Прикладная математика и механика. Том 35, 1971

О МАКСИМАЛЬНОМ ЗНАЧЕНИИ РАДИУСА ПЛОЩАДКИ КОНТАКТА ШТАМПА СО СЛОЕМ

В. Д. Ламзюк, А. К. Приварников

(Днепропетровск)

Приводится решение следующей задачи теории упругости для бесконечного невесомого однородного и изотропного слоя: на одну из границ слоя действует нормальная сосредоточенная сила, которая прижимает его к неподвижному гладкому штампу, представляющему собой выпуклое тело вращения, ось которого совпадает с линией действия сосредоточенной силы; требуется определить наибольшее возможное значение радиуса площадки контакта штампа со слоем для различных штампов и различных значений величины сосредоточенной силы.

1. Отнесем слой к цилиндрической системе координат $r\theta z$ с началом в точке приложения нормальной сосредоточенной силы Q. Ось z направим перпендикулярно границе слоя в сторону, противоположную силе. Тогда уравнение границы слоя, которая соприкасается со штампом, будет $z = -h$, где h — толщина слоя. В дальнейшем предполагается, что основание штампа — выпуклая поверхность, описываемая уравнением $z = f(r)$, а боковая поверхность — цилиндрическая радиуса R. Будем считать, что функция $f(r)$ в интервале $[0, R]$ имеет, по крайней мере, вторую непрерывную производную. Вследствие выпуклости штампа площадка контакта со слоем будет кругом, радиус a которого удовлетворяет неравенству $a \leqslant R$. Случай $a = R$ будем называть случаем полного погружения штампа в слой.

Для нормальной компоненты смещения точек границы слоя $z = -h$, а также нормальных и касательных напряжений на этой границе введем обозначения $w(r)$, $\sigma_z(r)$, $\tau_{rz}(r)$. Тогда в соответствии с условием задачи при $z = -h$

$$dw / dr = f'(r) \qquad (0 \leqslant r < a) \tag{1.1}$$

$$\sigma_z(r) = 0 \qquad (r > a) \tag{1.2}$$

$$\tau_{rz}(r) = 0 \qquad (0 \leqslant r < \infty) \tag{1.3}$$

Основываясь на методе решения граничных задач для слоя при осесимметричной деформации [1,2], нетрудно получить в рассматриваемом случае следующие интегральные представления для функций dw / dr и $\sigma_z(r)$ при $z = -h$:

$$\frac{dw}{dr} = \frac{(1-\nu^2)\,2}{E} \int_0^\infty p\, \frac{Q\pi^{-1}(\operatorname{sh} ph + ph \operatorname{ch} ph) - \alpha(p)(\operatorname{sh} 2ph + 2ph)}{\operatorname{ch} 2ph - 2p^2h^2 - 1} J_1(pr)\,dp \tag{1.4}$$

$$\sigma_z(r) = -\int_0^\infty p\alpha(p) J_0(pr)\,dp, \qquad \alpha(p) = -\int_0^\infty r\sigma_z(r) J_0(pr)\,dr$$

При выводе формул (1.4) предполагалось, что на границах слоя выполняется условие (1.3).

Несобственный интеграл в первом соотношении (1.4) сходится лишь при условии $\alpha(0) = {}^1/_2\, Q\pi^{-1}$, которое, однако, вытекает из условия равновесия слоя ($\Sigma F_z = 0$) и потому всегда выполняется.

Подставим в граничные условия (1.1) и (1.2) вместо dw / dr и $\sigma_z(r)$ соответствующие интегралы (1.4). Придем тогда к парным уравнениям относительно функции $\alpha(p)$, которые после элементарных преобразований можно привести к виду

$$\int_0^\infty p\alpha(p) J_1(pr)\, dp = -\frac{E}{2(1-\nu^2)} f'(r) +$$

$$+\int_0^\infty p\,\frac{\alpha(p)(e^{-2ph}-2p^2h^2-2ph-1)+Q\pi^{-1}(\operatorname{tsh} ph+ph\operatorname{ch} ph)}{\operatorname{ch} 2ph-2p^2h^2-1} J_1(pr)\, dp \qquad (r<a)$$

$$\int_0^\infty p\alpha(p) J_0(pr)\, dp = 0 \quad (r>a) \tag{1.5}$$

Решение парных уравнений (1.5) ищем в виде

$$p\alpha(p) = \int_0^a \chi(x)\sin px\,dx + B\sin pa \tag{1.6}$$

где B — пока произвольная постоянная. Для законности последующих выкладок необходимо считать $\chi(x)$ непрерывной функцией в интервале $[0,a]$.

Традиционным приемом, основанном на использовании свойств функций Бесселя, парные уравнения (1.5) можно свести к интегральному уравнению Абеля

$$\int_0^r \frac{F(x)\,dx}{r\sqrt{r^2-x^2}} = -\frac{E}{2(1-\nu^2)} f'(r)$$

$$F(x) = x\Big[\chi(x) - \frac{2}{\pi}\int_0^\infty p\,\frac{\alpha(e^{-2ph}-2p^2h^2-2ph-1)+\dfrac{Q}{\pi}(\operatorname{sh} ph+ph\operatorname{ch} ph)}{\operatorname{ch} 2ph-2p^2h^2-1}\times$$

$$\times\sin px\,dp\Big]$$

Решение этого уравнения [3]

$$F(x) = -\frac{E}{2(1-\nu^2)}\,\frac{2}{\pi}\,\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{r^2 f'(r)\,dr}{\sqrt{x^2-r^2}}$$

В правой части последнего равенства возьмем интеграл по частям, продифференцируем по x получившееся выражение и сделаем замену переменных $x = r\sin\gamma$. В выражении для $F(x)$ используем соотношения (1.6), после чего поменяем в несобственном интеграле порядок интегрирования.

В результате придем к интегральному уравнению второго рода

$$\chi(x) = -\frac{E}{\pi(1-\nu^2)} \int_0^{1/2\pi} \frac{d}{dr} [rf'(r)]_{r=x\sin\gamma} d\gamma + BK(x, a) + \int_0^a \chi(t) K(x, t)\, dt \tag{1.7}$$

$$K(x, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{(e^{-2ph} - 2p^2h^2 - 2ph - 1)\sin pt + 2pt(\operatorname{sh} ph + ph \operatorname{ch} ph)}{\operatorname{ch} 2ph - 2p^2h^2 - 1} \sin px\, dp \tag{1.8}$$

Очевидно, любое решение этого уравнения непрерывно в интервале $[0, a]$, поскольку ядро и свободный член уравнения непрерывны (напомним, что по условию $f''(r)$ — функция непрерывная в $[0, R]$ и $a \leqslant R$).

Для выяснения роли неопределенной постоянной B в интегральном уравнении (1.7) выразим напряжения $\sigma_z(r)$ на площадке контакта через функцию $\chi(x)$. Для этого подставим во вторую формулу (1.4) $p\alpha(p)$ из соотношения (1.6). Получим

$$\sigma_z(r) = -\int_r^a \frac{\chi(x)\, dx}{\sqrt{x^2 - r^2}} - \frac{B}{\sqrt{a^2 - r^2}} \tag{1.9}$$

На основании обобщенной теоремы о среднем для непрерывной функции $\chi(x)$ в интервале $[0, a]$ первое слагаемое (1.9) при $r \to a$ имеет предел 0. Второе слагаемое при $r \to a$ и $B \neq 0$ неограниченно возрастает. Следовательно, случаю $B > 0$ соответствует полное погружение штампа в слой. Если же штамп погружен в слой неполностью, следует считать $B = 0$.

Из соотношения (1.6) получаем важную формулу

$$\frac{Q}{2\pi} = \int_0^a x\chi(x)\, dx + Ba \tag{1.10}$$

Из (1.10) для полностью погруженного штампа ($a = R$, $B \neq 0$) можно определить постоянную B по известной силе Q, действующей на слой. Для штампа, погруженного в слой неполностью ($B = 0$), последняя формула может быть использована для определения радиуса площадки контакта по известной силе Q или наоборот.

Заметим, что при $h \to \infty$ ядро $K(x, t) \to 0$ равномерно относительно x и t. Поэтому в пределе из уравнения (1.7) получаем точное выражение для функции $\chi(x)$, соответствующей полупространству. Подставляя ее в выражение (1.9) для контактных напряжений $\sigma_z(r)$, получим известное решение осесимметричной контактной задачи для полупространства [4].

2. Пусть $z = f_0(r)$, $r \in [0, R]$ — уравнение поверхности основания какого-либо неплоского штампа, который при значении нормальной силы $Q = Q_0$ неполностью погружен в слой. Пусть a_0 — соответствующее силе Q_0 значение радиуса площадки контакта основания штампа со слоем. Рассмотрим штамп с поверхностью основания $z = kf_0(r)$, где $0 < k < 1$, а $r \in [0, R]$, который погружен в слой настолько, что радиус области контакта $a = a_0$. Очевидно, такое погружение штампа возможно и будет неполным ($B = 0$). Из соотношений (1.7) и (1.10) следует, что в последнем слу-

чае $Q = kQ_0$. Поэтому, если увеличить силу Q до величины Q_*, радиус a площадки контакта может только возрасти. Отсюда следует, что для данного значения силы $Q = Q_0$ максимальное значение радиуса a соответствует штампу с плоским основанием, который неполностью погружен в слой (ниже будет показано, что такое погружение возможно). Обозначим это максимальное значение через A.

Легко показать, что величина A не зависит от силы Q.

В самом деле, при заданной толщине слоя h эта величина должна быть взята такой, чтобы интегральное уравнение (1.7) для штампа с плоским основанием ($f(r)=0$), погруженного в слой неполностью ($B = 0$), допускало нетривиальное решение. Последнее означает, что ядро (1.8) интегрального уравнения при x, $t \in [0, A]$ должно иметь в своем спектре собственное число $\lambda = 1$. Следовательно, величина A зависит лишь от свойства ядра (1.8) и не зависит от силы Q, так как от этой силы не зависит ядро.

Из сказанного выше относительно величины A ясно, что при любом $a < A$ контактная задача для любого выпуклого штампа должна иметь решение, а поэтому соответствующее этому штампу интегральное уравнение (1.7) при $a < A$ также должно иметь решение. Отсюда вытекает, что число A — наименьшее из всех тех значений $A > 0$, для которых $\lambda = 1$ — собственное число ядра $K(x, t)$ $(x, t \in [0, A])$.

Величину A определяли численно методом замены интеграла в однородном интегральном уравнении (1.7) конечной суммой. Использовали при этом квадратурные формулы Гаусса для трех и пяти узлов. В процессе вычислений выяснилось, что ядро $K(x, t)$ $(x, t, \in [0, A])$ неотрицательно и $u_*(x)$ — ограничено [3]

$$u_0(x) = \int^{A} K(x, t)\, dt \qquad (2.1)$$

Для искомой величины получено значение $A = 1.1\, h$. Величина A оказалась конечной, поэтому штамп с плоским основанием, радиус R цилиндрической части которого превосходит A, будет неполностью погружен в слой. Другими словами, при $R > A$ радиус площадки контакта такого штампа со слоем равен A.

Интересно отметить, что авторы работы [5], рассматривая задачу об отставании слоя от полупространства под действием сосредоточенной нормальной силы, получили другим способом для случая абсолютно жесткого полупространства ($R = \infty$) близкое к нашему значение радиуса площадки контакта слоя с основанием: $A = 1.16h$.

Распределение напряжений на площадке контакта плоского штампа слоем при неполном и полном погружении дано ниже в виде значений $-2\ \pi a^2 Q^{-1} \sigma_z(r)$

r/a	0	0.05	0.23	0.50	0.77	0.95	1
$a = A$	6.25	6.19	5.25	2.94	1.18	0.35	0
$a = h$	5.28	5.25	4.57	2.78	1.29	0.67	∞

Здесь даны относительные значения напряжений $\sigma_z(z)$ при $r = 0$ и $r = a\xi_i$ $(i = 1, 2, \ldots, 5)$, где ξ_i—узлы квадратурной формулы Гаусса для интервала $[0, 1]$.

Так как ядро $K(x, t)$ и сопряженное ему ядро $L(x, t) = K(t, x)$ неотрицательны при $x, t \in [0, a]$, $a < A$ и $u_0(x)$-ограничены (функция $u_0(x)$ для ядра $L(x, t)$ строится по формуле (2.1)), можно сделать вывод о характере зависимости между силой Q и соответствующим ей радиусом a площадки контакта со слоем какого-либо штампа с неплоским основанием. Для простоты будем считать, что при любом значении силы Q штамп погружается в слой неполностью, хотя рассуждения справедливы и в общем случае.

Неотрицательное $u_0(x)$-ограниченное ядро имеет [3] единственное положительное собственное значение, которое является простым и наибольшим по модулю из всех собственных чисел ядра. Соответствующая ему собственная функция неотрицательна (с точностью до скалярного множителя).

Пусть $\lambda(a)$ — положительное собственное значение ядра $K(x, t)$ $(x, t \in [0, a])$. Так как действительные собственные числа ядер $K(x, t)$ и $L(x, t)$ совпадают, то $\lambda(a)$ — положительное собственное число и ядра $L(x, t)$. Собственные функции ядер $K(x, t)$ и $L(x, t)$, соответствующие собственному числу $\lambda(a)$, обозначим соответственно через $\varphi(x, a)$ и $\psi(x, a)$. Учитывая, что функции $\varphi(x, a)$ и $\psi(x, a)$ знакопостоянны (неотрицательны) в интервале $[0, a]$, можно показать, что резольвента $\Gamma(x, t, \lambda)$ ядра $K(x, t)$ $(x, t \in [0, a])$ имеет следующее строение [3]:

$$\Gamma(x, t, \lambda) = \frac{C\varphi(x, a)\psi(x, a)}{\lambda - \lambda(a)} + \gamma(x, t, \lambda)$$

Здесь $\gamma(x, t, \lambda)$ — регулярная функция в окрестности $\lambda = \lambda(a)$, а C — положительная постоянная.

Заметим еще, что из оценки снизу [3] для положительного собственного числа неотрицательного ядра $K(x, t)$ $(x, t \in [0, a], a < A)$ следует, что $\lambda(a) < \lambda(A) = 1$.

В интегральном уравнении (1.7) $\lambda = 1$, поэтому решение его можно представить в виде

$$\chi(x) = \Phi(x) + \int_0^a \Phi(t)\Gamma(x, t, 1)\,dt =$$
$$= \frac{C\varphi(x, a)}{1 - \lambda(a)}\int_0^a \Phi(t)\psi(t, a)\,dt + \Phi(x) + \int_0^a \Phi(t)\gamma(x, t, 1)\,dt$$

Здесь $\Phi(x)$ — свободный член уравнения. Для неплоского выпуклого штампа $\Phi(x) \geqslant 0$.

Из последнего соотношения получаем

$$\int_0^a x\chi(x)\,dx = \frac{C}{1 - \lambda(a)}\int_0^a x\varphi(x, a)\,dx \int_0^a \Phi(t)\psi(t, a)\,dt + \ldots$$

При $a \to A$ имеем $\lambda(a) \to \lambda(A) = 1$, а $\varphi(x, a)$, $\psi(x, a)$ и $\Phi(x)$ остаются неотрицательными в $[0, a]$. Поэтому

$$\int_0^a x\chi(x)\,dx \to \infty$$

Но тогда из соотношения (1.10) при $a \to A$ имеем $Q \to \infty$.

Таким образом, в условиях данной задачи никакой конечной силой нельзя погрузить неплоский штамп в слой настолько, чтобы радиус площадки контакта оказался равным A.

Поступила 6 II 1971

ЛИТЕРАТУРА

1 Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. М.— Л., Изд-во АН СССР, 1963.
2. Петришин В. И., Приварников А. К., Шевляков Ю. А. К решению задач для многослойных оснований. Изв. АН СССР, Механика, 1965, № 2.
3. Забрейко П. П., Кошелев А. И., Красносельский М. А., Михлин С. Г., Раковщик Л. С., Стеценко В. Я. Интегральные уравнения. М., «Наука», 1968.
4. Штаерман И. Я. Контактная задача теории упругости. М.— Л., Гостехтеориздат, 1949.
5. Pu S. L., Hussain M. A. Note on unbonded contact between plates and elastic half space. Trans. ASME, Ser. E, J. Appl. Mech., 1970, vol. 37, No. 3.