интенсивности указанные поверхности разрывов распространяются со скоростями

$$\rho^+G_{1,2}^2 = \frac{1}{2}\lambda_1 + \frac{3}{2}\mu_1 - \frac{\mu_1^2}{4\mu_0 k^2} s_{i3}^{p*+} s_{i3}^{p*+} \pm \frac{1}{2}\left\{\left[\lambda_1 + \mu_1 + \frac{\mu_1^2}{2\mu_0 k^2}(s_{\alpha 3}^{p+} s_{\alpha 3}^{p+} - (s_{33}^{p*+})^2)\right]^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{\mu_1^4}{\mu_0^2 k^4} s_{\alpha 3}^{p+} s_{\alpha 3}^{p+} (s_{33}^{p*+})^2\right\}^{1/2} \qquad (1.23)$$

2. Рассмотрим частные случаи.

1°. *Нейтральные волны.* На нейтральных ударных волнах компоненты пластических деформаций непрерывны, что выражается условием $[\varphi] = 0$. Тогда из (1.17) получим два возможных случая

$$\omega_3 = 0, \quad \rho^+G^2 = \lambda_1 + 2\mu_1$$

Для этих случаев из (1.18) и (1.15) имеем соответственно

$$\rho^+G^2 = \mu_1, \qquad \omega_3 \neq 0; \qquad \omega_3 = 0, \quad \omega_\alpha = 0$$

Таким образом, нейтральные волны имеют свойства упругих волн.

Напряженное состояние перед и за ударной волной должно удовлетворять условию пластичности (1.14), которое при помощи (1.18) приводится к виду

$$(s_{i3}^{p*+} + s_{i3}^{p*-})\,\omega_i = 0 \qquad (2.1)$$

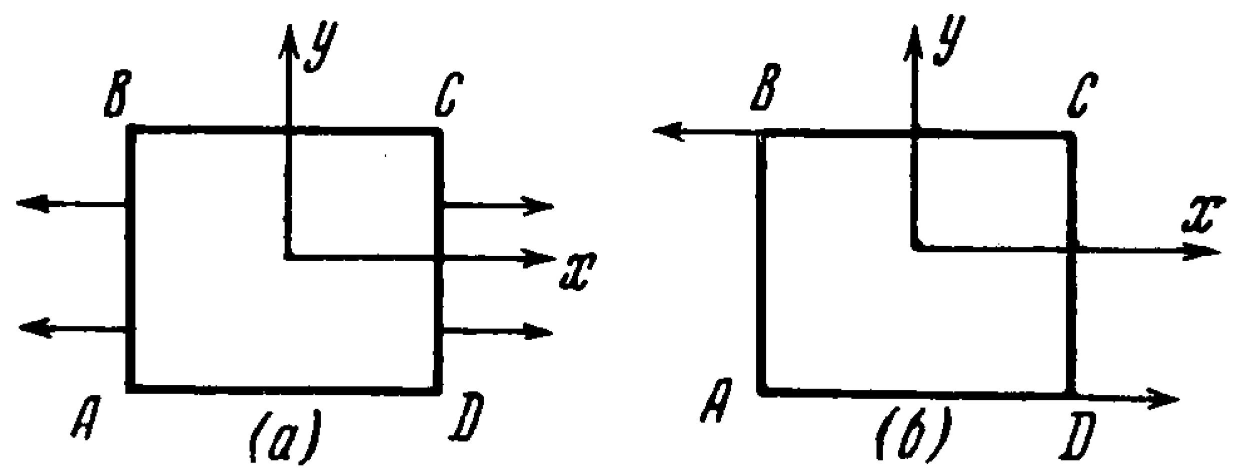
Это условие означает, что вектор среднего напряжения на элементе пластичности на элементарной площадке поверхности разрывов ортогонален вектору разрыва скорости. Для очень слабых ударных волн, когда можно пренебречь квадратами скачков ω_i, условие (2.1) упрощается

$$s_{i3}^{p*+}\omega_i = 0 \qquad (2.2)$$

Можно доказать и обратное: если выполняется условие (2.1), то ударная волна нейтральная. Для доказательства достаточно подставить (1.18) в (1.14) и воспользоваться условием (2.5). После этого получим $[\varphi] = 0$.

Рассмотрим два простейших нагружения прямоугольной платины $ABCD$ (фиг. 2, *а*, *б*). Материал пластины — упруго-пластический. Тогда условие (2.2) примет вид

$$\sigma_{i3}^{*+}\omega_i = 0 \qquad (2.3)$$



Фиг. 2

В случае (*а*) пластина растягивается некоторыми усилиями, приложенными к граням AB и CD. В случае (*б*) к граням пластины BC и AD приложены сдвиговые напряжения. В обоих случаях и упругая и пластическая части деформации в каждой точке пластины одинаковы. Внезапно приложим малую нагрузку к грани AD по нормали или к грани AB вдоль нее. В случае (*а*) для обоих экспериментов будет выполнено условие (2.3), и поэтому по пластине будет распространяться нейтральная ударная волна, продольная в первом случае и поперечная во втором. В случае (*б*) возникнут продольные нейтральные волны, если произвести нормальный удар по грани AB или AD.

2°. *Сферическая симметричность напряженного состояния на поверхности разрывов.* В этом случае справедливы равенства

$$s_{11}^{p*} = s_{22}^{p*} = -\frac{1}{2}s_{33}^{p*} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}k, \qquad s_{12}^p = s_{13}^p = s_{23}^p = 0, \qquad \omega_\alpha = 0 \qquad (2.4)$$

Последнее равенство из (2.4) свидетельствует, что ударная волна будет безвихревой. Из (1.23) вытекает, что одна слабая пластическая волна вырождается в поперечную нейтральную волну, а другая распространяется со скоростью

$$\rho^+G^2 = \lambda_1 + 2\mu_1 - {}^2/_3\, \mu_1{}^2\mu_0{}^{-1} \tag{2.5}$$

Из ассоциированного закона течения (1.2) и (1.18) получаем

$$[e_{11}^p] = \frac{s_{11}^{p*}\omega_3}{\mu_2\omega_3 - 3s_{11}^{p*}} = [e_{22}^p] = -\frac{1}{2}[e_{33}^p] \approx -\frac{1}{3}\omega_3$$

$$[e_{12}^p] = [e_{13}^p] = [e_{23}^p] = 0$$

3°. *Случай* $s_3^{p*+} = 0$. Из (1.22) находим, что одна пластическая волна вырождается в продолную нейтральную, а другая будет распространяться со скоростью

$$\rho^+G^2(s_{\alpha3}^{p+}s_{\alpha3}^{p+} + {}^1/_6k^2) = (\lambda_1 + {}^2/_3\mu_1)(s_{\alpha3}^{p+}s_{\alpha3}^{p+} - {}^1/_2k^2) + {}^2/_3\,\mu_1\mu_2\mu_0^{-1}s_{\alpha3}^{p+}s_{\alpha3}^{p+} \tag{2.6}$$

Величина $s_{\alpha3}^{p+}s_{\alpha3}^{p+}$ может изменяться в пределах от нуля до k^2. При некотором значении этой величины скорость ударной волны обращается в нуль, а при меньших значениях правая часть (2.6) будет отрицательной, и эта поверхность сильных разрывов становится невозможной.

Скорость звуковой волны для данного случая найдется из (1.23) в виде

$$\rho^+G^2 = \mu_1 - {}^1/_2\mu_1{}^2\mu_0^{-1}k^{-2}s_{\alpha3}^{p+}s_{\alpha3}^{p+} \tag{2.7}$$

Из сравнения (2.6) и (2.7) вытекает, что ударная волна (2.6) не переходит в соответствующую звуковую волну, когда интенсивность ударной волны стремится к нулю.

Если $s_{\alpha3}^{p+}s_{\alpha3}^{p+} = k^2$, что возможно только при условии $s_{11}^{p*+} = s_{22}^{p*+} = s_{33}^{p*+} = 0$, то, из (2.7) для скорости распространения эквиволюминальной волны найдем $\rho^+G^2 = \mu_1\mu_2(\mu_1 + \mu_2)^{-1}$.

Существование этой волны обусловлено наличием упругих свойств и свойств упрочнения одновременно. Если материал хотя бы одним из указанных свойств не обладает, то такая волна распространяться не может.

На распространение ударных волн накладывает ограничение второй закон термодинамики, согласно которому диссипация энергии за счет пластического течения неотрицательна

$$\varepsilon_{ij}^{p*}s_{ij}^{p*} = 2k^2\partial\varphi/\partial t \geqslant 0 \tag{2.8}$$

Отсюда можно получить ограничение на разрыв нормальной компоненты скорости. Для этого интегрируем (2.8) поперек переходного слоя от $-h$ до $+h$. Так как интегрирование проводится по возрастанию аргумента, знак неравенства сохранится. Тогда из (2.8) получим $[\varphi] \leqslant 0$. Подставляя это неравенство в выражение (1.17), считая ω_n малым, найдем $\omega_n s_{nn}^{p*+} \leqslant 0$. Это неравенство указывает на то, что в области растяжения материала возможна только ударная волна разряжения, а в области сжатия — только волна сжатия. Следует заметить, что знак равенства здесь соответствует нейтральной ударной волне.

Поступила 20 III 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Ивлев Д. Д. Теория идеальной пластичности. «Наука», 1966.
2. Thomas T. Plastic flow and fracture in solids. New — York — London, Acad. Press., 1961 (Русск. перев.: Пластическое течение и разрушение в твердых телах. «Мир.», 1964).
3. Чернышов А. Д. О распространении ударных волн в упруго-пластической среде. ПММ, 1969, т. 33, вып. 1