

ОБ ОДНОМ НЕЛИНЕЙНОМ УРАВНЕНИИ ЭЛЕКТРОГИДРОДИНАМИКИ И МАГНИТОУПРУГОСТИ

К. Ш. Ходжаев

(Ленинград)

Определяются свойства решений уравнения Эмдена — Фаулера с отрицательной степенью неизвестной функции в нелинейном члене. Рассматриваются также краевые задачи, в которых одно из условий соответствует требованию ограниченности решения при значении аргумента, равном нулю или бесконечности (это требование характерно для ряда задач механики). Данные краевые задачи могут иметь любое число и даже счетное множество решений; последнему соответствует зависимость решений от параметра редко встречающегося вида.

При $n > 0$ (n — степень неизвестной функции в нелинейном члене) уравнение Эмдена — Фаулера подробно изучено [1,2]. Задачи электрогидродинамики и нелинейной магнитоупругости, приводящие к уравнению Эмдена — Фаулера при $n = -2$, рассматривались в работах [3-5]. В данной работе разбирается еще один пример: равновесие тяжелых нитей с током. Эта задача приводит к случаю $n = -1$, причем нелинейный член может иметь любой знак в зависимости от того, притягиваются или отталкиваются нити.

1. Сведение к автономной системе; свойства ее решений. Уравнение Эмдена — Фаулера имеет вид [1]

$$\frac{d}{d\rho} \left(\rho^\alpha \frac{dw}{d\rho} \right) \pm \rho^\sigma w^n = 0 \quad (1.1)$$

Рассматриваем значения $w > 0$. При n рациональном с нечетным знаменателем (когда существуют вещественные решения $w < 0$) заменой $w_1 = -w$ случай $w < 0$ сводится к одному из последующих. Считаем также $\rho > 0$. Введем новые аргумент τ и неизвестную η соотношениями $\rho = ae^{-\beta\tau}$, $w = b\eta e^{-\delta\tau}$. Придем к уравнению

$$\eta'' - (2\delta - \beta + \alpha\beta)\eta' + \delta(\delta - \beta + \alpha\beta)\eta \pm a^{2+\sigma-\alpha} b^{n-1} \beta^2 \eta^n \exp\{[\delta(1-n) - \beta(2+\sigma-\alpha)]\tau\} = 0 \quad (\eta' = d\eta/d\tau) \quad (1.2)$$

Примем

$$a^{2+\sigma-\alpha} b^{n-1} \beta^2 = 1, \quad \delta = 1, \quad (2 + \sigma - \alpha)\beta = 1 - n$$

случай $2 + \sigma - \alpha = 0$ будет рассмотрен особо). Тогда τ не войдет в (1.2) явно (этого можно достичь и другой подстановкой [4, 6]), и вместо (1.2) можно записать систему

$$\eta' = \vartheta, \quad \vartheta' = (c + 1)\vartheta - c\eta + \gamma\eta^n, \quad \gamma = \pm 1, \quad c = 1 - \beta + \alpha\beta \quad (1.3)$$

Из (1.3) вытекают соотношения, используемые далее

$$\begin{aligned} (c-1)\eta(\tau) &= (c\eta_0 - \vartheta_0)e^\tau - (\eta_0 - \vartheta_0)e^{c\tau} + \gamma \int_0^\tau [e^{c(\tau-\xi)} - e^{\tau-\xi}] \eta^n(\xi) d\xi \\ (c-1)\vartheta(\tau) &= (c\eta_0 - \vartheta_0)e^\tau - c(\eta_0 - \vartheta_0)e^{c\tau} + \gamma \int_0^\tau [ce^{c(\tau-\xi)} - e^{\tau-\xi}] \eta^n(\xi) d\xi \\ &(\eta_0 = \eta(0), \vartheta_0 = \vartheta(0)) \end{aligned} \quad (1.4)$$

Рассмотрим различные сочетания знаков c и γ .

1°. Пусть $c > 0$, $\gamma = 1$. Тогда система (1.3) имеет особую точку $\eta = \eta_c$, $\vartheta = 0$, $\eta_c^{n-1} = c$. Положим $\eta - \eta_c = \zeta$ и линеаризируем (1.3) вблизи особой точки

$$\zeta' = \vartheta, \quad \vartheta' = (c+1)\vartheta - c(1-n)\zeta \quad (1.5)$$

Характер особой точки определяется коэффициентами системы (1.5).

Рассмотрим подслучай, когда $(c-1)^2 + 4nc < 0$ и особая точка — неустойчивый фокус. Наметим в соответствии со знаками производной

$$d\vartheta/d\eta = \vartheta^{-1} [(c+1)\vartheta - c\eta + \gamma\eta^n] \quad (1.6)$$

направления интегральных кривых $\vartheta(\eta)$ в полуплоскости $O\eta\vartheta$, $\eta > 0$ (стрелки на фиг. 1, а; их ориентация отвечает увеличению τ).

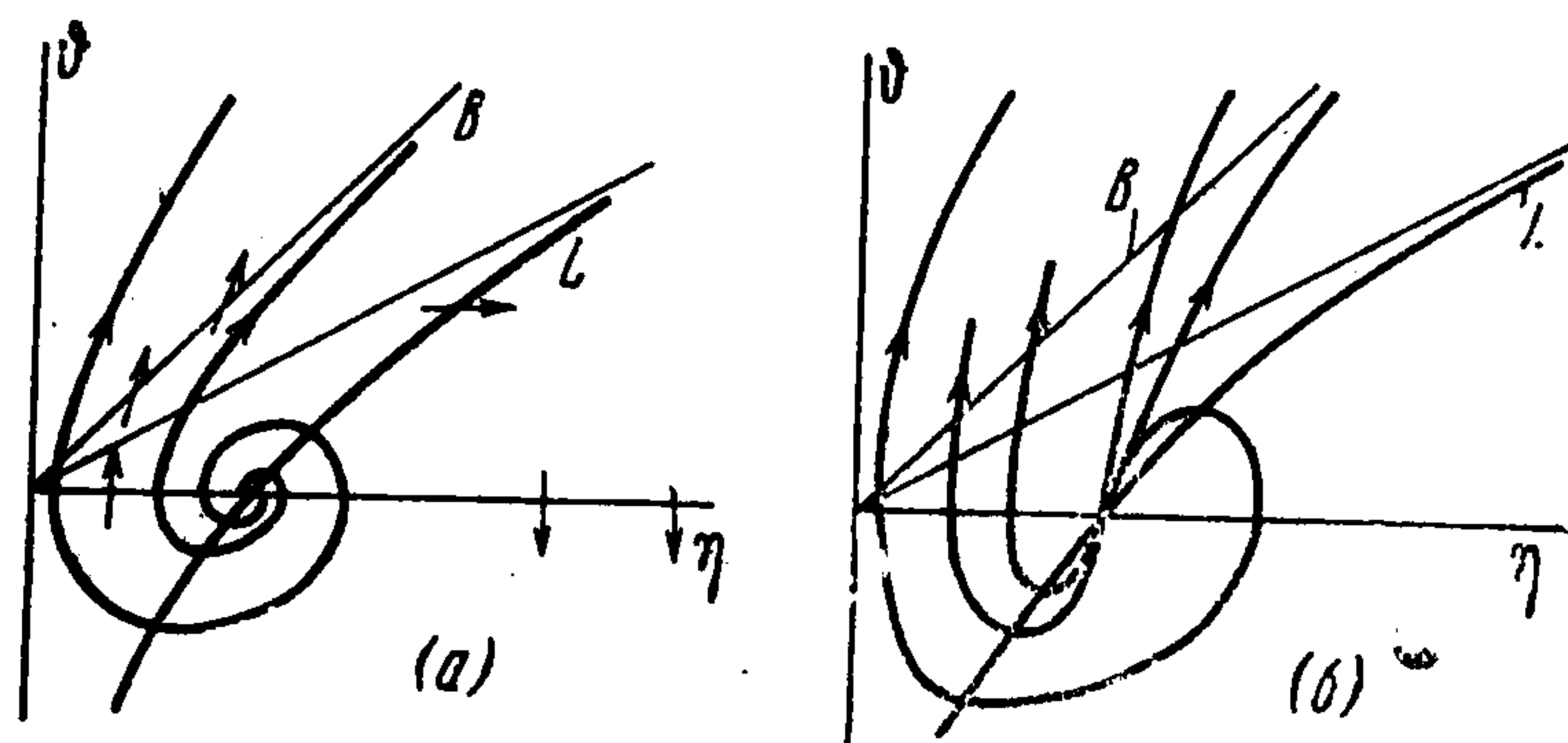
Предположим сначала, что $c > 1$.

На линии L с уравнением $(c+1)\vartheta - c\eta + \gamma\eta^n = 0$ имеем $d\vartheta/d\eta = 0$, на прямой B с уравнением $\vartheta = \eta$ будет $d\vartheta/d\eta = 1 + \eta^{n-1}\vartheta^{-1} > 1$. Принимая еще во внимание знаки $d^2\vartheta/d\eta^2$, устанавливаем, что ось $O\vartheta$ не может быть асимптотой $\vartheta(\eta)$ (в других случаях это возможно, см. ниже) и что линия L , пересекающая B , уходит далее в бесконечность, а линия, пересекаящая L , пересекает затем $O\eta$.

При $\eta > \eta_c$ между B и $O\eta$ имеются только те линии $\vartheta(\eta)$, которые либо уходят в бесконечность, либо пересекают L и возвращаются назад. Отсюда следует, что существует интегральная кривая, уходящая в бесконечность ниже B (разделяющая кривая). Разделяющая кривая единственна и имеет B своей асимптотой.

Таким образом, при $n \leq -1$ с увеличением τ все интегральные кривые кроме особой $\eta \equiv \eta_c$ и разделяющей, начав с бесконечного числа оборотов около фокуса, пересекают B и уходят в бесконечность. Разделяющая же кривая, уйдя от фокуса, асимптотически приближается к B снизу (фиг. 1, а). При $n > -1$ имеются кривые, приходящие из фокуса на $O\vartheta$ и кривые, уходящие с $O\vartheta$ в бесконечность.

В теории уравнения Эмдена — Фаулера наиболее интересен вопрос о поведении решений при $\rho \rightarrow 0$ и $\rho \rightarrow \infty$. Для системы (1.3) нужно соответственно выяснить свойства решений при $\tau \rightarrow \pm \infty$. Случай $\tau \rightarrow -\infty$ очевиден. В случае же $\tau \rightarrow \infty$ интегральные кривые уходят в бесконеч-



Фиг. 1

ность, нелинейный член в (1.3) убывает и поведение решений определяется в основном линейной частью. Возьмем любую кривую, отличную от особой $\eta = \eta_c$ и разделяющей. Умножая обе части (1.4) на $e^{-c\tau}$ и переходя к пределу, получим, что существуют конечные пределы

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow \infty} \eta(\tau) e^{-c\tau} &= (c-1)^{-1} \left[\vartheta_0 - \eta_0 + \int_0^{\infty} e^{-c\xi} \eta^n(\xi) d\xi \right] > 0 \\ \lim_{\tau \rightarrow \infty} \vartheta(\tau) e^{-c\tau} &= c \lim_{\tau \rightarrow \infty} \eta(\tau) e^{-c\tau} \end{aligned} \quad (1.7)$$

Рассмотрим разделяющую кривую. Воспользуемся тождеством

$$\eta(\tau) = \eta_0 e^{\tau} + \int_0^{\tau} e^{\tau-\xi} [\vartheta(\xi) - \eta(\xi)] d\xi \quad (1.8)$$

Так как $\eta(\tau) - \vartheta(\tau) \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow \infty$, то интеграл

$$\int_0^{\infty} e^{-\xi} [\vartheta(\xi) - \eta(\xi)] d\xi$$

сходится, и, следовательно, существуют конечные пределы

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow \infty} \eta(\tau) e^{-\tau} &= \eta_0 - \int_0^{\infty} e^{-\xi} [\eta(\xi) - \vartheta(\xi)] d\xi > 0 \\ \lim_{\tau \rightarrow \infty} \vartheta(\tau) e^{-\tau} &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \eta(\tau) e^{-\tau} \end{aligned} \quad (1.9)$$

Для исследования краевых задач (см. ниже) нужно знать, как изменяются указанные пределы при изменении начальной точки на траектории. Рассмотрим пределы функций $f(\tau)\eta_1(\tau)$ и $f(\tau)\eta_2(\tau)$, где $\eta_1(\tau)$ и $\eta_2(\tau)$ соответствуют одной и той же интегральной кривой, но отличаются значениями при $\tau = 0$. Пусть $\eta_1(0) = \eta_{10}$, $\vartheta_1(0) = \vartheta_{10}$, $\eta_2(0) = \eta_{20}$, $\vartheta_{20}(0) = \vartheta_{20}$

Тогда $\eta_2(\tau) = \eta_1(\tau + \tau_{12})$, где τ_{12} таково, что $\eta_1(\tau_{12}) = \eta_{20}$, $\vartheta_1(\tau_{12}) = \vartheta_{20}$; $\tau_{12} > 0$, если переход от $(\eta_{10}, \vartheta_{10})$ к $(\eta_{20}, \vartheta_{20})$ происходит в направлении возрастания τ , и $\tau_{12} < 0$, если он отвечает убыванию. Имеем

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} f(\tau) \eta_1(\tau) = [\lim_{\tau \rightarrow \infty} f(\tau + \tau_{12}) / f(\tau)] [\lim_{\tau \rightarrow \infty} f(\tau) \eta_2(\tau)] \quad (1.10)$$

при условии, что эти пределы существуют. Следовательно, для всех кривых кроме разделяющей

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \eta_1(\tau) e^{-c\tau} = e^{-c\tau_{12}} \lim_{\tau \rightarrow \infty} \eta_2(\tau) e^{-c\tau} \quad (1.11)$$

На разделяющей кривой

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \eta_1(\tau) e^{-\tau} = e^{-\tau_{12}} \lim_{\tau \rightarrow \infty} \eta_2(\tau) e^{-\tau} \quad (1.12)$$

В случае $0 < c < 1$, разбираемом аналогично, разделяющая кривая асимптотически приближается к прямой C с уравнением $\vartheta = c\eta$; на ней конечен

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \eta(\tau) e^{-c\tau} = c^{-1} \lim_{\tau \rightarrow \infty} \vartheta(\tau) e^{-c\tau} \quad (1.13)$$

а на остальных интегральных кривых конечен

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \eta(\tau) e^{-\tau} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \vartheta(\tau) e^{-\tau} \tag{1.14}$$

Наконец, при $c = 1$ на разделяющей кривой конечен

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \eta(\tau) e^{-\tau} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \vartheta(\tau) e^{-\tau} \tag{1.15}$$

а на остальных кривых конечен [5]

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \eta(\tau) e^{-\tau \tau^{-1}} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \vartheta(\tau) e^{-\tau \tau^{-1}} \tag{1.16}$$

Во втором подслучае, когда $(c - 1)^2 + 4nc > 0$, особая точка — неустойчивый узел (фиг. 1, б). На полупрямой

$$\vartheta = z_1 (\eta - \eta_c), \quad \eta > \eta_c, \quad z_1 = \frac{1}{2} (c + 1) + [\frac{1}{4} (c - 1)^2 + nc]^{1/2}$$

наклон интегральных кривых будет

$$\begin{aligned} \frac{d\vartheta}{d\eta} &= c + 1 - \frac{c\eta}{z_1(\eta - \eta_c)} + \frac{\eta^n}{z_1(\eta - \eta_c)} > \\ &> c + 1 - \frac{c\eta}{z_1(\eta - \eta_c)} + \frac{\eta_c^n + n\eta_c^{n-1}(\eta - \eta_c)}{z_1(\eta - \eta_c)} = z_1 \end{aligned} \tag{1.17}$$

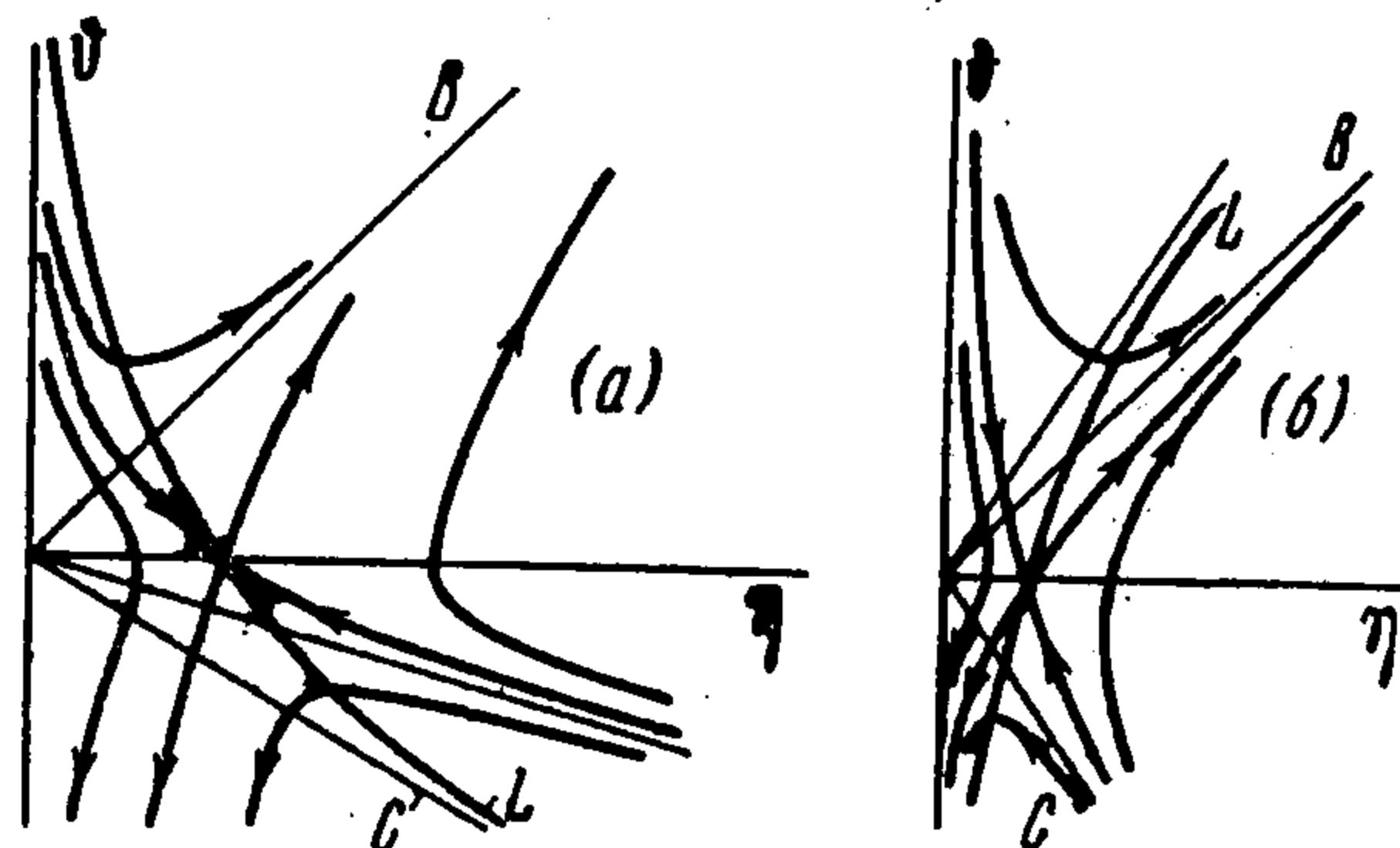
Поэтому интегральная кривая, оказавшаяся при $\vartheta > 0$ левее прямой $\vartheta = z_1(\eta - \eta_c)$, не может перейти вправо и, следовательно, не может далее пересечь ось $O\eta$. Ввиду этого интегральная кривая может иметь не более двух пересечений с осью $O\eta$ (не считая того, что она выходит из узла). Существуют кривые, вообще не пересекающие оси $O\eta$. Такова, в частности, разделяющая кривая. Действительно, $\min(c, 1) < z_1$, т. е. прямая $\vartheta = z_1(\eta - \eta_c)$ при $c > 1$ пересекает B , а при $c < 1$ — прямую C . Следовательно, если бы разделяющая кривая пересекала $O\eta$, то она должна была оставаться выше прямой $\vartheta = z_1(\eta - \eta_c)$ и не могла бы иметь прямую B или C своей асимптотой. Таким образом, интегральные кривые при $n \leq -1$ имеют вид, согласно фиг. 1, б.

Скорость возрастания решений при $\tau \rightarrow \infty$ такая же, как при $(c - 1)^2 + 4nc < 0$.

Наконец, случай $(c - 1)^2 + 4nc = 0$ отличается от случая $(c - 1)^2 + 4nc > 0$ лишь тем, что все интегральные кривые в узле касаются одной и той же прямой $\vartheta = z_1(\eta - \eta_c)$.

2.° Пусть $c < 0, \gamma = -1$. Особая точка системы (1.3) будет $\eta = \eta_c, \vartheta = 0, \eta_c^{n-1} = -c$. Линеаризируя (1.3) как при выводе (1.5), снова получим (1.5). Но так как теперь $c < 0$, то особая точка — седло.

Пусть $c > -1$. Наметив направления интегральных кривых (стрелки на фиг. 2, а), заключаем, что при $n \leq -1$ имеются кривые, асимптотически приближающиеся к $O\vartheta$.



Фиг. 2

Очевидно, что если $\eta \rightarrow 0$, $\vartheta \rightarrow -\infty$ при увеличении τ , то $\tau < \tau_{\max}$ (бесконечное ϑ достигается за конечное время). Действительно, если бы было $\tau \rightarrow \infty$ при $\eta \rightarrow 0$, то

$$\eta(\tau) = \eta_0 + \int_0^\tau \vartheta(\xi) d\xi, \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} \eta(\tau) = 0, \quad \int_0^\infty \vartheta(\xi) d\xi = -\eta_0 \quad (1.18)$$

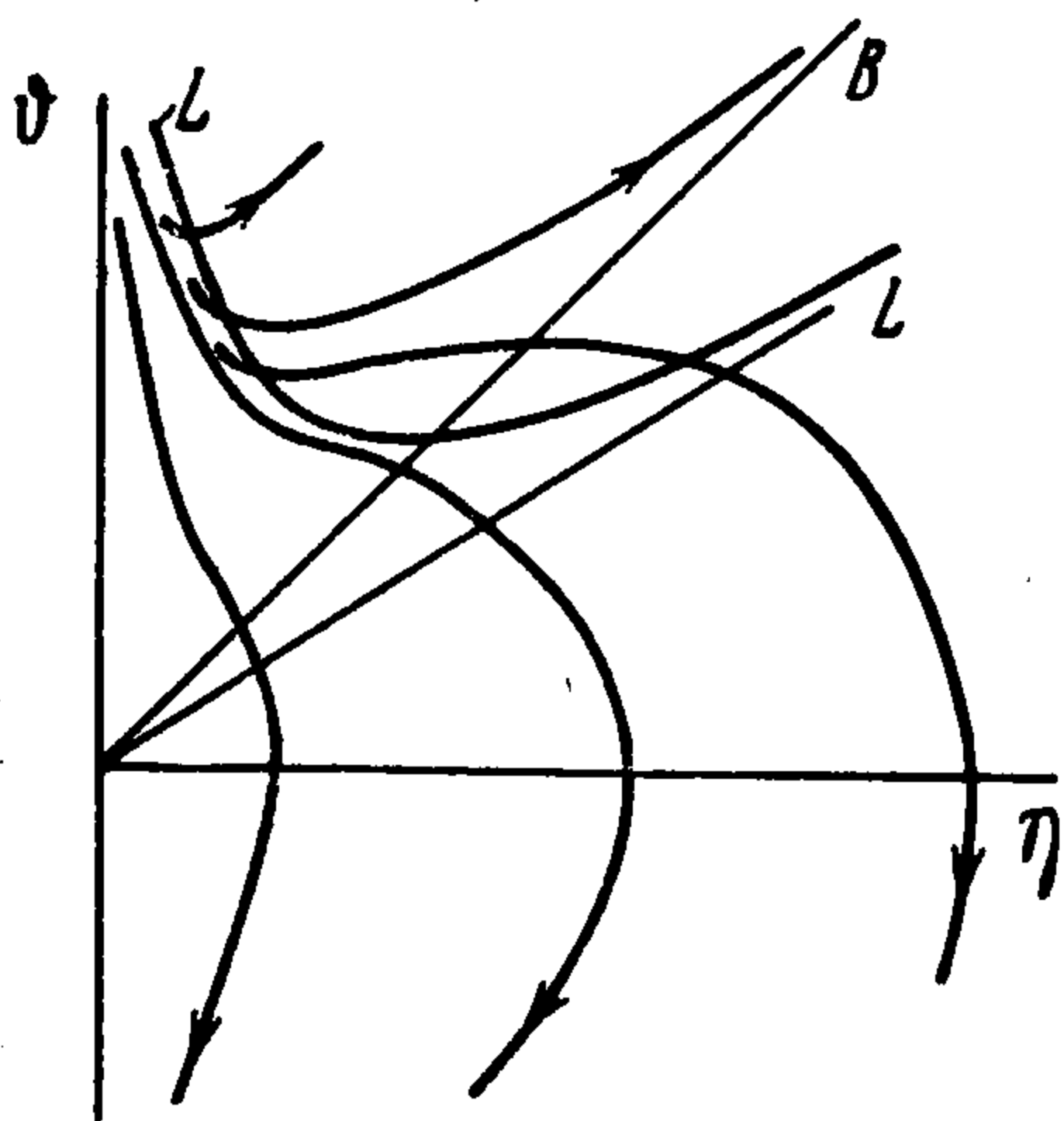
что невозможно, так как последний интеграл расходится. Аналогично, если $\eta \rightarrow 0$, $\vartheta \rightarrow \infty$ при уменьшении τ , то τ ограничено снизу.

Как и ранее, из (1.4) получаем, что на участках кривых, где $\eta, \vartheta \rightarrow \infty$ при $\tau \rightarrow \infty$, конечны $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \eta(\tau)e^{-\tau}$ и $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \vartheta(\tau)e^{-\tau}$, а на участках, где $\eta \rightarrow \infty$, $\vartheta \rightarrow -\infty$, при $\tau \rightarrow -\infty$ конечны $\lim_{\tau \rightarrow -\infty} \eta(\tau)e^{-c\tau}$ и $\lim_{\tau \rightarrow -\infty} \vartheta(\tau)e^{-c\tau}$. Если $\eta(\tau) \rightarrow \infty$ при $\tau \rightarrow \pm\infty$, то

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^\tau e^{c(\tau-\xi)} \eta^n(\xi) d\xi = 0, \quad \lim_{\tau \rightarrow -\infty} \int_0^\tau e^{\tau-\xi} \eta^n(\xi) d\xi = 0 \quad (1.19)$$

Поэтому на указанных участках соответственно $\vartheta - \eta \rightarrow 0$ и $\vartheta - c\eta \rightarrow 0$ (фиг. 2, а).

Если $c < -1$, то L и интегральные кривые трансформируются, согласно фиг. 2, б. Асимптотическое поведение решений такое же, как при



Фиг. 3

$-1 < c < 0$. При $c = -1$ кривая L вырождается в прямую $\eta = \eta_c$, а система (1.3) и исходное уравнение Эмдена — Фаулера интегрируются в квадратурах. Поведение решений остается прежним.

3.° Если $c > 0$, $\gamma = -1$, то система (1.3) не имеет особых точек, L не пересекает $O\eta$ и при $\eta = \eta_m$, $\eta_m^{n-1} = -c/n$ достигает минимума.

Очевидно, что существуют интегральные кривые, не пересекающие L и пересекающие ее два раза (фиг. 3); при $n \leq -1$ они имеют $O\vartheta$ своей «двусторонней» асимптотой.

Покажем, что имеются кривые, пересекающие L один раз. Найдем $d\vartheta/d\eta$ при $\vartheta = 1/2(c+1)\eta$. Получим $d\vartheta/d\eta > 1/2(c+1)$ при $\eta > \eta_l$, $4\eta_l^{n-1} = (c-1)^2$, т. е. интегральная кривая, оказавшись в области $\eta > \eta_l$, $\vartheta > 1/2(c+1)\eta$, не может выйти из нее и должна уйти в бесконечность.

Пусть $c > 1$. Из (1.4) находим

$$\vartheta < (c-1)^{-1} [(\vartheta_0 - \eta_0)e^{c\tau} + (c\eta_0 - \vartheta_0)e^\tau] \quad (1.20)$$

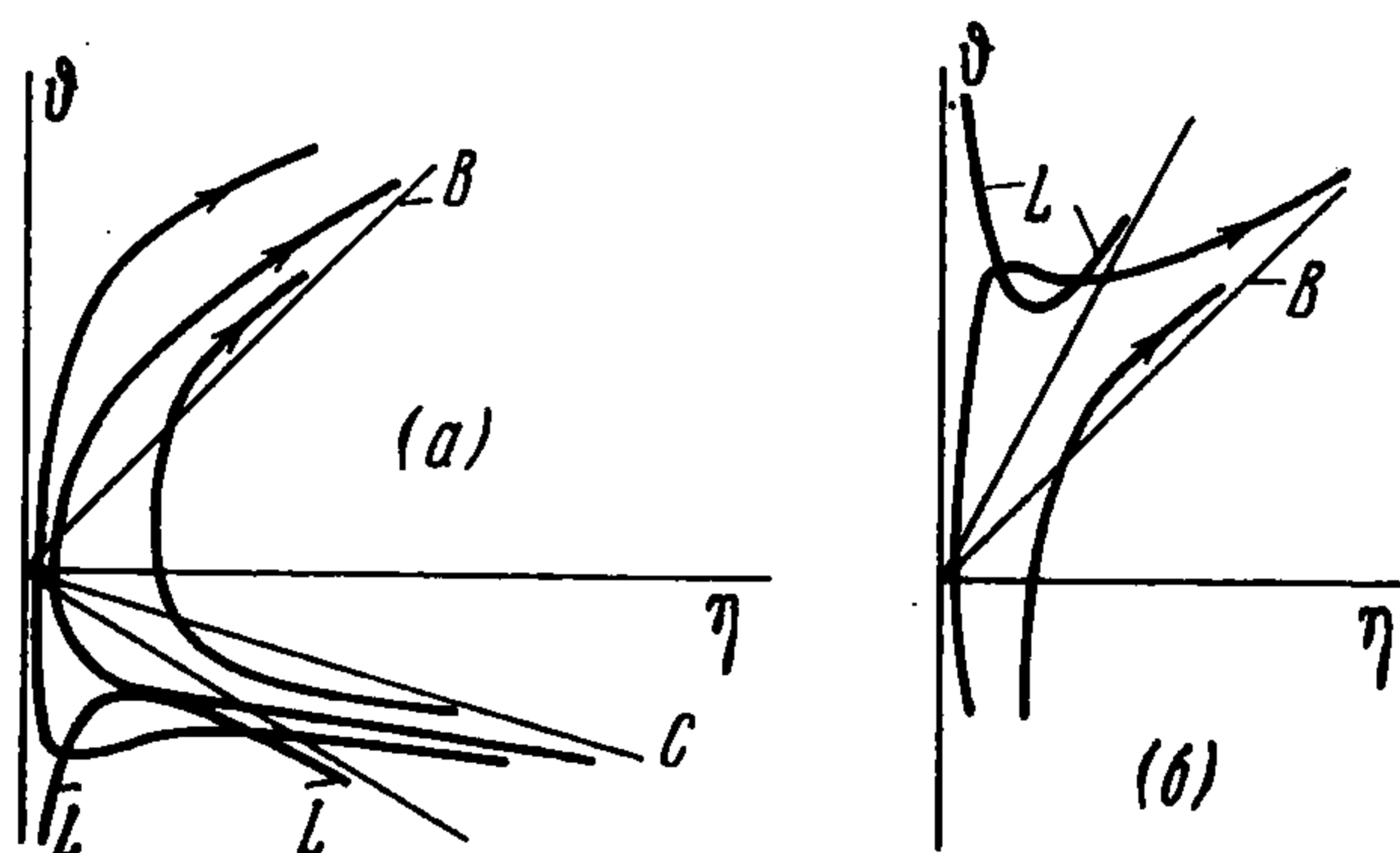
т. е. кривая, пересекающая B , пересечет далее и L . Поэтому интегральные кривые могут уходить в бесконечность ($\eta, \vartheta \rightarrow +\infty$) лишь выше B . Среди них имеется единственная, асимптотически приближающаяся к B (разделяющая кривая).

На разделяющей кривой существует конечный $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \eta(\tau)e^{-\tau}$ при $\tau \rightarrow \infty$ и т. д. аналогично случаю $c > 0$, $\gamma = 1$. При $c < 1$ разделяющая кривая приближается к C и т. д. также аналогично случаю $c > 0$, $\gamma = 1$.

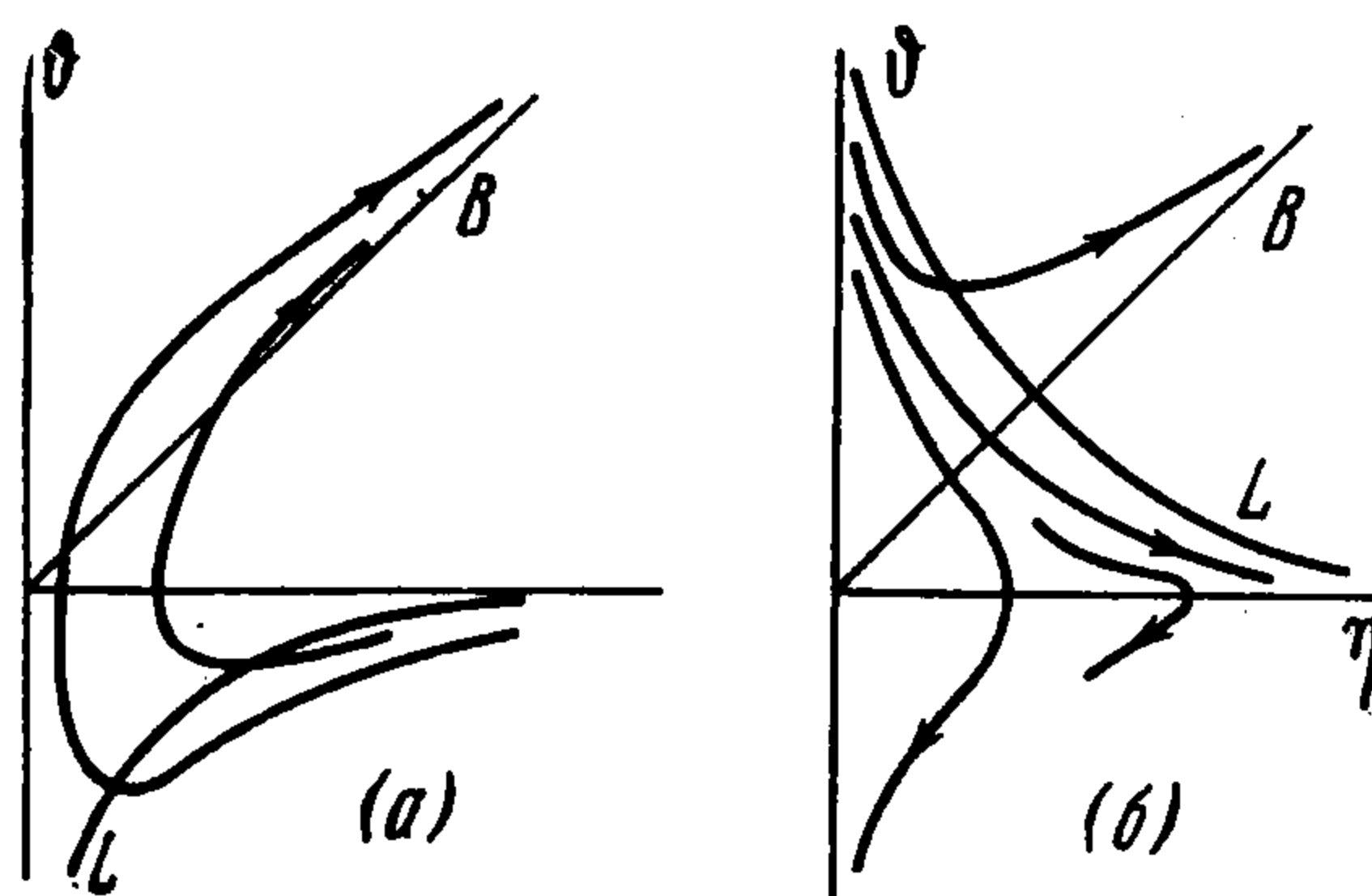
4°. Когда $c < 0$, $\gamma = 1$, приходим к фиг. 4, а (при $c > -1$) или 4, б (при $c < -1$). В этом случае всегда конечны

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \eta(\tau) e^{-\tau} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \vartheta(\tau) e^{-\tau}, \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} \eta(\tau) e^{-c\tau} = \frac{1}{c} \lim_{\tau \rightarrow \infty} \vartheta(\tau) e^{-c\tau}$$

Это относится и к случаю $c = -1$, когда (1.3) и исходное уравнение Эмдена — Фаулера интегрируются в квадратурах.



Фиг. 4



Фиг. 5

5°. При $c = 0$ имеем фиг. 5, а (при $\gamma = 1$) и 5, б ($\gamma = -1$). Свойства решений на кривых, асимптотически приближающихся к $O\vartheta$ или B , такие же, как в других аналогичных случаях. Рассмотрим кривые, асимптотически приближающиеся к $O\eta$. При $\gamma = -1$ такая кривая единственна. Вместо (1.4) имеем

$$\begin{aligned} \vartheta &= \vartheta_0 e^\tau - \int_0^\tau e^{\tau-\xi} \eta^n(\xi) d\xi \\ \eta &= \eta_0 - \vartheta_0 + \vartheta_0 e^\tau - \int_0^\tau (e^{\tau-\xi} - 1) \eta^n(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (1.21)$$

Из (1.21) и условия $\vartheta \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow \infty$ следует, что $\eta(\tau)$ при больших τ растет, как интеграл от $\eta^n(\tau)$, т. е. $\eta \sim \tau^\nu$, $\nu = (1-n)^{-1}$. Таково же поведение η при $\tau \rightarrow -\infty$ в случае фиг. 5, а.

6°. При $2 + \sigma - \alpha = 0$ в (1.2) следует положить $\delta = 0$. Приняв еще $\alpha\beta - \beta = 1$, придем к системе (1.3) того же вида, что и в предыдущем случае ($c = 0$), но с иной связью между η и w .

2. Краёвые задачи с условием ограниченности в нуле и на бесконечности. Зная поведение $\eta(\tau)$ при $-\infty < \tau < \infty$, можно установить свойства $w(\rho)$ при $0 < \rho < \infty$, в частности, найти, как изменяется w при $\rho \rightarrow 0$ и $\rho \rightarrow \infty$. Это позволяет определить количество и некоторые свойства решений краевых задач с условиями: $w(R) = 1$, $w(0)$ или $w(\infty)$ — ограничено. Первая задача особенно интересна для приложений [3-5]. К этим задачам с одним новым параметром R заменой переменных сводятся некоторые задачи с первоначально большим числом параметров [4,5].

Пусть $\beta > 0$. Тогда $\rho \rightarrow 0$ отвечает $\tau \rightarrow \infty$, а $\rho \rightarrow \infty$ соответствует $\tau \rightarrow -\infty$. Выберем в (1.2)

$$a = R, \quad b = (\beta^{-2} R^{\alpha-\sigma-2})^{1/(n-1)}$$

Краевое условие $w(R) = 1$ даст тогда $\eta(0) = b^{-1}$. Рассмотрим задачу с условием: $w(0)$ ограничено; оно требует, чтобы существовал конечный $\lim \eta(\tau)e^{-\tau}$ при $\tau \rightarrow \infty$.

Наиболее интересен результат при $c \geq 1$, $\gamma = 1$. В этом случае $\eta(\tau)e^{-\tau}$ ограничено при условии, что $\eta(\tau)$ и $\vartheta(\tau)$ дают параметрическое уравнение разделяющей кривой. Последнее условие и условие $\eta_0 = b^{-1}$ определяют искомые решения краевой задачи. При данном R решений столько, сколько раз разделяющая кривая пересекает прямую $\eta = \eta_0 = \text{const} = b^{-1}(R)$. Пусть $(c-1)^2 + 4nc < 0$. Обозначим через $\eta_{*1}, \eta_{*2}, \dots$ значения η в точках пересечения разделяющей кривой и $O\eta$; нумерация их соответствует движению по кривой при убывании τ . При $\eta_0 < \eta_{*1}$ краевая задача не имеет решений, при $\eta_0 > \eta_{*2}$ имеется одно решение, при $\eta_{*1} < \eta_0 < \eta_{*2}$ — два и т. д. Существуют промежутки изменения η_0 (или R), где будет k -решений (k — любое целое положительное число). При $\eta_0 = \eta_c$ задача имеет счетное множество решений. Так как

$$\frac{dw}{d\rho} = b\beta^{-1}R^{-1}e^{(\beta-1)\rho}(\eta - \vartheta) > 0$$

то w возрастает от некоторого w_m до единицы при увеличении ρ от нуля до R , причем $w_m = b \lim \eta e^{-\tau}$, $\tau \rightarrow \infty$. Рассмотрим зависимость $w_m(R)$. При $R \rightarrow 0$ будет $b^{-1} = \eta_0 \rightarrow \infty$ и (1.9)

$$\begin{aligned} & \lim_{\eta_0 \rightarrow \infty} [\eta_0^{-1} \lim_{\tau \rightarrow \infty} \eta(\tau, \eta_0) e^{-\tau}] = \\ & = 1 - \lim_{\eta_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{\eta_0} \int_0^{\infty} e^{-\xi} [\eta(\xi, \eta_0) - \vartheta(\xi, \eta_0)] d\xi = \\ & = 1 - \lim_{\tau_{12} \rightarrow \infty} \frac{1}{\eta_0} \int_0^{\infty} e^{-\xi} [\eta(\xi + \tau_{12}, \eta_0^*) - \vartheta(\xi + \tau_{12}, \eta_0^*)] d\xi = \\ & = 1 - \lim_{\tau_{12} \rightarrow \infty} \frac{e^{\tau_{12}}}{\eta_0} \int_{\tau_{12}}^{\infty} e^{-\xi} [\eta(\xi, \eta_0^*) - \vartheta(\xi, \eta_0^*)] d\xi = 1 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь $\eta(\tau, \eta_0)$ с переменным η_0 выражена через некоторую $\eta(\tau, \eta_0^*)$ с фиксированным начальным значением η_0^* соотношением

$$\eta(\tau, \eta_0) = \eta(\tau + \tau_{12}(\eta_0), \eta_0^*)$$

Найдем, исходя по-прежнему из (1.9), производную

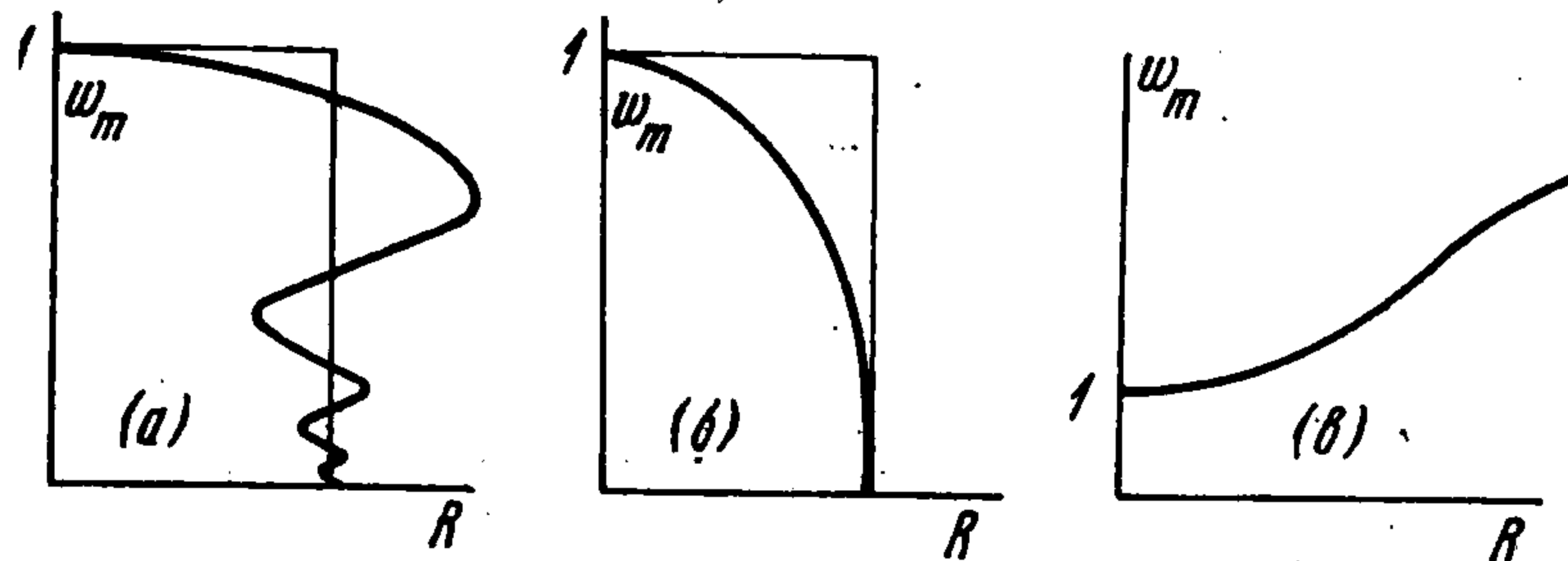
$$\begin{aligned} \frac{dw_m}{dR} &= \frac{d\eta_0}{dR} \frac{d}{d\eta_0} \left[-\frac{1}{\eta_0} \int_0^{\infty} e^{-\xi} [\eta(\xi, \eta_0) - \vartheta(\xi, \eta_0)] d\xi \right] = \\ &= \frac{d\eta_0}{dR} \left[\frac{1}{\eta_0} (1 - w_m) - \frac{1}{\eta_0} \int_0^{\infty} \frac{1}{\vartheta_0} \left[\vartheta(\xi, \eta_0) - \frac{d}{d\xi} \vartheta(\xi, \eta_0) \right] e^{-\xi} d\xi \right] = \\ &= -\frac{1}{\beta R} \frac{\eta_0 - \vartheta_0}{\vartheta_0} w_m \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь использованы соотношения типа

$$\frac{d\eta(\xi, \eta_0)}{d\eta_0} = \frac{1}{\vartheta_0} \frac{d\eta(\xi, \eta_0)}{d\xi} = \frac{1}{\vartheta_0} \vartheta(\xi, \eta_0) \quad (2.3)$$

после чего член с $d\vartheta / d\xi$ проинтегрирован по частям.

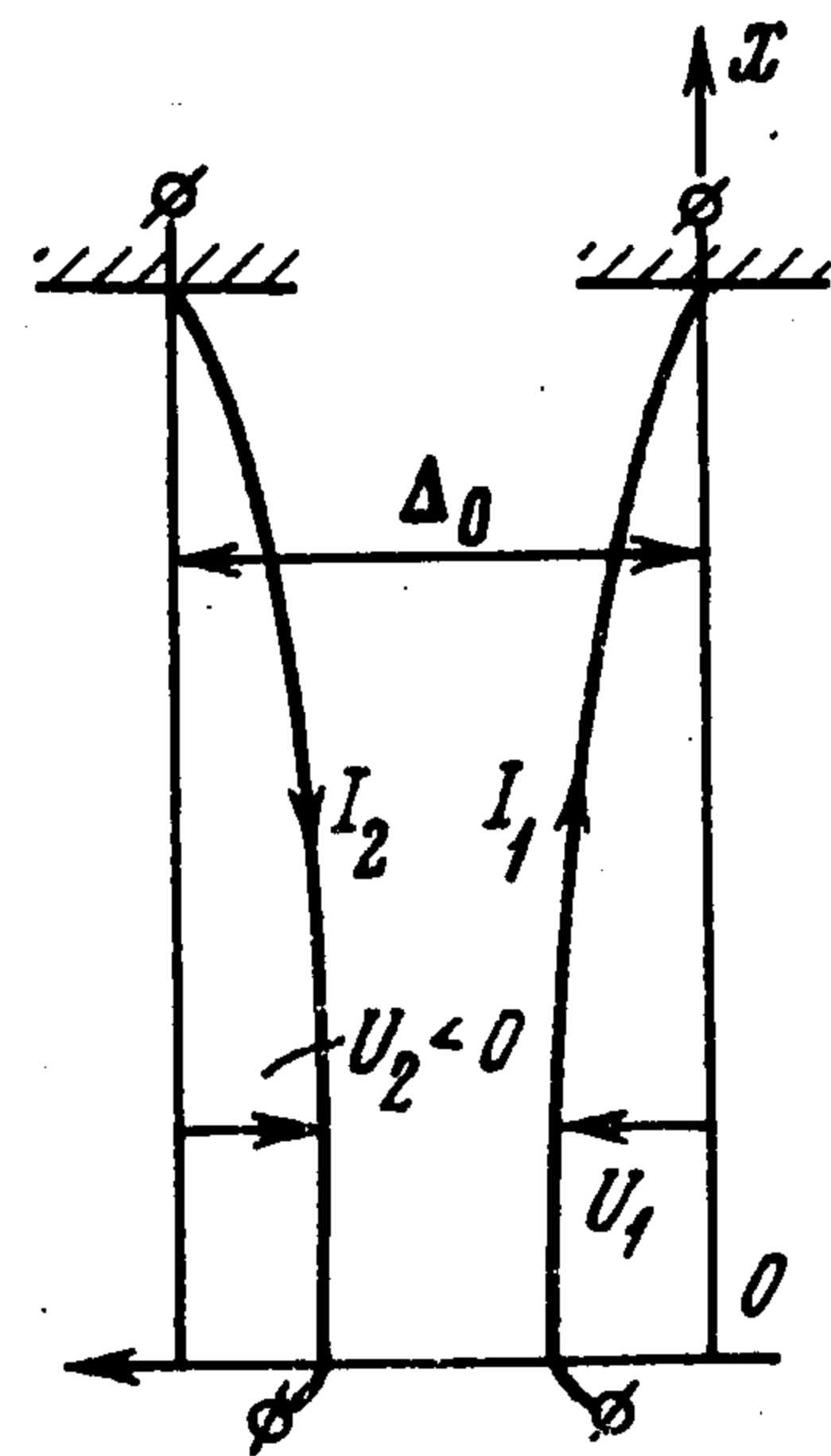
Рассмотрим совокупность решений таких, что точка (η_0, ϑ_0) лежит на участке разделяющей кривой, уходящем из точки $(\eta_{*1}, 0)$ в бесконечность. Для этих решений $dw_m/dR < 0$, т. е. w_m убывает с ростом R при $0 < R < R_{*1}$. При $R_{*2} < R < R_{*1}$ существуют решения, когда точка (η_0, ϑ_0)



Фиг. 6

лежит на завитке разделяющей кривой, соединяющем η_{*1} и η_{*2} . У этих решений w_m возрастает с ростом R и т. д. В результате получим зависимость $w_m(R)$, согласно фиг. 6, а. Сходным образом находим аналогичные зависимости при $c \geq 1, \gamma \geq 1, (c-1)^2 + 4nc > 0$ (фиг. 6, б) и $c \geq 1, \gamma = -1$ (фиг. 6, в). В последнем случае решение краевой задачи существует, и оно единственно при всех R .

При $c < 1$ во всех случаях существует двухпараметрическое семейство функций $\eta(\tau)$ таких, что $\lim \eta(\tau)e^{-\tau}$ конечен при $\tau \rightarrow \infty$. Поэтому рассматриваемая краевая задача имеет однопараметрическое семейство решений, что указывает на «недоопределенность» соответствующей физической задачи. Равным образом краевая задача с условием « w ограничено при $\rho \rightarrow \infty$ » либо не имеет решений, либо имеет семейство их. При $\beta < 0$ сказанное относительно задачи с условием ограниченности в нуле после очевидных изменений переносится на задачу с условием ограниченности в бесконечности и наоборот.



Фиг. 7

Приведем пример, приводящий к краевой задаче для уравнения Эмдена — Фаулера при $n = -1$. Рассмотрим плоские формы равновесия двух близко расположенных вертикальных тяжелых нитей, через которые пропускается ток (фиг. 7). Выражая силу, действующую на единицу длины нитей, через перемещения $u_1(x), u_2(x)$, согласно [5], получим $u_2 \equiv -u_1$. Положив

$$(\Delta_0 - 2u_1) / \Delta_0 = w, \quad \rho = \lambda x, \quad \lambda = \mu_0 I_1 I_2 / \pi \rho_1 g \Delta_0^2 \quad (2.4)$$

где $\rho_1 g$ — вес единицы длины нити, приходим к уравнению относительно w

$$\frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dw}{d\rho} \right) - \gamma w^{-1} = 0 \quad (2.5)$$

Замена $\rho = 1/4 r^2$ приводит к уравнению Эмдена — Фаулера с другим значением σ

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) - \gamma r w^{-1} = 0 \quad (2.6)$$

Граничные условия будут: $w(0)$ ограничено и $w(\lambda l) = 1$, если используется (2.5), и $w(2\sqrt{\lambda l}) = 1$ в случае (2.6). Зависимость решений от параметра соответствует фиг. 6, а ($\gamma = 1$, притяжение) или 6, б ($\gamma = -1$, отталкивание); в последнем случае $w_m = w(0)$ — максимальное значение w . По этим кривым можно судить об устойчивости равновесия [5]. Кроме того, в случае отталкивания возможны еще неплоские формы равновесия и формальные решения, описывающие формы с заострением, аналогичные найденным в [5]. Если «обычным» формам соответствует разделяющая кривая, то формам с заострением соответствует сочетание кривой, где $\theta \rightarrow -\infty$ при $\eta \rightarrow 0$ (фиг. 3), и разделяющей кривой.

Поступила 7 I 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Беллман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. М., Изд-во иностр. лит., 1954.
2. Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения, т. 2, М., Изд-во иностр. лит., 1954.
3. Taylor G. The coalescence of closely spaced drops when they are at different electric potentials. Proc. Roy. Soc. Ser. A, 1968, vol. 306, No. 1487.
4. Askerg R. C. On a nonlinear differential equation of electrohydrodynamics. Proc. Roy. Soc. Ser. A, 1969, vol. 312, No. 1508.
5. Ходжаев К. Ш. Нелинейные задачи о деформировании упругих тел магнитным полем. ПММ, 1970, т. 34, вып. 4.
6. Jones C. W. On reducible nonlinear differential equations occurring in mechanics. Proc. Roy. Soc. Ser. A, 1953, vol. 217, No. 1130.