

ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ УРАВНЕНИЯ ПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ СЫПУЧЕЙ СРЕДЫ

В. Н. Николаевский

(Москва)

Тензорно-линейные соотношения между напряжениями и скоростями деформаций в изотропном пластическом материале содержат две независимые скалярные функции. Для их определения предлагается использовать два независимых предельных условия: одно из них формулируется в пространстве напряжений (одна из форм условия Кулона), другое — в пространстве скоростей деформаций (дилатационное соотношение). Учитывается деформационное упрочнение, рассмотрена задача о сдвиговой деформации слоя песка, проводится сравнительное обсуждение предлагаемых определяющих уравнений. Для простоты анализ ограничен плоским движением.

1. Исходные представления. Рассматривается среда, сложенная из сплошных малоупругих частиц (гранул). При приложении нагрузок среда деформируется так, что доминирующую роль играют деформации, связанные с относительным проскальзыванием гранул. В этом случае на контактах между гранулами действуют силы сухого трения, подчиняющиеся закону Кулона

$$|R| = N \operatorname{tg} \vartheta \quad (1.1)$$

где N , R — нормальная (сжимающая) и касательная компоненты сил, действующих на поверхности проскальзывания, ϑ — истинный (между частицами) угол сухого трения.

Хотя в микромасштабе в силу проскальзываний гранул поле скоростей содержит множество тангенциальных разрывов, введем непрерывное поле средних скоростей $u_i(x_j, t)$. Тогда распределение относительных скоростей Δu_i частиц, отстоящих друг от друга на расстоянии l в окрестности макроточки x_j (учет вращения окрестности как жесткого целого для дальнейшего анализа несуществен), характеризуется тензором скоростей деформации ε_{ij} , вычисляемым по скоростям смещений $u_i(x_j, t)$ обычным образом [1]

$$\varepsilon_{ij} = 1/2 (\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i) \quad (1.2)$$

Действительно

$$\Delta u_i = u_i(x_j + l_j, t) - u_i(x_j, t) = \sum_j \varepsilon_{ij} l_j \quad (1.3)$$

Эти относительные перемещения обуславливаются действием напряжений σ_{ij} .

Будем искать связи $\sigma_{ij} = f(\varepsilon_{ij}; \varphi, \Lambda, \chi, \dots)$, определяющие механическое поведение сыпучей среды при ее пластическом деформировании.

Здесь φ , Λ , χ ... — неопределенные параметры состояния среды. Отыскание связи между тензорами напряжений σ_{ij} и скоростей деформаций ε_{ij} соответствует методам инкрементальной теории пластичности [1,2].

Исходной для последующего будет изотропная тензорно-линейная связь между σ_{ij} и ε_{ij} , модифицированная для случая плоской задачи

$$\varepsilon_{ij} = 2\lambda (\sigma_{ij} + p\delta_{ij}) - \zeta (2H + 2p) \delta_{ij} \quad (1.4)$$

где H — некоторая, пока неопределенная величина размерности напряжения. Связь (1.4) включает в себя [3,4] два независимых скаляра λ , ζ , характерных для пластического материала. Они могут быть функциями параметров состояния — инвариантов тензора σ_{ij} и других параметров, в том числе упрочнения [1], если эффект упрочнения существует.

Будем считать, что функции λ , ζ отличны от нуля, если выполнены два предельных условия [3,4].

В отличие от работ [3,4] только одно из условий будем формулировать для компонент тензора напряжений; второе составим для компонент тензора скоростей деформаций [5].

В качестве первого условия воспользуемся традиционным для теории пластичности условием текучести (нагружения)

$$\Phi_\sigma(p, T; \varphi, c, \dots) = 0 \quad (1.5)$$

$$p = -1/2(\sigma_{11} + \sigma_{22}), \quad T = 1/2 \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2}$$

считая входящие в него параметры φ , c , ... функциями параметра упрочнения χ .

Второе предельное условие носит кинематический характер; зададим его в виде соотношения типа

$$\Phi_\varepsilon(\varepsilon, \gamma; \Lambda, \dots) = 0 \quad (1.6)$$

$$\varepsilon = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}, \quad \gamma = \sqrt{(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})^2 + 4\varepsilon_{12}^2}, \quad \Lambda = \Lambda(\chi)$$

Условие (1.6) означает, что приращения объема и сдвига взаимосвязаны [6], а это отражает эффект дилатансии, выявленный экспериментально для сыпучих сред Рейнольдсом [7].

Теперь рассмотрим плоскость напряжений (по оси абсцисс отложим давление p , а по оси ординат — интенсивность касательных напряжений T). Каждому пластическому состоянию будет соответствовать точка, находящаяся на одной поверхности из семейства поверхностей текучести (1.5). Будем откладывать также по оси абсцисс пластическую объемную деформацию ε , а по оси ординат — пластический сдвиг γ . Тогда условие (1.6) связывает между собой проекции вектора приращения пластической деформации $d\varepsilon = \varepsilon dt$ и $d\gamma = \gamma dt$, т. е. определяет ориентацию вектора $d\varepsilon_{ij}$ в рассматриваемой точке относительно поверхности текучести (1.5).

Здесь следует подчеркнуть, что по известному условию (1.6) можно найти поверхность, к которой вектор $d\varepsilon_{ij}$ будет ортогонален, т. е. найти пластический потенциал Ψ , соответствующий выбранному кинематическому условию. Соответствующая экви-

потенциаль не обязательно должна совпадать с поверхностью текучести (1.5). Поэтому кинематическое условие (1.6) гораздо шире требования нормальности вектора de_{ij} к поверхности текучести, т. е. той частной формы ассоциативного закона, которая широко применяется в теории пластичности и, в частности, в механике грунтов. Кинематическое условие (1.6) соответствует общей форме ассоциативного закона [2].

При подстановке соотношения (1.4) в кинематическое условие (1.6) последнее преобразуется к виду

$$\Phi_\varepsilon(\varepsilon_{ij}(\sigma_{ij})) = \Phi_\varepsilon(\sigma_{ij}; \lambda', \zeta', H) = 0 \quad (1.7)$$

что позволяет выразить ζ' через λ' либо непосредственно, либо с использованием условия текучести (1.5). В последнем случае связь между λ' и ζ' , а также величина H подбираются из требования

$$\Phi_\varepsilon(\sigma_{ij}; \lambda', \zeta', H) \equiv \Phi_\sigma(\sigma_{ij}) = 0$$

В теории пластичности, развитой применительно к деформированию металлов, выдвигается требование пластической несжимаемости $\varepsilon = 0$, которое и служит одним из возможных кинематических условий (1.6). Отсюда сразу следует, что $\zeta' \equiv 0$. Если $\Phi_\sigma = T - \text{const} = 0$, то оказывается, что вектор de_{ij} имеет только одну, отличную от нуля, проекцию $d\gamma$ и ортогонален поверхности текучести [8].

В работах [3, 4] вводились множители ζ' , λ' , и для их определения искались два предельных условия, однако оба в пространстве напряжений, что и не привело к успеху. В работе [6] указывалось, что в дилатирующих средах независимым оказывается лишь один множитель λ' , и вводились пластические деформации, приращения объема которых пропорциональны приращениям сдвига.

Применение дилатансионной связи (в пространстве ε_{ij}) в явном виде для выражения одного из параметров λ' , ζ' через другой было предложено в работах [5, 9]. В работах [10, 11] обращалось внимание на наличие нескольких независимых скалярных функций в определяющих связях для грунтов, но не выдвигалось условие общего типа, дополняющего условие текучести (2.4). С другой стороны, вводился [12, 13] частный вид дилатансионной связи (1.6), но пути ее использования для расшифровки определяющих связей найдено не было.

2. Конкретизация предельных условий. Будем использовать в качестве условия (1.5) текучести (нагружения) условие Кулона

$$\Phi_\sigma = 1/2 \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2} + 1/2 (\sigma_{11} + \sigma_{22}) \sin \varphi - c \cos \varphi = 0 \quad (2.1)$$

где φ — эффективный угол внутреннего трения, а c — сцепление, которые являются функциями параметра упрочнения. В пространстве pT поверхность (3.1) представляет собой прямую Мора — Кулона, наклон которой к оси p равен $\sin \varphi$.

Результаты известных экспериментальных работ о деформационных свойствах сыпучих сред (песка, щебня и др.) говорят о следующем. Прежде всего, на плоскости напряжений pT имеется область, примыкающая к оси давлений p , в которой среда ведет себя упруго (или, по крайней мере, необратимая часть деформаций не превосходит упругой части). Эта область отделяется от области преимущественно необратимых деформаций начальной поверхностью текучести $\Phi_\sigma = 0$. В большинстве работ утверждается, что эта поверхность (по крайней мере, в значительной своей части) представляет собой прямую Мора — Кулона (см. ниже п. 3). Что касается характера этих больших необратимых деформаций, то рыхлые пески при сдвиге уплотняются до некоторого предела, соответствующего критическому состоянию, при котором среда становится пластически несжимаемой. Плотные пески, наоборот, при сдвиге разрых-

ляются до критического состояния. По-видимому, при критическом состоянии сдвиговые деформации растут неограниченно, т. е. происходит разрушение. По ходу необратимого уплотнения (разрыхления) среды поверхность текучести Φ_σ (нагружения) меняется так, что точка соответствующего пластического состояния все время находится на мгновенной поверхности нагружения.

В качестве кинематического предельного условия (1.6) будем использовать [5] дилатансионное ограничение

$$\Phi_\varepsilon = (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) - \Lambda \sqrt{(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})^2 + 4\varepsilon_{12}^2} = 0 \quad (2.2)$$

где $\Lambda(\chi)$ — эффективная скорость дилатансии.

Примем, что параметром упрочнения χ является необратимая объемная деформация или плотность (подобная замена возможна в случае жесткопластической модели). Таким образом, упрочнение здесь считается изотропным.

Если условия (2.1), (2.2) не выполнены, то среда является жесткой. Скорость пластических деформаций ε_{ij} сыпучей среды отлична от нуля, т. е. $\lambda \neq 0$, $\zeta \neq 0$, если выполнены условия (2.1), (2.2) одновременно. Подстановка соотношений (1.4) в дилатансионную связь (2.2) приводит к соотношениям

$$\lambda \Lambda \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2} - \zeta (\sigma_{11} + \sigma_{22} - 2H) = 0$$

Требование совпадения последнего с предельным условием Кулона (2.2) приводит к зависимостям

$$\zeta = -\lambda \Lambda \sin \varphi, \quad H = c \operatorname{ctg} \varphi \quad (2.3)$$

Отсюда определяющие уравнения (1.4), будучи записанными относительно приращений de_{ij} деформаций, т. е. в форме, обычной для пластически упрочняющихся моделей, принимают вид

$$de_{ij} = 2(\sigma_{ij} + (1 + \Lambda \sin \varphi) p \delta_{ij} + c \Lambda \cos \varphi \delta_{ij}) d\lambda \quad (2.4)$$

Здесь уже фигурирует приращение лишь одной дополнительной скалярной функции $d\lambda$. Как обычно, $d\lambda = 0$ при $\Phi_\sigma < 0$, а также при нейтральном нагружении: $d\lambda > 0$ при активном нагружении. Понятия о нейтральном и активном нагружении в области пластических состояний ($\Phi_\sigma = 0$) будут проиллюстрированы на конкретном примере ниже.

Эффективные зависимости $\Lambda(\rho/\rho_*)$ и $\varphi(\rho/\rho_*)$ следует подбирать по опытным данным. Здесь ρ — текущее значение плотности, ρ_* — плотность состояния отсчета. Если $\Lambda = 0$ при $\rho = \rho_*$, то ρ_* можно назвать критической плотностью. В соответствии со сказанным в начале этого раздела будем называть пески рыхлыми, если $\rho < \rho_*$, $\Lambda < 0$, и плотными при $\rho > \rho_*$, $\Lambda > 0$.

Некоторые опыты [14] говорят о том, что при высоких давлениях плотные пески при сдвиге уплотняются еще больше (т. е. дилатируют с тем же знаком, что и рыхлые), поэтому следует считать, что ρ_* слабо зависит от p (не исключено, что это связано с эффектом дробления частиц). Величины Λ и φ в модели задаются как функции от одного аргумента, поэтому можно искать зависимость $\varphi(\Lambda)$. Действительно, угол φ меньше у рыхлых песков и больше у плотных [6, 9, 12, 13].

3. **Пластический потенциал.** Найдем теперь потенциальную функцию $\Psi(\sigma_{ij})$ такую, что

$$de_{ij} = (\partial\Psi / \partial\sigma_{ij}) d\lambda \quad (3.1)$$

Можно показать, что определяющие связи (2.4) соответствуют следующему виду потенциальных поверхностей:

$$\Psi(\sigma_{ij}) = (T^2 - (\Lambda \sin\varphi) p^2 - 2c(\Lambda \cos\varphi) p) = \text{const} \quad (3.2)$$

Представим потенциальные поверхности в пространстве напряжений pT и определим постоянную в уравнении эквипотенциали из условия пересечения ее с прямой Мора — Кулона в точке (T_0, p_0) . Получим

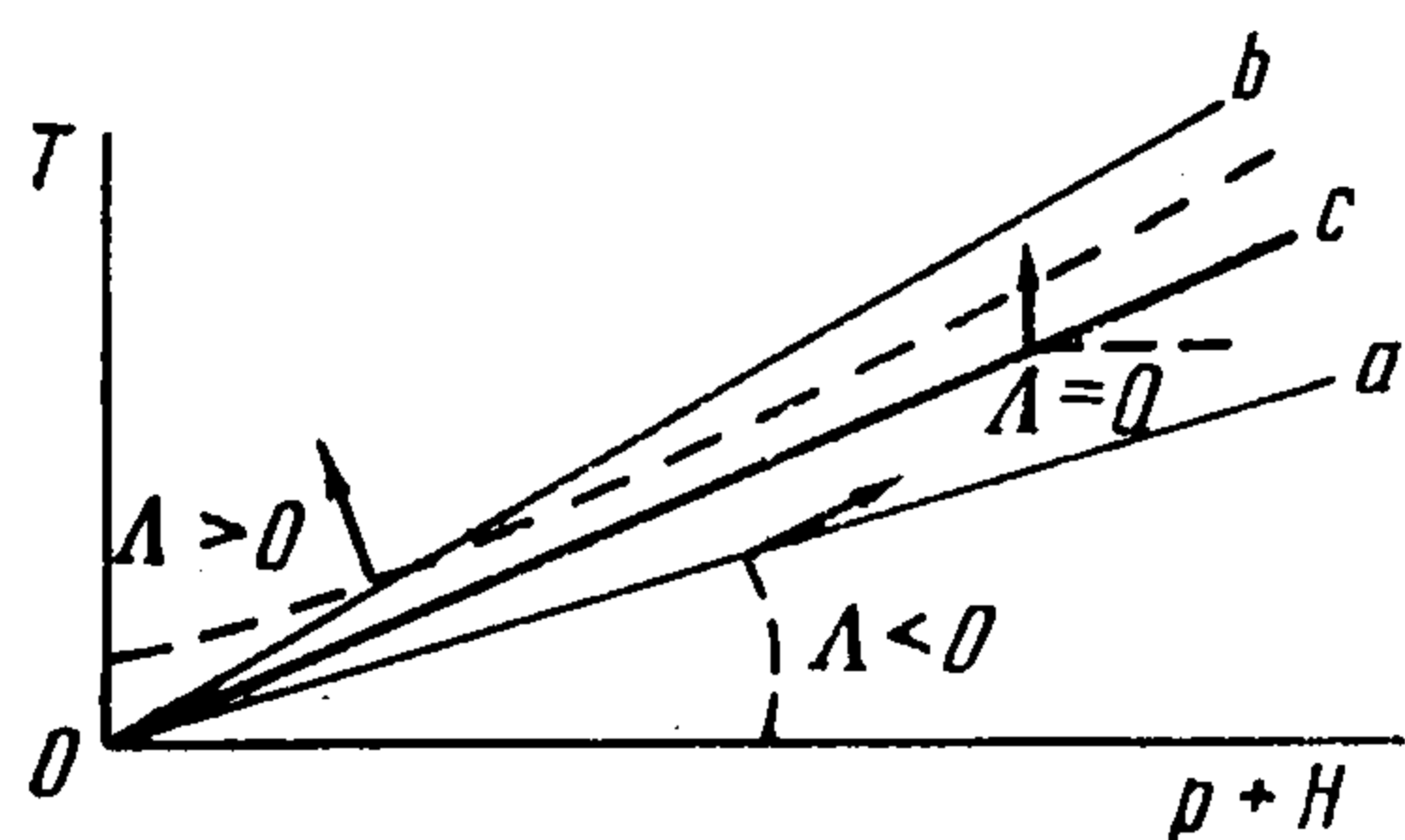
$$T^2 - (\Lambda \sin\varphi) (p + H)^2 = T_0 (p_0 + H) (\sin\varphi - \Lambda) \quad (3.3)$$

Пусть $\sin\varphi > \Lambda > 0$, тогда уравнение (3.3) оказывается уравнением гиперболы, асимптота которой имеет наклон $\sqrt{\Lambda \sin\varphi}$ к оси давления p меньший, чем прямая Мора — Кулона.

В частном случае (если только он возможен) $\Lambda = \sin\varphi$ гипербола (3.3) вырождается в прямую, которая при этом совпадает с прямой Мора — Кулона. Другими словами, при $\Lambda = \sin\varphi$ сама эквипотенциаль $\Psi = \text{const}$ оказывается поверхностью текучести $\Phi_0 = \text{const}$, т. е. вектор приращений деформаций нормален к поверхности текучести. Таким образом, этот частный случай соответствует применению ассоциативного закона к функции текучести, что было рекомендовано Дракером и Прагером [15]. Однако в опытах было выявлено, что скорость дилатансии не только гораздо меньше значения $\Lambda = \sin\varphi$, но и может быть отрицательной величиной. Кроме того, при $\Lambda = \sin\varphi$ диссипация W определяется только сцеплением среды (см. раздел 6, [15], а также [16]), а при $c = 0$ (идеально сыпучая среда) оказывается, что и $W = 0$. Нереальность отсутствия диссипации в среде с сухим трением часто служит аргументом против применения ассоциативного закона в любой его форме. На самом деле сделанное замечание относится к применению ассоциативного закона к самой поверхности текучести.

Если $\Lambda < 0$, то уравнение (3.5) оказывается уравнением эллипса.

При $\Lambda = 0$ получаем, что эквипотенциальная поверхность принимает вид прямой, параллельной оси давлений.



Фиг. 1

Рассмотренные выше случаи, соответствующие разрыхлению ($\Lambda > 0$) и уплотнению ($\Lambda < 0$), а также случай критического состояния несжимаемости $\Lambda = 0$ представлены на фиг. 1, где учтен также переменный угол трения φ . Таким образом, пластические состояния заполняют угол aOc или bOc , причем в ходе развития деформаций происходит смещение поверхности текучести от начальной aO (или от bO) к критической cO . Критическую поверхность cO можно также считать поверхностью разрушения.

По-видимому, не все состояния среды из угла aOc могут реализоваться, в частности из-за возможной неустойчивости процесса деформирования. Это замечание, прежде всего, относится к деформированию с разуплотнением среды при сопутствующем

снижении угла трения. Существенно, что цилиндрические образцы из плотного песка при осевом сжатии разрушаются вдоль некоторой узкой зоны (поверхности скольжения), тогда как образцы из рыхлого песка разрушаются, принимая бочкообразную форму.

Отметим также, что реальные сыпучие материалы в области высоких давлений дробятся, чему соответствует слом прямой Мора — Кулона и изменение эффективных угла трения, сцепления и дилатансии [17].

Определяющие связи (2.4) (или в форме (3.1), (3.2)) совместно с условием текучести (2.1) и законами упрочнения замыкают систему уравнений движения и неразрывности. Традиционное аддитивное добавление упругих деформаций приведет к сравнительно малому изменению деформаций в секторе пластических состояний, но жесткая область, примыкающая к оси гидростатического сжатия, сменится на область упругих деформаций. Соответственно оказывается, что гидростатическое сжатие должно быть упругим.

Основные предлагавшиеся ранее модели можно условно разделить на четыре типа. К первому типу отнесем модели [18, 19], согласно которым объемные и сдвиговые необратимые деформации развиваются кинематически независимо одна от другой, причем объемная деформация (плотность) является функцией давления (ветви нагрузки и разгрузки различны). Определяющие связи для сдвиговых деформаций задаются либо как и в деформационной теории пластичности [18], либо из условия подобия тензоров — девиаторов напряжений и скоростей деформаций [19]. Последний вариант соответствует применению ассоциативного закона к эквипотенциалам, параллельным оси p на плоскости pT , т. е. не совпадающим с прямой Мора — Кулона.

Из опытных данных видно, что при чисто гидростатическом сжатии образца сыпучей среды, вплоть до давлений, при которых происходит массовое дробление зерен (песка), деформации остаются преимущественно упругими [20], т. е. необратимая часть деформации составляет треть или половину ее упругой части при первичном нагружении. Этот вывод был подтвержден опытами Л. С. Козаченко в ИФЗ АН СССР. Если же сжатие производится при неравных главных напряжениях, необратимые изменения объема становятся весьма большими [20—22], причем связь между p и p оказывается неоднозначной даже при нагружении. Она зависит, например, от отношения главных напряжений, и при больших отношениях даже при росте p происходит уменьшение плотности [22]. С другой стороны, при очень высоких гидростатических сжатиях, когда дробление весьма существенно [14], преимущественная зависимость необратимых объемных деформаций от самого давления неоспорима.

Ко второму типу отнесем модели, использующие применение ассоциативного закона к функции текучести [15, 23]. Среда оказывается при гидростатическом сжатии жесткой (или упругой), а при сдвиге неограниченно разрыхляющейся $\Lambda = \sin \varphi$. Для учета наблюдаемого в опытах уплотнения среды, а также эффектов упрочнения были предложены обобщения модели [24—27], в которых вводились замкнутые (в пространстве главных напряжений) поверхности текучести.

Модели второго типа учитывают дилатансионные эффекты, но для состояний, соответствующих боковой части поверхности текучести (прямой $T = p \sin \varphi$ на плоскости pT), эти модели предсказывают только разрыхление, причем слишком интенсивное (в опытах $\Lambda < \sin \varphi$). В связи с этим отметим также работу [28], в которой утверждается, что прямой эксперимент не подтверждает ортогональность de_{ij} к $\Phi_{\sigma} = 0$ для грунтов. Далее в опытах Л. С. Козаченко (путь нагружения: вдоль оси p до точки p_A , а затем вдоль прямой $p_A = \text{const}$ на плоскости pT) вплоть до достижения прямой Кулона песок остается упругим. Последнее означает, что не может быть замкнутой поверхности текучести, у которой «дно» проходит левее прямой $p_A = \text{const}$.

Возможны также модели пластического деформирования (третий тип), использующие концепцию ассоциативного закона течения, но основанные на экспериментальных измерениях пластических эквипотенциалей. В этом направлении была выполнена работа [29], в которой измерялись приращения деформаций при напряженных состояниях, соответствующих точкам под прямой Мора — Кулона. От полных приращений отделялась их упругая часть, а затем по вектору приращений пластических деформаций строились эквипотенциали $\Psi = \text{const}$. Форма этих линий была близка к эллиптической, и они пересекали прямую Мора — Кулона. Существенно, однако, что в точках на прямой Мора — Кулона модуль вектора de_{ij} значительно больше, чем в точках ниже ее [29, 30].

Наконец, отметим конструкции работ [6, 31] (модели четвертого типа), в которых предлагалось считать, что необратимая объемная деформация складывается аддитивно: из части, обусловленной повышением гидростатического давления, и из части, связанной со сдвигом. В работе [31] для дилатансионной составляющей использовался ассоциативный закон в приложении к поверхности $\Phi_0 = 0$, а в работе [6] скорость дилатансии считалась независимым параметром. Можно надеяться, что подобные модели окажутся полезными при учете эффектов и дробления и переупаковки частиц среды.

Следует все же подчеркнуть, что далеко не во всех экспериментах осуществлялся контроль за однородным деформированием образцов. Поэтому дальнейшие опыты (подобные описанным в [12]) могут внести дополнительные коррективы в построение и выбор адекватных математических моделей.

4. Задача о деформировании слоя. Рассмотрим деформирование слоя толщиной h , в ходе которого компоненты скорости смещений по осям 1, 2 распределены следующим образом:

$$u_1 = \frac{U}{h} x_2, \quad u_2 = \frac{V}{h} x_2 \quad 0 \leq x_2 \leq h \quad (4.1)$$

где U, V — некоторые постоянные (максимальные скорости по горизонтали и вертикали). Дилатансионное условие (2.2) приводит к зависимости

$$V^2 = \frac{\Lambda^2}{1 - \Lambda^2} U^2 \quad (4.2)$$

Распределению скоростей (4.1) соответствует следующее однородное напряженное состояние, если $c \equiv 0$

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= -\frac{1}{2\lambda} \frac{1 + \Lambda \sin \varphi}{\sin \varphi} \frac{U}{\sqrt{1 - \Lambda^2}} \frac{U}{2h}, & \sigma_{22} &= -\frac{1}{2\lambda} \frac{1 - \Lambda \sin \varphi}{\sin \varphi} \frac{U}{\sqrt{1 - \Lambda^2}} \frac{U}{2h} \\ \sigma_{12} &= \frac{1}{2\lambda} \frac{U}{2h} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Если на границах $x_2 = \pm h$ измеряются удельные усилия $P = -\sigma_{22}$, $Q = \sigma_{12}$, то между ними будет существовать связь

$$Q = KP, \quad K = \sqrt{1 - \Lambda^2} (1 - \Lambda \sin \varphi)^{-1} \sin \varphi \quad (4.4)$$

Подобное течение стремятся создать в сдвиговых приборах [12]. При этом традиционная элементарная интерпретация величины K как коэффициента внутреннего трения ($K = \text{tg } \varphi_b$) приводит к выводу о переменности φ_b (даже при постоянстве истинного угла $\varphi = \text{const}$). Любопытно, что зависимость (4.4) даже говорит о существовании некоторого пикового значения φ_b (фиг. 2, где $\varphi = 30^\circ$, а пунктир соответствует, по видимому, нереализуемым значениям Λ) для области $\Lambda > 0$, т. е. при $\rho > \rho_*$, что характерно для опытов по сдвигу в плотном песке [12-14]. Таким образом, данные о коэффициенте (угле) трения, получаемые даже в случае простейшего плоского сло-

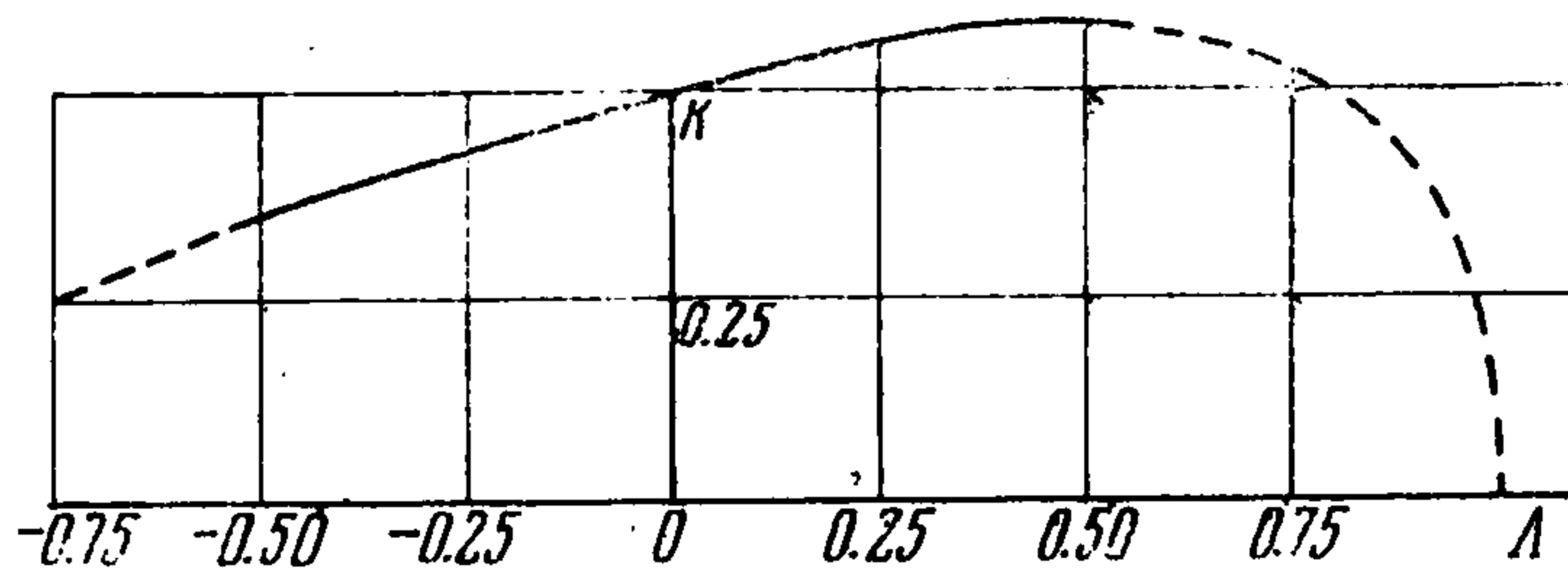
стого течения не могут быть непосредственно отнесены к истинному углу трения φ , который фигурирует в предельном соотношении (3.1).

При задании пути нагружения $Q(t), P(t)$ для нахождения соответствующих деформаций нужно сначала продифференцировать условие (4.4), причем если $\Lambda = \Lambda(\rho/\rho_*)$, $\varphi = \varphi(\rho/\rho_*)$, то $K = K(e)$, поэтому получим

$$dQ = KdP = PK_e' de \quad (4.5)$$

С другой стороны, из (4.3) для приращения объемной деформации de следует связь

$$\frac{1}{4} \sqrt{1 - \Lambda^2} de = Q \Lambda d\lambda \quad (4.6)$$



Фиг. 2

Подстановка соотношения (4.6) в формулу (4.5) позволяет выразить приращение $d\lambda$ через приращения нагрузок dQ и dP .

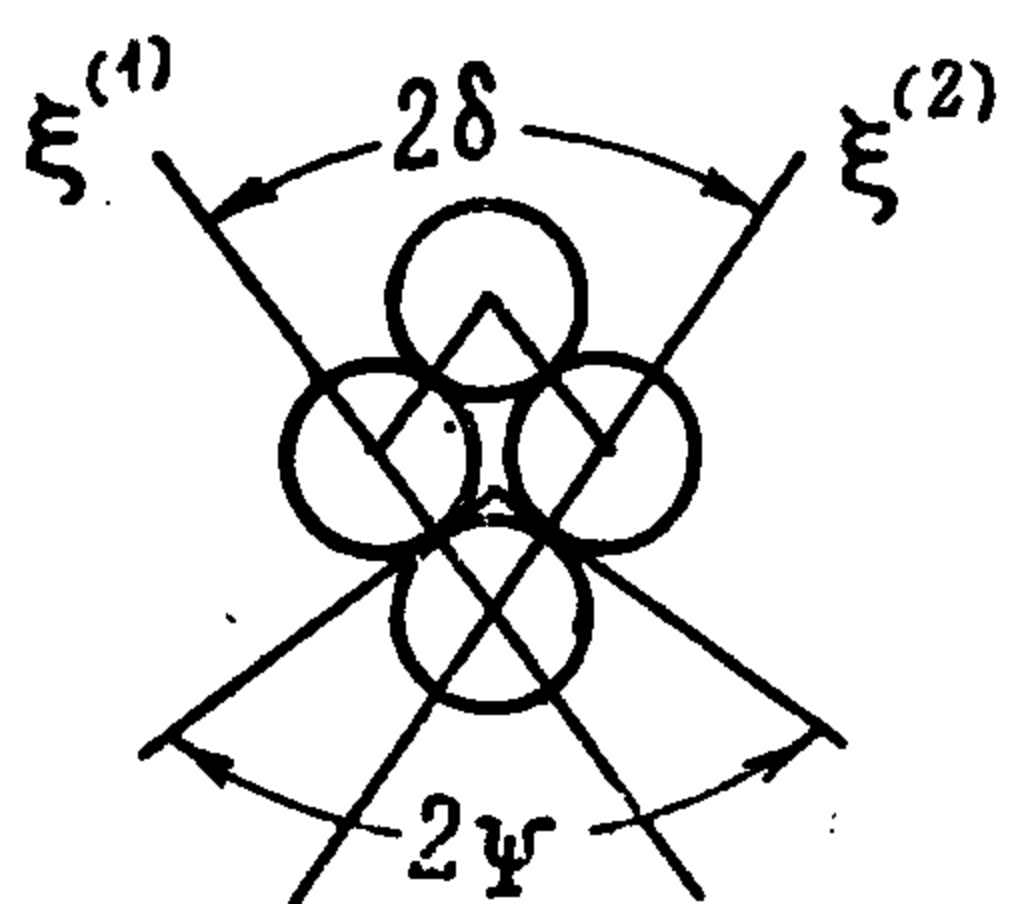
Теперь по выражениям (4.3) можно подсчитать и приращение сдвиговой деформации

$$de_{12} = \frac{1}{2} \sqrt{1 - \Lambda^2} (\Lambda K_e')^{-1} (dQ - K dP) P^{-1} \quad (4.7)$$

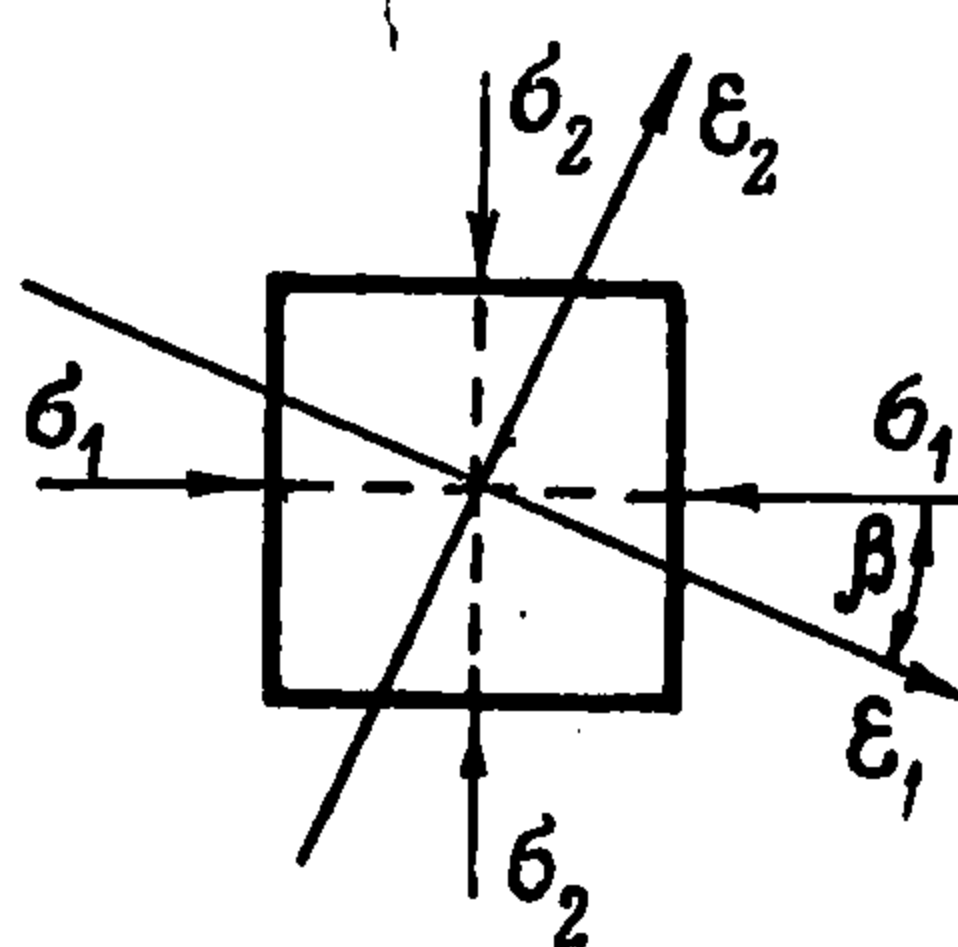
что завершает расчет. Условие $dQ - KdP = 0$ соответствует нейтральному нагружению, условие $dQ - KdP < 0$ — разгрузке. В этих случаях приращения пластических деформаций равны нулю.

Отметим, что одновременная фиксация в опытах данных о величинах K и Λ позволит найти эмпирические связи $\Lambda(\rho)$, $\varphi(\rho)$.

5. Гипотетические замыкающие соотношения. Хотя зависимости $\Lambda(\rho)$ и $\varphi(\rho)$ следует искать путем обработки опытных данных, могут быть пред-



Фиг. 3



Фиг. 4

ложены и некоторые гипотетические модели, позволяющие вычислить эти характерные связи для специальных видов сыпучих сред по известным величинам угла трения между частицами и другим параметрам микроструктуры. По-видимому, наиболее плодотворными в этом направлении скажутся методы механики сплошной среды с микроструктурой, использующие представления о векторах-ориентирах и линиях проскальзывания [32].

Рассмотрим ячейку, составленную четырьмя контактирующими частицами (фиг. 3). Идеализируя реальную картину, примем, что эти частицы сферической формы и одинакового радиуса. Для деформации ячейки (если исключить из рассмотрения малые упругие деформации, см. [33])

характерно условие, что расстояния между центрами контактирующих частиц сохраняется постоянными. Другими словами, относительные смещения центров сфер должны быть ортогональны линиям, соединяющим их. Если ввести теперь континуальное описание деформации, то указанное условие говорит о наличии векторов-ориентиров $\xi^{(1)}$, $\xi^{(2)}$, подобных вводимшимся ранее Эриксоном и Трусделлом [34]. Условие отсутствия относительных смещений точек, расположенных на направлении вектора-ориентира, сводится (ср. (1.3)) к следующему:

$$\sum_{i,j} \varepsilon_{ij} \xi_i^{(\alpha)} \xi_j^{(\alpha)} = 0, \quad \alpha = 1, 2 \quad (5.1)$$

Условие (5.1) можно преобразовать [32] к кинематической взаимосвязи скорости объемной ε и сдвиговой γ деформации

$$\varepsilon = -\Lambda \gamma \operatorname{sgn} \gamma, \quad \Lambda = \cos 2\delta \quad (5.2)$$

где 2δ — угол между векторами $\xi^{(1)}$, $\xi^{(2)}$ (фиг. 4). Зависимость в (5.2) скорости дилатансии Λ от угла δ нетрудно пересчитать на зависимость от объемной деформации (плотности) ячейки.

При относительном проскальзывании сфер усилия на контактах связаны законом (1.1), причем ему соответствует пропорциональность среднего давления и интенсивности касательных напряжений, действующих на ячейку [32]. Существенно, что коэффициент пропорциональности (эффективный коэффициент внутреннего трения среды в целом) зависит от объемной деформации (плотности) среды, поскольку в ходе деформирования меняется угол δ , а вместе с тем и проекции сил сухого трения на главные оси тензора напряжений [32].

Коэффициент внутреннего трения может стать даже бесконечно большим (эффект заклинивания), что было отмечено для сфер Орованом [35]. Заметим также, что относительные смещения частиц происходят вдоль семейств линий (проскальзывания), взаимноортогональных векторам-ориентирам, которые пересекаются под углом $2\psi = \pi - 2\delta$.

Соображения о деформации индивидуальной ячейки позволяют проиллюстрировать кинематическое условие (2.2) (ср. условие (5.2)), а также характер упрочнения сыпучей среды. Однако для получения каких-либо количественных связей необходимо рассматривать статистику распределения подобных ячеек, предполагая даже наличие их надструктуры. При этом существен учет анизотропии.

Значительно проще искать замыкающие связи, вводя только одно поле скоростей в окрестности макроточки, но используя вместе с тем соображения, основанные на микрокартине деформационного процесса.

Такой путь не нов в механике гранулированных сред. Наиболее полными работами подобного типа являются [16, 36, 37], авторы которых требуют, чтобы характеристики поля скоростей, вдоль которых возможны разрывы скорости, обязательно совпадали с линиями, на которых выполняется закон Кулона (1.1). Последние оказываются характеристиками поля напряжений, если $R = \tau_n$, $N = \sigma_n$ [38], где τ_n , σ_n — касательная и нормальная компоненты напряжений на этой линии (n — индекс нормали к ней).

Поскольку в работах [16, 36, 37] рассматривается частный случай несжимаемой среды, то при коаксиальности тензоров напряжений и скоростей указанные два семейства характеристик не могут совпадать. Отсюда отказ от требования коаксиальности и требование относительного поворота главных осей тензоров напряжений (такого, чтобы совпадала хотя бы одна пара характеристик скоростей и напряжений).

Отказ от коаксиальности в случае изотропной среды неприемлем по многим причинам. Во-первых, линия скольжения, вдоль которой должен выполняться закон (1.1), является линией сильного тангенциального разрыва скорости, т. е. скорость сдвиговой деформации вдоль нее становится бесконечно большой, и тем самым концепция тензора скорости деформаций в этой точке теряет смысл. Поэтому в точках, где выполняются условия предельного равновесия сплошной среды, но нет сильных разрывов, требовать совпадения линий, вдоль которых выполнен закон (1.1), и характеристик поля скоростей не нужно; не нужно тем самым и отказываться от упомянутого условия коаксиальности.

Во-вторых, в изотропной среде условию коаксиальности соответствует максимальная мощность диссипации механической работы W . Предположим сначала, что главные оси указанных тензоров в элементе (квадрат со стороной $2l$) среды (фиг. 4) не совпадают (главные значения соответственно $\sigma_1, \sigma_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2$). Воспользовавшись представлением (1.3), находим

$$W = 2\sigma_1 \Delta u_1 + 2\sigma_2 \Delta u_2 = (\sigma_1 + \sigma_2) (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) l + (\sigma_1 - \sigma_2) (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) l \cos 2\beta \quad (5.3)$$

отсюда следует, что максимум W достигается при значении $\beta = 0$. Наконец, специальные опыты [12] подтверждают, что приращения пластических деформаций коаксиальны напряжениям.

Отметим попутно, что при выполнении связей (2.4) выражение (5.3) может быть представлено в виде

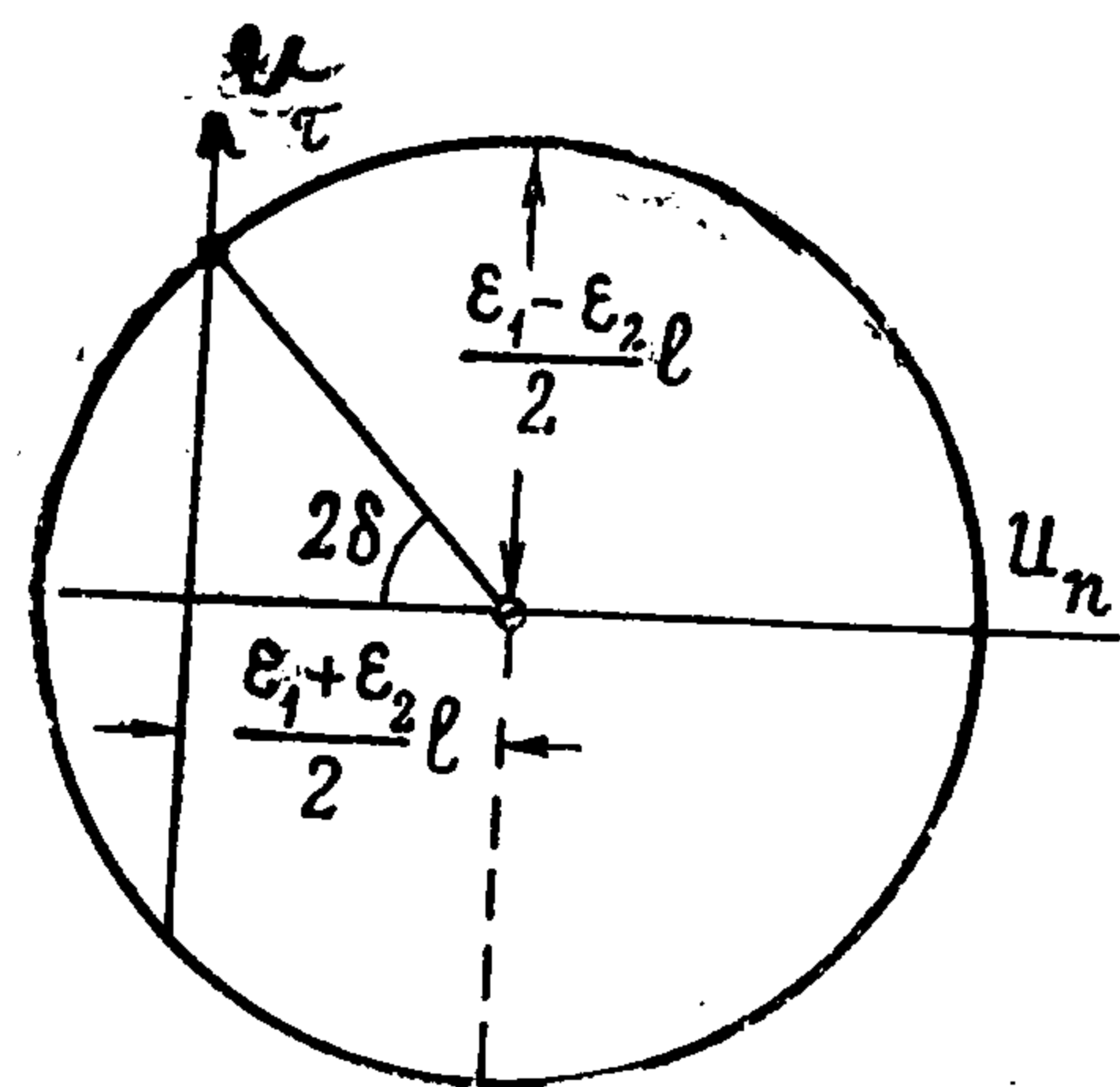
$$W = (\sigma_1 - \sigma_2) (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) (1 - \Lambda / \sin \varphi) + 2c_2 \Lambda (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \operatorname{ctg} \varphi, \quad l = 1$$

и при $\Lambda = \sin \varphi, c = 0$, т. е. при форме [15] ассоциативного закона $W \equiv 0$.

Конструируя гипотетическую картину деформирования в условиях действия кулоновых сил трения, начнем с того, что найдем аналог линий скольжения и аналог векторов-ориентиров в поле средних скоростей.

Из соотношения (1.3) следует наличие круга Мора (фиг. 5) для тензора ε_{ij} , который также может быть выражен через относительные скорости

$$u_\tau^2 + (u_n - \frac{1}{2} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) l)^2 = (\frac{1}{2} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) l)^2$$



Фиг. 5

где u_n, u_τ — компоненты скорости частицы, находящейся на расстоянии l от точки x_j , вдоль l и перпендикулярно к ней. В силу условия (2.2), которое в главных деформациях $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ имеет вид $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) = \Lambda |\varepsilon_1 - \varepsilon_2|$, круг (5.4) пересекается с осью $u_n = 0$. Поэтому существуют два направления (составляющие с осью σ_2, ε_2 угол $\pm \delta$; $\Lambda = \cos 2\delta$), расстояние между частицами на которых не меняется. Эти направления совпадают с

¹ Величина $\nu = \pi/2 - 2\delta$ называется углом дилатансии [12].

характеристиками поля скоростей; прообразом им служат вектор-ориентир. Аналогами направлений, вдоль которых как бы происходит микропроскальзывание частиц, находящихся на характеристиках скоростей, являются направления u_τ , т. е. семейство линий скольжения [9], взаимортогональных к характеристикам поля скоростей. Именно вдоль них происходит чисто тангенциальное относительное смещение частиц. Эти линии скольжения сливаются с характеристиками поля скоростей лишь при $\Lambda \rightarrow 0$. Линии сильного касательного разрыва скоростей является границами для областей непрерывного пластического деформирования, а условия на них — граничными условиями.

Ранее было рассмотрено [39, 40] такое состояние сплошной среды, когда закон Кулона сухого трения (1.1) реализуется на площадке предельного равновесия, но между компонентами сил R , N , направленными к ней соответственно под углом β и $\beta + \pi/2$. Тогда эффективный угол трения будет $\varphi = \vartheta + \beta$.

Если теперь принять, что направление силы R коллинеарно линии скольжения, то получим [9] связь мгновенного угла трения φ сплошной среды, скорости дилатансии Λ и угла трения ϑ между частицами

$$\varphi = 2\vartheta + \arcsin \Lambda \quad (5.5)$$

Это соотношение хорошо аппроксимирует связь, рекомендованную из энергетических соображений в работе [13].

Для нахождения связи скорости дилатансии Λ с плотностью ρ среды, продифференцируем сначала выражение $\Lambda = \cos 2\delta$ по времени. Тогда найдем скорость изменения угла

$$\frac{d\delta}{dt} = -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1-\Lambda^2}} \frac{d\Lambda}{dt} \quad (5.6)$$

Теперь гипотеза, что относительная скорость частиц, находящихся на характеристике, совпадает со скоростью смещения самой характеристики (это условие строго выполняется для истинных вектор-ориентиров, замороженных в среду; с другой стороны, предположение об их наличии противоречит условию неизменной изотропии среды)

$$u_\tau(\delta) = 1/2 (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) l \sin 2\delta = l (d\delta / dt) \quad (5.7)$$

приводит к соотношению

$$(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \sqrt{1 - \Lambda^2} = (\sqrt{1 - \Lambda^2})^{-1} d\Lambda / dt \quad (5.8)$$

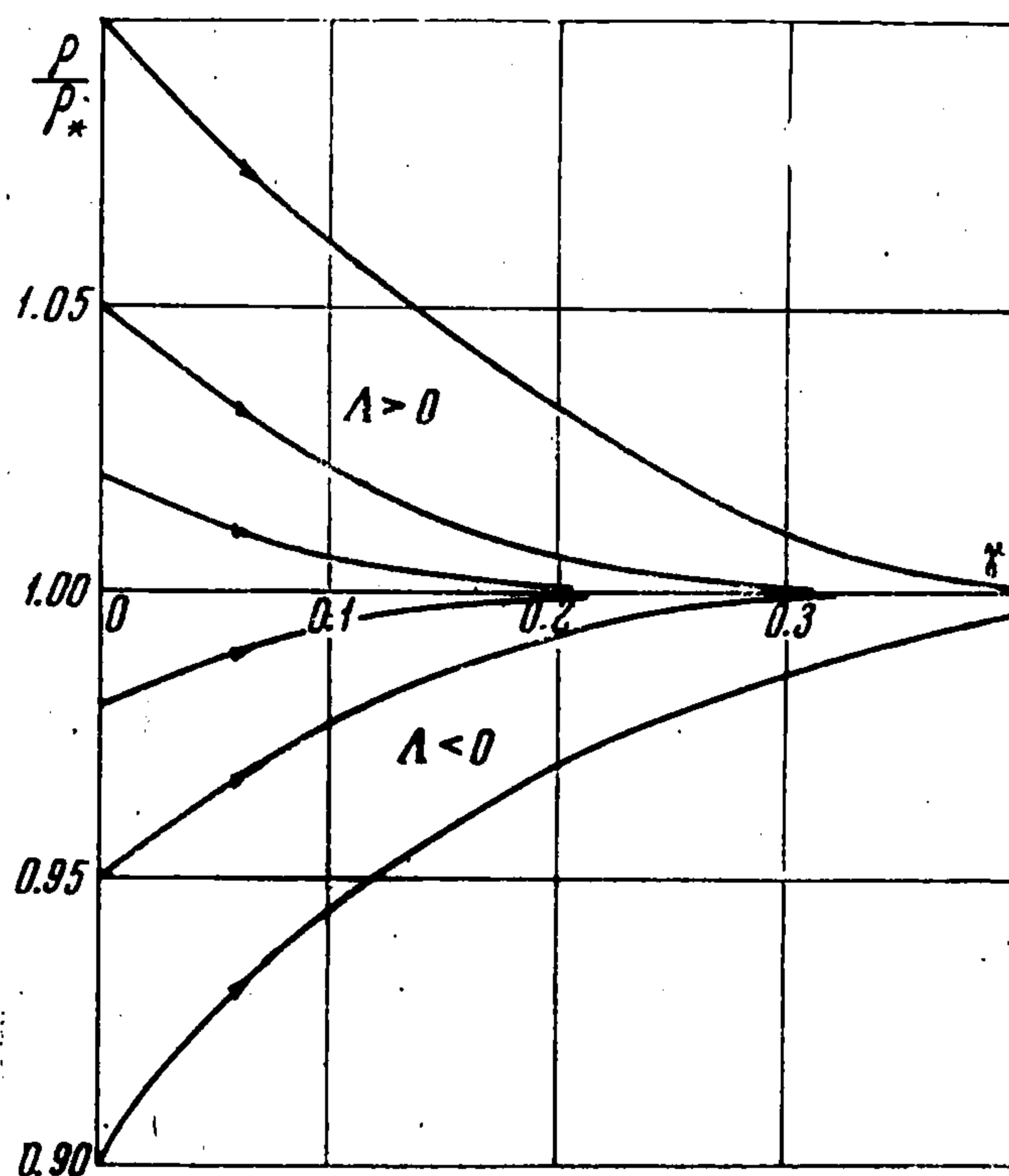
Последнее может быть представлено в виде

$$\varepsilon dt = -\rho^{-1} d\rho = -(1 - \Lambda^2) \Lambda d\Lambda \quad (5.9)$$

Интегрирование (5.9) приводит к связям (фиг. 6, где представлены кривые изменения плотности образца при сдвиге)

$$\begin{aligned} \Lambda &= -\sqrt{1 - (\rho / \rho_*)^2}, & d\Lambda > 0 & \text{при } \Lambda < 0 \\ \Lambda &= \sqrt{1 - (\rho_* / \rho)^2}, & d\Lambda < 0 & \text{при } \Lambda > 0 \end{aligned} \quad (5.10)$$

Гипотетические соотношения (5.5) и (5.9) замыкают приведенную выше жестко-пластическую упрочняющуюся модель гранулированной среды. Они полезны как ориентировочные, хотя, конечно, и не могут заменить функций $\Lambda(\rho)$, $\varphi(\rho)$ для реальных материалов. В частности, существенно, что производная $d\varphi/d\Lambda = (1 - \Lambda^2)^{-1/2}$ при $\Lambda \rightarrow 0$ не обращается в нуль, а это не обеспечивает гладкого предельного перехода



Фиг. 6

упрочняющейся пластической модели к модели несжимаемого ($\Lambda = 0$) течения без упрочнения, которое соответствует критическому состоянию (и разрушению) среды.

Автор признателен Л. И. Седову и А. А. Вакуленко за обсуждение работы, а Н. М. Сырникову — за проведение расчетов.

Поступила 22 II 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. С е д о в Л. И. Механика сплошной среды, т. 1, 2. М., «Наука», 1970.
2. О л ь ш а к В., М р у з З., П е ж и н а П. Современное состояние теории пластичности. М., «Мир», 1964.
3. Н и к о л а е в с к и й В. Н. К теории неупругих деформаций пористых сред. В сб.: Теория и практика добычи нефти. М., «Недра», 1966, стр. 75—87.
4. Н и к о л а е в с к и й В. Н. К термодинамическому анализу моделей неупругой сплошной среды. Инж. ж. МТТ, 1966, № 3.
5. Н и к о л а е в с к и й В. Н. Монохроматические волны в упругой среде с локальным проявлением сухого трения. Инж. ж. МТТ, 1968, № 4.
6. Н и к о л а е в с к и й В. Н. О связи объемных и сдвиговых пластических деформаций и об ударных волнах в мягких грунтах. Докл. АН СССР, 1967, т. 177, № 3.
7. R e u n o l d s O. On the dilatancy of media composed of rigid particles in contact. With Experimental illustrations. Philos. Mag., Ser. 5, 1885, vol. 20, No. 127.
8. M i s e s R. V. Mechanik der plastischen formänderung von kristallen. ZAMM, 1928, vol. 8, No. 3, p. 161—185.
9. Н и к о л а е в с к и й В. Н., С ы р н и к о в Н. М. О плоском предельном течении сыпучей дилатирующей среды. Изв. АН СССР, МТТ, 1970, № 2.
10. S a w c z u k A., S t u t z P. On formulation of stress-strain relations for soils at failure. ZAMP, 1968, vol. 19, No. 5, p. 770—778 (Русск. перев. Механика, Период. сб. перев. иностр. статей, 1970)
11. C a m e r o n I. G., S c o r g i e G. C. Dynamics of intense underground explosions. J. Inst. Math. Applic., 1968, vol. 4, No. 2, p. 194—222.
12. R o s c o e K. H. The influence of strains in soil mechanics. Geotechnique, 1970, vol. 20, № 2, 129—170 (Русск. перев., Механика, Период. сб. перев. иностр. статей, 1971, № 1).

13. Rowe P. W. The stress-dilatancy relation for static equilibrium of an assembly of particles in contact. Proc. Roy. Soc. A, 1962, vol. 269, No. 1339, p. 500—527.
14. Vesic A. S., Clough G. W. Behaviour of granular materials under high stress. J. Soil Mech. and Foundat. Div., Proc. Amer. Soc. Civil Engrs, 1968, vol. 94, No. 3, p. 661—668.
15. Drucker D. C., Prager W. Soil mechanics and plastic analysis or limit design. Quart. Appl. Math. 1952, vol. 10, № 2, p. 157—165.
16. Mandl G., Fernandez Lique R. Fully developed plastic shear flow of granular materials. Geotechnique, 1970, vol. 20, № 3, p. 277—307.
17. Hall C. D., Harrisberger W. H. Stability of sand arches: a key to sand control. J. Petrol. Technol., 1970, vol. 22, p. 821—829.
18. Рахматулин Х. А., Сагомоян А. Я., Алексеев Н. А. Вопросы динамики грунтов. М., Изд-во МГУ, 1964.
19. Григорян С. С. Об основных представлениях динамики грунтов. ПММ, 1960, т. 24, вып. 6.
20. Ko H. Y., Scott R. F. Deformation of sand in hydrostatic compression. J. Soil Mech. and Foundat. Div. Proc. Amer. Soc. Civil Engrs., 1967, vol. 93, No. 3.
21. Stoll R. D., Ebeido I. A. Unloading effects in the dynamics response of granular soil. Exptl. Mech., 1966, vol. 6, No. 10, p. 502—507.
22. El-Sohby M. A. Deformation of sands under constant stress ratios. Proc. 7-th Int. Conf. Soil Mech. Found. Eng. Mexico, 1969, Mexico, 1969, vol. I, p. 111—119.
23. Shield R. T. On Coulomb's law of failure in soils J. Mech. and Phys. Solids, 1956, vol. 4, No. 1.
24. Drucker D. C., Gibson R. E., Henkel, D. J. Soil mechanics and work-hardening theories of plasticity. Trans. Amer. Soc. Civil Engrs., 1957, vol. 122, p. 338—346.
25. Jenike A. W., Shield R. T. On the plastic flow of Coulomb solids beyond original failure. J. Appl. Mech., 1959, vol. 26, № 4, p. 599—602.
26. Suh N. P. A yield criterion for plastic, frictional work-hardening granular material. Internat. J. Powder Metallurgy, 1969, vol. 5, No. 1.
27. Дидух Б. И., Иоселевич В. А. О построении теории пластического упрочнения грунта. Изв. АН СССР. МТТ, 1970, № 2.
28. Huthornthwaite R. M. Stress and strain in soils. In: Plasticity. Oxford, Pergamon Press, 1960.
29. Porooshasb H. B., Holubec I., Sherbourne A. N. Yielding and flow of sand in triaxial compression. Canad. Geotechnical J., pt. 1, 1966, vol. 3, No. 4; p. 2—3. 1967, vol. 4, No. 4, p. 2—3.
30. Drescher, A., Wojanowski W. On the influence of stress path upon the mechanical properties of granular material. Archiwum Inzynierii Ladowej, 1968, vol. 14, No. 3.
31. Ивлев Д. Д., Мартынова Т. Н. К теории сжимаемых идеально-пластических сред. ПММ, 1963, т. 27, вып. 3.
32. Nikolaevskii V. N., Afanasiev E. F. On some examples of media with microstructure of continuous particles. Internat. J. Solids Structures, 1969, vol. 5, No. 7, p. 671—678.
33. Deresiewicz H. Mechanics of granular matter. In: Advances in Appl. Mech., vol. 5, N. Y., Akad. Press. Inc., 1958 (Русск перев.: В сб. Проблемы механики, М., Изд-во иностр. лит., 1961, т. 3, стр. 91—152).
34. Ericksen G. L., Truesdell C. Exact theory of stress and strain in rods and shells. Archs. Ration. Mech. Analysis, 1958, vol. 1, No. 4, p. 295—323.
35. Orowan E. Dilatancy and the seismic focal mechanism. Revs. Geophys., 1966, vol. 4, No. 3.
36. Гениев Г. А. Вопросы динамики сыпучей среды. Научн. сообщ., ЦНИИСК Акад. строит. и архитектуры, 1958, вып. 2.
37. Josselin De Jong G. Statics and Kinematics in the failable zone of a granular material. Delft, Uitgeverig, Waltman, 1959.
38. Соколовский В. В. Статика сыпучей среды. М., Физматгиз, 1960.
39. Николаевский В. Н. К формулировке определяющих уравнений для плоского течения кулоновой сплошной среды. ПММ, 1968, т. 32, вып. 5.
40. Николаевский В. Н. Об одном обобщении предельного условия Кулона для идеально сыпучих сплошных сред. Прикл. механ., 1969, т. 5, вып. 3.