Прикладная математика и механика. Том 35, 1971

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ БУССИНЕКА ДЛЯ ПОЛУПРОСТРАНСТВА ПРИ СТЕПЕННОЙ ЗАВИСИМОСТИ МОДУЛЯ УПРУГОСТИ ОТ ГЛУБИНЫ

Н. А. Ростовцев, И. Е. Храневская

(Новосибирск)

Методами интегральных преобразований и аналитических функций строится точное решение задачи, указанной в заголовке. Эта задача возникла в связи с теорией линейно-деформируемого основания, характеризуемого степенным ядром. Интегральному уравнению первого рода посвящены работы [1–6]. В них предполагается, что такое ядро соответствует упругому полупространству со степенной зависимостью модулей упругости от глубины. Определение точного вида ядра требует решения задачи Фламана (в плоской теории упругости) и задачи Буссинека (в трехмерной теории). Решение задачи Фламана дано в работах [7, 8], частичное решение задачи Буссинека — в работе [11] (вычислены только перемещения на границе полупространства). Попытка вычисления упругого поля в полупространстве имеется в работе, в которой вычислены начальные члены рядов, представляющих решение в сферических координатах, но нет общих формул для них и не установлена сходимость [1].

В данной работе применяются цилиндрические координаты; решение выражается конечными формулами через известные высшие трансцендентные функции. Формулы решения получаются применением преобразования А. Я. Александрова [8] плоских задач теории упругости в осесимметрические и обратно, а также при помощи интегральных преобразований, ядра которых — функции Уиттекера.

1. Рассмотрим упругое неоднородное полупространство, ограниченное плоскостью $z = 0$, модуль упругости которого — степенная функция глубины, т. е. $\mu = Kz^k$, где K — постоянная, тогда как коэффициент Пуассона ν — постоянное число. На границу полупространства $z = 0$ по оси z действует сосредоточенная сила P. Для решения поставленной задачи применяем следующие формулы А. Я. Александрова [8]:

$$p(x) = \frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_0^x \frac{p^*(r)\,r\,dr}{\sqrt{x^2-r^2}} \tag{1.1}$$

$$\sigma_r^* + \sigma_\theta^* = \int_{-r}^{r} (\sigma_x + \sigma_y)\frac{dx}{\sqrt{r^2-x^2}}, \qquad \sigma_z^* = \int_{-r}^{r} \sigma_z \frac{dx}{\sqrt{r^2-x^2}} \tag{1.2}$$

$$\sigma_r^* - \sigma_\theta^* = \int_{-r}^{r} (\sigma_x - \sigma_y)\frac{2x^2-r^2}{r^2}\frac{dx}{\sqrt{r^2-x^2}}, \qquad u^* = \int_{-r}^{r} u_x \frac{x}{r}\frac{dx}{\sqrt{r^2-x^2}}$$

$$\tau_{rz}^* = \int_{-r}^{r} \tau_{xr}\frac{x}{r}\frac{dx}{\sqrt{r^2-x^2}}, \qquad w^* = \int_{-r}^{r} u_z \frac{dx}{\sqrt{r^2-x^2}}$$

$$\sigma_y = \nu(\sigma_x + \sigma_z)$$

[1] Белик Г. И. Некоторые пространственные задачи расчета конструкций на обобщенном упругом основании. Автореферат канд. диссертации. Днепропетровск, 1963.

Здесь и далее $p(x)$, σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xz}, u_x, u_y' — соответственно нагрузка, напряжения и перемещения плоского состояния, звездочкой отмечены величины осесимметричного состояния. При заданной нагрузке осесимметричного состояния (нормальная сосредоточенная сила P) определяем по формуле (1.1) нагрузку соответствующей плоской задачи. Легко найти, что

$$p(x) = -(2\pi^2)^{-1} P x^{-2} \tag{1.3}$$

Составляющие же напряжения и перемещения плоского состояния, отвечающие распределенной нагрузке $p(x)$, находятся с помощью решения задачи Фламана для неоднородной пластинки, модуль упругости которой $\mu = Kz^k$, где $0 \leqslant k < 1$.

Решение задачи Фламана в полярных координатах заимствуем из [11]:

$$\sigma_x = -CPz^k x^2 \varphi, \quad \sigma_z = -CPz^{k+2}\varphi, \quad \tau_{xz} = -CPz^{k+1} x\varphi$$

$$u_x = \frac{PA}{\psi}\left[x\cos\left(q \operatorname{arctg}\frac{x}{z}\right) - \frac{qz}{1+k}\sin\left(q\operatorname{arctg}\frac{x}{z}\right)\right] \tag{1.4}$$

$$u_z = \frac{PA}{\psi}\left[z\cos\left(q \operatorname{arctg}\frac{x}{z}\right) + \frac{qx}{1+k}\sin\left(q\operatorname{arctg}\frac{x}{z}\right)\right]$$

$$\varphi = (x^2+z^2)^{-1/2(k+3)}\cos\left(q\operatorname{arctg}\frac{x}{z}\right), \quad \psi = (x^2+z^2)^{1/2(k+1)} \tag{1.5}$$

$$C = \frac{2^{1+k}\Gamma\left[1+\frac{1}{2}(1+k+q)\right]\Gamma\left[1+\frac{1}{2}(1+k-q)\right]}{\pi\Gamma(2+k)}$$

$$q = \left[(1+k)\left(1-\frac{k\nu}{1-\nu}\right)\right]^{1/2}, \qquad A = \frac{1(1-\nu)C}{2Kk}$$

Следовательно, в случае распределенной нагрузки $p(x)$ напряжения и перемещения выразятся интегралами

$$\sigma_x = \int_{-\infty}^{\infty} p(\xi) R_1(x,z,\xi)\,d\xi, \qquad u_x = \int_{-\infty}^{\infty} p(\xi) K_1(x,z,\xi)\,d\xi$$

$$\sigma_z = \int_{-\infty}^{\infty} p(\xi) R_2(x,z,\xi)\,d\xi, \qquad u_z = \int_{-\infty}^{\infty} p(\xi) K_2(x,z,\xi)\,d\xi$$

$$\sigma_{xz} = \int_{-\infty}^{\infty} p(\xi) R_3(x,z,\xi)\,d\xi \tag{1.6}$$

$$R_1(x,z) = Cz^k x^2\varphi, \quad R_2(x,z) = Cz^{k+2}\varphi, \quad R_3(x,z) = Cz^{k+1}x\varphi$$

$$K_1(x,z) = \frac{-A}{\psi}\left[x\cos\left(q\operatorname{arctg}\frac{x}{z}\right) - \frac{qz}{1+k}\sin\left(q\operatorname{arctg}\frac{x}{z}\right)\right]$$

$$K_2(x,z) = -\frac{A}{\psi}\left[z\cos\left(q\operatorname{arctg}\frac{x}{z}\right) + \frac{qx}{1+k}\sin\left(q\operatorname{arctg}\frac{x}{z}\right)\right]$$

$$R_i(x,z,\xi) = R_i(x-\xi, z) \quad (i=1,2,3), \qquad K_j(x,z,\xi) = K_j(x-\xi,z) \quad (j=1,2)$$

φ и ψ согласно (1.5)

Пусть $p^*(r)$ — локально интегрируемая финитная функция. Тогда

$$P^*(\xi) = \int_{-\infty}^{\xi} p(x)\,dx = o(\xi^{-1}) \quad \text{при } \xi \to \infty \tag{1.7}$$

На основании этого получаем для напряжений и перемещений плоской задачи

$$\sigma_x = -\int_{-\infty}^{\infty} P^*(\xi) \frac{\partial R_1(x, z, \xi)}{\partial \xi} d\xi, \quad u_x = -\int_{-\infty}^{\infty} P^*(\xi) \frac{\partial K_1(x, z, \xi)}{\partial \xi} d\xi$$

$$\sigma_z = -\int_{-\infty}^{\infty} P^*(\xi) \frac{\partial R_2(x, z, \xi)}{\partial \xi} d\xi, \quad u_z = -\int_{-\infty}^{\infty} P^*(\xi) \frac{\partial K_2(x, z, \xi)}{\partial \xi} d\xi$$

$$\tau_{xz} = -\int_{-\infty}^{\infty} P^*(\xi) \frac{\partial R_3(x, z, \xi)}{\partial \xi} d\xi \tag{1.8}$$

Представим $R_i(x, z)$ $(i = 1, 2, 3)$ и $K_j(x, z)$ $(j = 1,2)$ интегралами Фурье

$$R_i(x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{i*}(z, s) e^{isx} ds, \quad K_j(x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} K_{j*}(z, s) e^{isx} ds \tag{1.9}$$

Подставив (1.9) в равенства (1.8), изменив при этом порядок интегрирования (это возможно в силу условия (1.7)), получаем, что составляющие напряжения выразятся интегралами вида

$$\int_{-\infty}^{\infty} isR_{i*}(z, s) e^{isx} ds \int_{-\infty}^{\infty} P^*(\xi) e^{-is\xi} d\xi \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{1.10}$$

а составляющие перемещения — интегралами

$$\int_{-\infty} isK_{j*}(z, s) e^{isx} ds \int_{-\infty}^{\infty} P^*(\xi) e^{-is\xi} d\xi \qquad (j = 1, 2) \tag{1.11}$$

Так как

$$P^*(\xi) = \frac{P}{2\pi^2\xi} \text{ для } p(x) = -\frac{P}{2\pi^2 x^2},$$

то внутренний интеграл в (1.10) и (1.11) равен $-i(2\pi)^{-1}P \operatorname{sgn} s$.

После этого решение плоской задачи будет

$$\sigma_x = \frac{P}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s \operatorname{sgn} s R_{1*}(z, s) e^{isx} ds, \quad \sigma_z = \frac{P}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s \operatorname{sgn} s R_{2*}(z, s) e^{isx} ds$$

$$\tau_{xz} = \frac{P}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s \operatorname{sgn} s R_{3*}(z, s) e^{isx} ds \tag{1.12}$$

$$u_x = \frac{P}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s \operatorname{sgn} s K_{1*}(z, s) e^{isx} ds, \quad u_z = \frac{P}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s \operatorname{sgn} s K_{2*}(z, s) e^{isx} ds$$

Полученные результаты позволяют при помощи преобразований А. Я. Александрова (1.2) вычислить напряжения и перемещения в осесимметричном случае. Отсюда (1.13)

$$\sigma_z^* = PI_{20}^{(1)}(r,z), \quad \sigma_r^* = P\left[I_{10}^{(1)}(r,z) - \frac{1-\nu}{r} I_{11}^{(0)}(r,z) + \frac{\nu}{r} I_{21}^{(0)}(r,z)\right]$$

$$\sigma_\theta^* = \nu P\left[I_{10}^{(1)}(r,z) + I_{20}^{(1)}(r,z) + \frac{1-\nu}{\nu r} I_{11}^{(0)}(r,z) - \frac{1}{r} I_{21}^{(0)}(r,z)\right]$$

$$\tau_{rz}^* = PiI_{31}^{(1)}(r,z)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$I_{\varkappa n}^{(0)}(r,z) = \int_0^\infty R_{\varkappa *}(z,s) J_n(rs)\,ds, \qquad I_{\varkappa n}^{(1)}(r,z) = \int_0^\infty sR_{\varkappa *}(z,s) J_n(rs)\,ds \tag{1.14}$$

$$u^* = Pi\int_0^\infty sK_{1*}(z,s) J_1(rs)\,ds, \qquad w^* = P\int_0^\infty sK_{2*}(z,s) J_0(rs)\,ds \tag{1.15}$$

Обращая (1.9) и внося результат в (1.13) и (1.15), получим выражения для напряжений и перемещений. Предварительно, чтобы избежать громоздких записей, введем специально сконструированные обозначения

$$\gamma_\pm^{(1)} = \frac{1}{\Gamma[{}^1/_2(k \pm q + 1)]}, \qquad \gamma_\pm^{(3)} = \frac{1}{\Gamma[{}^1/_2(k \pm q + 3)]} \tag{1.16}$$

$$B^\pm_{\varkappa\lambda\,\mu n}(z, r) = \int_0^\infty s^{{}^1/_2(k+\varkappa)} W_{\pm({}^1/_2 q+\lambda),\,-({}^1/_2 q+\mu)}(2zs)\, J_n(rs)\,ds$$

Здесь знаки в правых и левых частях находятся в соответствии. В этих обозначениях выражение имеет вид

для напряжений

$$\sigma_z^* = -CPz^{{}^1/_2(k+1)}\, 2^{-{}^1/_2(k+5)}\,[\gamma_+^{(3)} B^+_{3010}(r, z) + \gamma_-^{(3)} B^-_{3010}(r, z)] \tag{1.17}$$

$$\tau_{rz}^* = CPz^{{}^1/_2(k-1)} 2^{-{}^1/_2(k+5)}\{[{}^1/_2(1+k+q)\gamma_+^{(3)} B^+_{1011}(z, r) +$$
$$+ {}^1/_2(1+k-q)\gamma_-^{(3)} B^-_{1011}(z, r)] - z[\gamma_+^{(3)} B^+_{3011}(z, r) + \gamma_-^{(3)} B^-_{3011}(z, r)] -$$
$$- [{}^1/_4(k^2-q^2+3) + {}^1/_2 q + k]\gamma_+^{(3)} B^+_{1,-1,11}(z, r) - [{}^1/_4(k^2-q^2+3) - {}^1/_2 q + k] \times$$
$$\times \gamma_-^{(3)} B^-_{1111}(z, r)\} \tag{1.18}$$

для перемещений

$$w^*(r,z) = \frac{(1-\nu)CP}{2^{{}^1/_2(k+5)} Kk(1+k) z^{{}^1/_2(k+1)}}\{z[(1+k-q)\gamma_+^{(1)} B^+_{1000}(r,z) +$$
$$+ (1+k+q)\gamma_-^{(1)} B^-_{1000}(r,z)] + {}^1/_2(k+q-1)^q \gamma_+^{(1)} B^+_{-1000}(r,z) -$$
$$- {}^1/_2(k-q-1)^q \gamma_-^{(1)} B^-_{-1000}(r,z) - [{}^1/_4(k^2-q^2-1) + {}^1/_2 q]\, q\gamma_+^{(1)} B^+_{-1,-1,00}(r,z) +$$
$$+ [{}^1/_4(k^2-q^2-1) - {}^1/_2 q]\, q\gamma_-^{(1)} B^-_{-1100}(r,z)\} \tag{1.19}$$

$$u^*(r,z) = -\frac{(1-\nu)CP}{2^{{}^1/_2(k+5)} Kk z^{{}^1/_2(k+1)}}\{{}^1/_2(k+q-1)\gamma_+^{(1)} B^+_{-1001}(r,z) +$$
$$+ {}^1/_2(k-q-1)\gamma_-^{(1)} B^-_{-1001}(r,z) - z(k+1)^{-1}[(k-q+1)\gamma_+^{(1)} B^+_{1001}(r,z) +$$
$$+ (k+q+1)\gamma_-^{(1)} B^-_{1001}] - [{}^1/_4(k^2-q^2-1) + {}^1/_2 q]\gamma_+^{(1)} B^+_{-1,-101}(r,z) -$$
$$- [{}^1/_4(k^2-q^2-1) - {}^1/_2 q]\gamma_-^{(1)} B^-_{-1101}(r,z) \tag{1.20}$$

Выражая функции Бесселя $J_0(rs)$ и $J_1(rs)$ через функции Уиттекера $M_{0,0}(2irs)$ и $M_{0,1}(2irs)$ соответственно, приходим в формулах (1.16) —

(1.19) к интегралам от произведения функций Уиттекера, которые можно вычислить в смысле главного значения [10]. В результате получаем

$$\sigma_z^*(r,z) = -2^{-(k+5)} CPz^{-2}(\Upsilon_+^{(3)}\Sigma_{1,2,4,7}^- + \Upsilon_-^{(3)}\Sigma_{1,2,4,7}^+) \tag{1.21}$$

$$\Sigma_{1,\varkappa,\lambda,\mu}^{\pm} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, {}_3F_2\left(\frac{1}{2},\ n+\varkappa,\ k+n+\lambda;\ 1,\ \frac{1}{2}(\mu+k\pm q)+n;\ -\frac{ir}{z}\right)$$

Здесь и в дальнейшем обозначения

$$a_n\, {}_3F_2\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3;\ \beta_1,\beta_2;\ -\frac{ir}{z}\right) = \frac{\left(1+\frac{ir}{z}\right)^n}{2^n n!}\frac{\Gamma(\alpha_2)\Gamma(\alpha_3)}{\Gamma(\beta_2)} \times$$
$$\times\, {}_3F_2\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3;\ \beta_1,\beta_2;\ -\frac{ir}{z}\right)$$

$$\tau_{rz}^* = 2^{-(k+6)} CPrz^{-3}\{{}^1/_2(1+k+q)\Upsilon_+^{(3)}\Sigma_{3,2,4,7}^- + {}^1/_2(1+k-q)\Upsilon_-^{(3)}\Sigma_{3,2,4,7}^+ -$$
$$- {}^1/_2\Upsilon_+^{(3)}\Sigma_{3,3,5,9}^- - {}^1/_2\Upsilon_-^{(3)}\Sigma_{3,3,5,9}^+ - [{}^1/_4(k^2-q^2+3) + {}^1/_2 q + k]\Upsilon_+^{(3)}\Sigma_{3,2,4,9}^- -$$
$$- [{}^1/_4(k^2-q^2+3) + {}^1/_2 q + k]\Upsilon_-^{(3)}\Sigma_{3,2,4,9}^+\} \tag{1.22}$$

$$\Sigma_{3,\varkappa,\lambda,\mu}^{\pm} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, {}_3F_2\left(\frac{3}{2},\ n+\varkappa,\ k+n+\lambda;\ 3,\ \frac{1}{2}(\mu+k\pm q)+n;\ -\frac{iz}{z}\right)$$

где $r < z$. Для этой же области значений r и z перемещения будут такими:

$$w^*(r,z) = (1-\nu)CP\,[2^{k+3}Kk(1+k)z^{k+1}]^{-1}\{{}^1/_2(1+k-q)\Upsilon_+^{(1)}\Sigma_{1,2,2,5}^- +$$
$$+ {}^1/_2(1+k+q)\Upsilon_-^{(1)}\Sigma_{1,2,2,5}^+ + {}^1/_2(k+q-1)\,q\Upsilon_+^{(1)}\Sigma_{1,1,1,3}^- -$$
$$- {}^1/_2(k-q-1)\,q\Upsilon_-^{(1)}\Sigma_{1,1,1,3}^+ - [{}^1/_4(k^2-q^2-1) + {}^1/_2 q]\,q\Upsilon_+^{(1)}\Sigma_{1,1,1,5}^- +$$
$$+ [{}^1/_4(k^2-q^2-1) - {}^1/_2 q]\,q\Upsilon_-^{(1)}\Sigma_{1,1,1,5}^+\} \tag{1.23}$$

$$u^*(r,z) = -(1-\nu)CPr\,[2^{k+5}Kkz^{k+2}]^{-1}\{{}^1/_2(k+q-1)\Upsilon_+^{(1)}\Sigma_{3,2,2,5}^- +$$
$$+ {}^1/_2(k-q-1)\Upsilon_-^{(1)}\Sigma_{3,2,2,5}^+ - {}^1/_2(1+k-q)(1+k)^{-1}\Upsilon_+^{(1)}\Sigma_{3,3,3,7}^- -$$
$$- {}^1/_2(1+k+q)(1+k)^{-1}\Upsilon_-^{(1)}\Sigma_{3,3,3,7}^+ - [{}^1/_4(k^2-q^2-1) + {}^1/_2 q]\Upsilon_+^{(1)}\Sigma_{3,2,2,7}^- -$$
$$- [{}^1/_4(k^2-q^2-1) - {}^1/_2 q]\Upsilon_-^{(1)}\Sigma_{3,2,2,7}^+\} \tag{1.24}$$

Если же в равенствах (1.16)—(1.19) функцию Уиттекера $W_{\lambda,\mu}(2zs)$ выразить через функции Уиттекера $M_{\lambda,\pm\mu}(2zs)$, а функции Бесселя $J_0(rs)$ и $J_1(rs)$ через функции Уиттекера $W_{0,0}(\pm 2irs)$ и $W_{0,1}(\pm 2irs)$ соответственно, то, используя ту же формулу (7.625 (1) [10]), получаем для области $z < r$

$$\sigma_z^* = -2^{-(k+5)}CP\pi^{-1/2}\{i\Gamma(k+2)\Upsilon_+^{(3)}\Upsilon_-^{(3)}[S_{-(1+k),2,{}^5/_2}^+ - S'^{+}_{-(1+k),2,{}^5/_2}] +$$
$$+ \Gamma(-k-2)\Upsilon_+^{(3)}\Gamma^{-1}[{}^1/_2(-1-k-q)]\,z^{k+2}r^{-(k+4)}\,[e^{{}^1/_2(k+3)\pi i}S_{(k+3),(k+4),(k+{}^9/_2)}^+ +$$
$$+ l^{-{}^1/_2(k+3)\pi i}S'^{+}_{(k+3),(k+4),(k+{}^9/_2)}] + i\Gamma(k+2)\Upsilon_+^{(3)}\Upsilon_-^{(3)}[S_{-(1+k),2,{}^5/_2}^- - S'^{-}_{-(1+k),2,{}^5/_2}] +$$
$$+ \Gamma(-k-2)\Upsilon_-^{(3)}\Gamma^{-1}[{}^1/_2(-1-k+q)]\,z^{k+2}r^{-(k+4)} \times$$
$$\times [e^{{}^1/_2(k+3)\pi i}S_{(k+3),(k+4),(k+{}^9/_2)}^- + e^{-{}^1/_2(k+3)\pi i}S'^{-}_{(k+3),(k+4),(k+{}^9/_2)}]\} \tag{1.25}$$

$$S_{\varkappa,\lambda,\mu}^{\pm} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n\, {}_3F_2\left({}^1/_2(\pm q+\varkappa),\ \ n+\lambda,\ n+\lambda;\ \varkappa,\ n+\mu;\ \frac{z}{ir}\right)$$

$$S'^{\pm}_{\varkappa,\lambda,\mu} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n\, {}_3F_2\left({}^1/_2(\pm q+\varkappa),\ n+\lambda,\ n+\lambda;\ \varkappa,n+\mu;\ -\frac{z}{ir}\right).$$

Здесь и далее

$$b_n\, {}_3F_2\left(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \beta_1, \beta_2; \frac{z}{ir}\right) = \frac{\left(1-\frac{z}{ir}\right)^n}{2^n n!} \frac{\Gamma(\alpha_2)\Gamma(\alpha_3)}{\Gamma(\beta_2)}\, {}_3F_2\left(\alpha_1, \alpha_2', \alpha_3; \beta_1, \beta_2; \frac{z}{ir}\right)$$

$$c_n\, {}_3F_2\left(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \beta_1, \beta_2; -\frac{z}{ir}\right) = \frac{\left(1+\frac{z}{ir}\right)^n \Gamma(\alpha_2)\Gamma(\alpha_3)}{2^n n!\,\Gamma(\beta_2)} \times$$

$$\times\, {}_3F_2\left(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \beta_1, \beta_2; -\frac{z}{ir}\right)$$

$$\tau_{rz}^* = 2^{-(k+3)} CP\pi^{-1/2} \{{}^1/_2(1+k+q)\Gamma(k+2)\gamma_+^{(3)}\gamma_-^{(3)}(rz)^{-1} i\, [N'^{+}_{-(1+k),\,2,\,3/2} -$$
$$- N^{-}_{-(1+k),\,2,\,3/2}] + {}^1/_2(1+k+q)\Gamma(-k-2)\gamma_+^{(3)}\Gamma^{-1}[{}^1/_2(-1-k-q)] \times$$
$$\times r^{-(k+3)} z^{k+1} [e^{-1/2(k+1)\pi i} N^{1+}_{(3+k),\,(k+4),\,(k+7/2)} + e^{1/2(k+1)\pi i} N^{+}_{(k+3),\,(k+4),\,(k+7/2)}] +$$
$$+ {}^1/_2(1+k-q)\Gamma(k+2)\gamma_+^{(3)}\gamma_-^{(3)}(rz)^{-1} i\, [N'^{-}_{-(1+k),\,2,\,3/2} - N^{-}_{-(1+k),\,2,\,3/2}] +$$
$$+ {}^1/_2(1+k-q)\gamma_-^{(3)}\Gamma(-k-2)\Gamma^{-1}[{}^1/_2(-1-k+q)]\, z^{k+1} r^{-(k+3)} \times$$
$$\times [e^{-1/2(k+1)\pi i} N'^{-}_{(k+3),\,(k+4)\,(k+7/2)} + c^{1/2(k+1)\pi i} N^{-}_{(k+3),\,(k+4),\,(k+7/2)}] - {}^1/_2\Gamma(k+2) \times$$
$$\times \gamma_+^{(3)}\gamma_-^{(3)} r^{-2} i\, [N'^{+}_{-(1+k),\,3,\,5/2} - N^{+}_{-(1+k),\,3,\,5/2}] - {}^1/_2\Gamma(-k-2)\Gamma^{-1}[{}^1/_2(-1-k-q)] \times$$
$$\times \gamma_+^{(3)} z^{k+2} r^{-(k+4)} [e^{-1/2(k+2)\pi i} N'^{+}_{(k+3),\,(k+5),\,(k+9/2)} + e^{1/2(k+2)\pi i} N^{+}_{(k+3),\,(k+5),\,(k+9/2)}] -$$
$$- {}^1/_2\Gamma(k+2)\gamma_+^{(3)}\gamma_-^{(3)} i\, [N'^{-}_{-(1+k),\,3,\,5/2} - N^{-}_{-(1+k),\,3,\,5/2}] - {}^1/_2\Gamma(-k-2) \times$$
$$\times \Gamma^{-1}[{}^1/_2(-1-k+q)]\gamma_-^{(3)} z^{k+2} r^{-(k+4)} [e^{-1/2(k+2)\pi i} N'^{-}_{(k+3),\,(k+5),\,(k+9/2)} + e^{1/2(k+2)\pi i} \times$$
$$\times N^{-}_{(k+3),\,(k+5),\,(k+9/2)}] - [{}^1/_4(k^2-q^2+3) + {}^1/_2 q + k]\Gamma(k+2)\Gamma^{-1}[{}^1/_2(5+$$
$$+ k + q)]\gamma_+^{(3)}(rz)^{-1} i\, [M'^{+}_{-(3+k),\,2,\,3/2} - M^{+}_{-(3+k),\,2,\,3/2}] - [{}^1/_4(k^2-q^2+3+$$
$$+ {}^1/_2 q + k)]\Gamma(-k-2)\Gamma^{-1}[{}^1/_2(1-k-q)\gamma_+^{(3)} z^{k+1} r^{-(3+k)} [e^{-1/2(k+1)\pi i} \times$$
$$\times M'^{+}_{(k+1),\,(k+4),\,(k+7/2)} + e^{1/2(k+1)\pi i} M^{+}_{(1+k),\,(k+4),\,(k+7/2)}] - [{}^1/_4(k^2-q^2+3) -$$
$$- {}^1/_2 q + k]\Gamma(k+2)\Gamma^{-1}[{}^1/_2(5+k+q]\gamma_+^{(3)}(rz)^{-1} i \times [M'^{-}_{-(k+3),\,2,\,3/2} -$$
$$- M^{-}_{-(k+3),\,2,\,3/2}] - [{}^1/_4(k^2-q^2+3) - {}^1/_2 q + k]\Gamma(-k-2)\Gamma^{-1}[{}^1/_2(1-$$
$$- k + q)]\gamma_-^{(3)} z^{k+1} r^{-(k+3)} [e^{-1/2(k+1)\pi i} M'^{-}_{(1+k),\,(k+4),\,(k+7/2)} + e^{1/2(k+1)\pi i} \times$$
$$\times M^{-}_{(k+1),\,(k+4),\,(k+7/2)}] \qquad (1.26)$$

$$N^{\pm}_{\varkappa,\lambda,\mu} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n\, {}_3F_2\left({}^1/_2(\pm q + \varkappa),\ n+\lambda,\ n+(\lambda-2);\ \varkappa,\ n+\mu; \frac{z}{ir}\right)$$

$$N'^{\pm}_{\varkappa,\lambda,\mu} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n\, {}_3F_2\left({}^1/_2(\pm q + \varkappa),\ n+\lambda,\ n+(\lambda-2);\ \varkappa,\ n+\mu;\ -\frac{z}{ir}\right)$$

$$M^{\pm}_{\varkappa,\lambda,\mu} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n\, {}_3F_2\left({}^1/_2(\pm q + \varkappa),\ n+\lambda,\ n+(\lambda-2);\ \varkappa+2,\ n+\mu;\ \frac{z}{ir}\right)$$

$$M'^{\pm}_{\varkappa,\lambda,\mu} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n\, {}_3F_2\left({}^1/_2(\pm q + \varkappa),\ n+\lambda,\ n+(\lambda-2);\ \varkappa+2,\ n+\mu;\ \frac{z}{ir}\right)$$

Перемещения в области $z < r$ будут

$$w^*(r, z) = (1-\nu)CP\,[2^{k+3}Kk(1+k)\sqrt{\pi}]^{-1}\{{}^1/_2(1+k-q)\Gamma(k)\gamma_+^{(1)}\gamma_-^{(1)} \times$$
$$\times z^{1-k} r^{-2} i\, [S'^{+}_{(1-k),\,2,\,5/2} + S^{+}_{(1-k),\,2,\,5/2}] + (1+k-q)\Gamma(-k)\gamma_+^{(1)} \times$$
$$\times \Gamma^{-1}[{}^1/_2(1-k-q)]\, zr^{-2} i\, [S'^{+}_{(1+k),\,(k+2),\,(k+5/2)} + S^{+}_{(1+k),\,(k+2),\,(k+5/2)}] + {}^1/_2(1+$$

$$+ k + q)\,\Gamma(k)\,\gamma_{+}^{(1)}\gamma_{-}^{(1)} z^{1-k} r^{-2} i\,[S'^{-}_{(1-k),\,2,\,5/2} + S^{-}_{(1-k),\,2,\,5/2}] + (1 + k + q)\,\gamma_{-}^{(1)} \times$$

$$\times\,\Gamma(-k)\,\Gamma^{-1}[{}^{1}/{}_{2}(1 - k + q)]\,z r^{-2} i\,[S'^{-}_{(1+k),\,(k+2),\,(k+5/2)} + S^{-}_{(1+k),\,(k+2),\,(k+5/2)}] +$$

$$+ {}^{1}/{}_{2}(k + q - 1)\,q\,\Gamma(k)\,\gamma_{+}^{(1)}\gamma_{-}^{(1)} z^{-k} r^{-1}\,[S^{+}_{(1-k),\,1,\,3/2} - S'^{+}_{(1-k),\,1,\,3/2}] +$$

$$+ {}^{1}/{}_{2}(k + q - 1)\,q\,\Gamma(-k)\,\gamma_{+}^{(1)}\Gamma^{-1}[{}^{1}/{}_{2}(1 - k - q)]\,r^{-(1+k)}\,[e^{-k\pi/2i} \times$$

$$\times\,S'^{+}_{(k+1),\,(k+1),\,(k+3/2)} + e^{1/2\,k\pi i} S^{+}_{(k+1),\,(k+1),\,(k+3/2)})] - {}^{1}/{}_{2}(k - q - 1)\,q\,\Gamma(k)\,\gamma_{-}^{(1)}\gamma_{+}^{(1)} \times$$

$$\times\,z^{-k} r^{-1}\,[S^{-}_{(1-k),\,1,\,3/2} - S'^{-}_{(1-k),\,1,\,3/2}] - {}^{1}/{}_{2}(k - q - 1)\,q\,\Gamma(-k)\,\gamma_{-}^{(1)}\Gamma^{-1}[{}^{1}/{}_{2}(1 -$$

$$- k + q)]\,r^{-(1+k)}\,[e^{-1/2\,k\pi i} S'^{-}_{(k+1),\,(k+1),\,(k+3/2)} + e^{1/2\,k\pi i} S^{-}_{(k+1),\,(k+1)\,(k+3/2)}] -$$

$$- [{}^{1}/{}_{4}(k^{2} - q^{2} - 1) + {}^{1}/{}_{2}q]\,q\Gamma(k)\,\gamma_{+}^{(1)}\gamma_{-}^{(3)} z^{-k} r^{-1}\,[L^{+}_{-(1+k),\,1,\,3/2} - L'^{-}_{-(1+k),\,1,\,3/2}] -$$

$$- [{}^{1}/{}_{4}(k^{2} - q^{2} - 1) + {}^{1}/{}_{2}q]\,q\Gamma(-k)\,\gamma_{+}^{(1)}\Gamma^{-1}[{}^{1}/{}_{2}(3 - k - q)]\,r^{-(k+1)} \times$$

$$\times\,[e^{-1/2\,k\pi i} L'^{+}_{(k-1),\,(k+1),\,(k+3/2)} + e^{1/2\,k\pi i} L^{+}_{(k-1),\,(k+1),\,(k+3/2)}] +$$

$$+ [{}^{1}/{}_{4}(k^{2} - q^{2} - 1) - {}^{1}/{}_{2}q]\,q\Gamma(k)\,\gamma_{-}^{(1)}\gamma_{+}^{(3)} z^{-k}\,\{L^{-}_{-(k+1),\,1,\,3/2} - L''^{-}_{(k+1),\,1,\,3/2}] +$$

$$+ [{}^{1}/{}_{4}(k^{2} - q^{2} - 1) - {}^{1}/{}_{2}q]\,q\Gamma(-k)\,\gamma_{-}^{(1)}\Gamma^{-1}[{}^{1}/{}_{2}(3 - k + q)\,r^{-(k+1)}\,[e^{-1/2\,k\pi i} \times$$

$$\times\,L'^{-}_{(k-1),\,(k+1,\,(k+3/2)} + e^{1/2\,k\pi i} L^{-}_{(k-1),\,(k+1),\,(k+3/2)}]\} \qquad (1.27)$$

$$L^{\pm}_{\varkappa,\,\lambda,\,\mu} = \sum_{n=0}^{\infty} b_{n}\,{}_{3}F_{2}\left({}^{1}/{}_{2}(\pm q + \varkappa),\ n + \lambda,\ n + \lambda;\ \varkappa + 2;\ n + \mu;\ \frac{z}{ir}\right)$$

$$L^{\pm}_{\varkappa,\,\lambda,\,\mu} = \sum_{n=0}^{\infty} C_{n}\,{}_{3}F_{2}\left({}^{1}/{}_{2}(\pm q + \varkappa,\ n + \lambda,\ n + \lambda;\ \varkappa + 2,\ n + \mu;\ -\frac{z}{ir}\right)$$

$$u^{*}(r, z) = -(1 - \nu) CP\,(2^{k+3} Kk\sqrt{\pi})^{-1}\{{}^{1}/{}_{2}(k + q - 1)\,\Gamma(k)\,\gamma_{+}^{(1)}\gamma_{-}^{(1)} z^{-k} r^{-1} i \times$$

$$\times\,[N'^{+}_{(1-k),\,2,\,3/2} - N^{+}_{(1-k),\,2,\,3/2}] + {}^{1}/{}_{2}(k + q - 1)\,\Gamma(-k)\,\gamma_{+}^{(1)}\Gamma^{-1}[{}^{1}/{}_{2}(1 - k - q)] \times$$

$$\times\,r^{-(k+1)}\,[e^{1/2\,(1-k)\,\pi i} N'^{+}_{(k+1),\,(k+2),\,(k+3/2)} + e^{-1/2\,(1-k)\,\pi i} N^{+}_{(k+1),\,(k+2),\,(k+3/2)}] +$$

$$+ {}^{1}/{}_{2}(k - q - 1)\,\Gamma(k)\,\gamma_{-}^{(1)}\gamma_{+}^{(1)} z^{-k} r^{-1} i\,[N'^{-}_{(1-k),\,2,\,3/2} - N^{-}_{(1-k),\,2,\,3/2}] +$$

$$+ {}^{1}/{}_{2}(k - q - 1)\,\Gamma(-k)\,\gamma_{-}^{(1)}\Gamma^{-1}[{}^{1}/{}_{2}(1 - k + q)]\,r^{-(k+1)}\,[e^{1/2\,(1-k)\,\pi i} \times$$

$$\times\,N'^{-}_{(k+1),\,(k+2),\,(k+3/2)} + e^{-1/2\,(1-k)\,\pi i} N^{-}_{(k+1),\,(k+2),\,(k+3/2)}] - {}^{1}/{}_{2}(1 + k - q)(1 + k)^{-1} \times$$

$$\times\,\Gamma(k)\,\gamma_{+}^{(1)}\gamma_{-}^{(1)} z^{1-k} r^{-2}\,[N'^{+}_{(1-k),\,3,\,5/2} + N^{+}_{(1-k),\,3,\,5/2}] - {}^{1}/{}_{2}(1 + k - q)(1 + k)^{-1} \times$$

$$\times\,\Gamma(-k)\,\gamma_{+}^{(1)}\Gamma^{-1}[{}^{1}/{}_{2}(1 - k - q)]\,z r^{-(k+2)}\,[e^{-1/2\,k\pi i} N'^{+}_{(1+k),\,(k+3),\,(k+5/2)} +$$

$$+ e^{1/2\,k\pi i} N^{+}_{(k+1),\,(k+3),\,(k+5/2)}] - {}^{1}/{}_{2}(1 + k + q)(1 + k)^{-1}\,\Gamma(k)\,\gamma_{-}^{(1)}\gamma_{+}^{(1)} z^{1-k} r^{-2} \times$$

$$\times\,[N'^{-}_{(1-k),\,3,\,5/2} + N^{-}_{(1-k),\,3,\,5/2}] - {}^{1}/{}_{2}(1 + k + q)(1 + k)^{-1}\,\Gamma(-k)\,\gamma_{-}^{(1)} \times$$

$$\times\,\Gamma^{-1}[{}^{1}/{}_{2}(1 - k + q)]\,z\,r^{-(k+2)}\,[e^{-1/2\,k\pi i} N'_{(1+k),\,(k+3),\,(k+5/2)} + e^{1/2\,k\pi i} N^{-}_{(k+1),\,(k+3),\,(k+5/2)}] -$$

$$- [{}^{1}/{}_{4}(k^{2} - q^{2} - 1) + {}^{1}/{}_{2}q]\,\Gamma(k)\,\gamma_{+}^{(1)}\gamma_{-}^{(3)} z^{-k} r^{-1} i \times$$

$$\times\,[E'^{+}_{-(k+1),\,2,\,3/2} - E^{+}_{-(k+1),\,2,\,3/2}] - [{}^{1}/{}_{4}(k^{2} - q^{2} - 1) + {}^{1}/{}_{2}q]\,\Gamma(-k)\,\gamma_{+}^{(1)}\Gamma^{-1}[{}^{1}/{}_{2}(3 -$$

$$- k - q)]\,r^{-(k+1)}\,[e^{1/2(1-k)\pi i} E'^{+}_{(k-1),\,(k+2),\,(k+3/2)} + e^{-1/2(1-k)\pi i} E^{+}_{(k-1),\,(k+2),\,(k+3/2)}] -$$

$$- [{}^{1}/{}_{4}(k^{2} - q^{2} - 1) - {}^{1}/{}_{2}q]\,\Gamma(k)\,\gamma_{-}^{(1)}\gamma_{+}^{(3)} z^{-k} i\,[E'^{-}_{-(k+1),\,2,\,3/2} - E^{-}_{-(k+1),\,2,\,3/2}] - [{}^{1}/{}_{4}(k^{2} -$$

$$- q^{2} - 1) - {}^{1}/{}_{2}q]\,\Gamma(-k)\,\gamma_{-}^{(1)}\Gamma^{-1}[{}^{1}/{}_{2}(3 - k + q)]\,r^{k-1}\,[e^{1/2(1-k)\pi i)} E'^{-}_{(k-1),\,(k+2),\,(k+3/2)} +$$

$$+ e^{-1/2(1-k)\pi i} E^{-}_{(k-1),\,(k+2),\,(k+3/2)}]\} \qquad (\ \ 8)$$

$$E^{\pm}_{\varkappa,\lambda,\mu} = \sum_{n=0}^{\infty} b_{n}\,{}_{3}F_{2}\left({}^{1}/{}_{2}(\pm q + \varkappa), n + \lambda, n + (\lambda - 2);\ \varkappa + 2,\ n + \mu;\ \frac{z}{ir}\right)$$

$$E'^{\pm}_{\varkappa,\lambda,\mu} = \sum_{n=0}^{\infty} C_{n}\,{}_{3}F_{2}\left({}^{1}/{}_{2}(\pm q + \varkappa), n + \lambda, n + (\lambda - 2);\ \varkappa + 2,\ n + \mu;\ -\frac{z}{ir}\right)$$

Ввиду громоздкости не приводятся формулы для σ_r^* и σ_θ^*. Вывод этих формул из равенств (1.12), (1.13) аналогичен приведенному выше.

Итак, решения поставленной задачи представляются во всем полупространстве в интегральной форме формулами (1.16)—(1.19), которые выражаются аналитическими функциями в виде рядов по обобщенным гипергеометрическим функциям (1.12) — (1.24) для области $r < z$, и (1.25) — (1.28) для области $r > z$. При этом функции, представляющие решения в разных областях, не продолжают аналитически одна другую.

2. Из интегральной формы решения можно получить асимптотическое разложение для полученного решения. Так, пользуясь асимптотическим разложением функций Уиттекера, получаем асимптотическое разложение для σ_z^* при больших z и фиксированных r

$$\sigma_z^* \sim -CPz^{-2}\left[\frac{3+k+q}{2^{1/2(7+k-q)}}F\left(\frac{5+k+q}{4}, \frac{7+k+q}{4}; 1; -\frac{r^2}{z^2}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{3+k-q}{2^{1/2(7-k+q)}}F\left(\frac{5+k-q}{4}, \frac{7+k-q}{4}; 1; -\frac{r^2}{z^2}\right)\right] \tag{2.1}$$

Для малых значений z и фиксированных r имеет место следующее асимптотическое разложение:

$$\sigma_z^* \sim -CP\left\{\frac{2^{-(k+2)}\Gamma(k+2)}{\gamma_+^{(3)}\gamma_-^{(3)}}\frac{r}{(z^2+r^2)^{3/2}}+\left[\frac{\Gamma(-k-2)\Gamma(k+4)}{\gamma_+^{(3)}\Gamma[{}^1/_2(-1-k-q)]}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{\Gamma(-k-2)\Gamma(k+4)}{\gamma_-^{(3)}\Gamma[{}^1/_2(-1-k+q)]}\right]\frac{z^{k+2}}{2(z^2+r^2)^{1/2(k+4)}}F\left(\frac{k+4}{2}, \frac{-k-3}{2}; 1; \frac{r^2}{z^2+r^2}\right)\right\} \tag{2.2}$$

Из последнего следует, что $\sigma_z^* \to 0$ при $z \to 0$ и $r \neq 0$. То, что найденное решение удовлетворяет условиям на границе (1.28), легко видеть и из точного представления решения формулами (1.23), (1.24), так как

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n\,{}_3F_2\left(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \beta_1, \beta_2; -\frac{z}{ir}\right)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n\,{}_3F_2\left(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \beta_1, \beta_2; \frac{z}{ir}\right) \quad \text{при } z \to 0$$

стремятся к одному и тому же пределу и обобщенные гипергеометрические функции входящие в суммы, имеют одинаковые параметры. Этот предел равен

$$\frac{\Gamma(\alpha_2)\Gamma(\alpha_3)}{\Gamma(\beta_2)}\,{}_2F_1(\alpha_2, \alpha_3; \beta_2; {}^1/_2)$$

Из (1.27) имеем при $r = 0$, что $\sigma_z^* \sim Az^{-2}$, где A — некоторая постоянная. Такое же поведение σ_z^* на оси z можно получить из точного представления решения формулой (1.20), а именно

$$\sigma_z^*|_{r=0} = -\frac{3P}{2\pi}Mz^{-2}$$

Здесь

$$M = \frac{(k+3)(k+2)}{6}\left[\frac{1}{(5+k-q)(3+k-q)}F\left(2, k+4; \frac{7+k-q}{2}; \frac{1}{2}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{(5+k+q)(3+k+q)}F\left(2, k+4; \frac{7+k+q}{2}; \frac{1}{2}\right)\right]$$

Приводим значения постоянной M, вычисленной для некоторых значений ν и k

ν	k	q	M
	$^1/_8$	1.026980	1.063809
$^1/_3$	$^1/_2$	1.060670	1.215811
	$^7/_8$	1.026980	1.308136
	$^1/_8$	1.037821	1.030632
$^1/_4$	$^1/_2$	1.118034	1.349478
	$^7/_8$	1.153698	1.452385

Для граничной плоскости $z = 0$ перемещения получаются в виде

$$w^*(r, 0) = \frac{(1-\nu)\, CPq \sin(^1/_2\pi q)\, \Gamma(^1/_2 + {}^1/_2 k)}{4K(1+k)\, r^{1+k} \sqrt{\pi}\, \Gamma(1 + {}^1/_2 k)}$$

$$u^*(r, 0) = \frac{(1-\nu)\, CP \cos(^1/_2\pi q)\, \Gamma(1 + {}^1/_2 k)}{2Kkr^{1+k} \sqrt{\pi}\, \Gamma(^1/_2 + {}^1/_2 k)} \tag{2.3}$$

Первая из формул (2.3) была получена ранее [11]. При $k = 0$ из (1.20) получаем

$$\sigma_z^*(r, z) = -\frac{P}{2^4\pi z^2}\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, {}_3F_2\left(^1/_2, n+2, n+4; 1, n+3; -\frac{ir}{z}\right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, {}_3F_2\left(^1/_2, n+2, n+4; 1, n+4; -\frac{ir}{z}\right)\right].$$

Отсюда при $r = 0$ получаем ранее известный результат [12]

$$\sigma_z^*(0, z) = -3P\,(2\pi z^2)^{-1}$$

Известные уже результаты [12] получаются также из формул (2.1) при $k = 0$.

Поступила 13 I 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Коренев Б. Г. Некоторые вопросы расчета балок и плит, лежащих на упругом основании. Сб. тр. Моск. инж.-строит. ин-та, 1956, № 14.
2. Лехницкий С. Г. Радиальное распределение напряжений в клине и полуплоскости с переменным модулем упругости. ПММ, 1962, т. 26, вып. 1.
3. Моссаковский В. И. Давление круглого штампа на упругое полупространство, модуль упругости которого является степенной функцией глубины. ПММ, 1958, т. 22, вып. 1.
4. Попов Г. Я. Об одном способе решения осесимметричной контактной задачи теории упругости. ПММ, 1961, т. 25, вып. 1; Некоторые свойства классических многочленов и их применение к контактным задачам. ПММ, 1963, т. 27, вып. 5.
5. Попов Г. Я., Ростовцев Н. А. Контактные (смешанные) задачи теории упругости. Тр. II Всес. съезда по теор. и прикл. механике. Вып. 3. М., «Наука», 1963.
6. Ростовцев Н. А. Об одном интегральном уравнении, встречающемся в задаче о давлении жесткого фундамента на неоднородный грунт. ПММ, 1961, т. 25, вып. 1.
7. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости для тел с переменным модулем упругости. Всес. совещ. по примению методов теор. функций комплексного переменного к задачам математ. физики. Тезисы докладов. Тбилиси, 1961.
8. Александров А. Я. Решение осесимметричных задач теории упругости при помощи зависимостей между осесимметричным и плоским состояниями. ПММ, 1961, т. 25, вып. 5.
9. Раков А. К., Рвачев В. Л. Контактная задача теории упругости для полупространства, модуль упругости которого есть степенная функция глубины. Доповіді АН УССР, 1961, № 3.
10. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Изд. 4-е М., Физматгиз, 1963.
11. Ростовцев Н. А. К теории упругости неоднородной среды. ПММ, 1964, т. 28, вып. 4.
12. Тимошенко С. П. Теория упругости. Л., Гостехиздат, 1934.
13. Уиттекер Е. Т., Ватсон Д. Н. Курс современного анализа. ч. 2, М.— Л., Гостехиздат, 1934.