О НЕЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКЕ ХИМИЧЕСКИ АКТИВНЫХ СРЕД

О. С. Рыжов

(Москва)

Рассматривается нелинейное распространение возмущений в реагирующих смесях, изменение состава которых определяется протеканием единственной химической реакции. В зависимости от отношения макроскопического времени к времени релаксации различаются два основных типа процесса: квазизамороженный и квазиравновесный. Рассматриваются также среды, в которых замороженная и равновесная скорости звука близки по величине. Построены решения асимптотических уравнений, описывающие параметры потока за ударными фронтами и в волнах разрежения. Формулируется математическая аналогия о влиянии на структуру возмущенного поля скоростей химических превращений и «продольной вязкости» и теплопроводности.

1. Исходные уравнения. Будем считать, что в потоке химически активной газовой смеси происходит только одна реакция. Изменение состава смеси характеризуется тогда единственным параметром q, называемым полнотой реакции.

Уравнения движения смеси возьмем в виде [1]

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial\rho v}{\partial r}+(\nu-1)\frac{\rho v}{r}=0, \qquad \frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}$$
$$Q\left(\frac{\partial q}{\partial t}+v\frac{\partial q}{\partial r}\right)+T\left(\frac{\partial s}{\partial t}+v\frac{\partial s}{\partial r}\right)=0, \qquad \frac{\partial q}{\partial t}+v\frac{\partial q}{\partial r}=q^{\cdot} \tag{1.1}$$

Здесь t — время, r — расстояние от плоскости, оси или центра симметрии, v — скорость, ρ — плотность, p — давление, s — удельная энтропия, T — температура, $q^{\cdot}$ и Q — скорость и сродство химической реакции. Параметр $\nu = 1, 2, 3$ для течений, обладающих плоскостью, осью и центром симметрии соответственно.

Для замыкания системы необходимо ввести еще три уравнения, связывающие термодинамические функции q, ρ, p, s, Q и T. Согласно соотношению Гиббса, приращение удельной внутренней энергии e будет

$$de = Qdq - pdV + Tds, \qquad V = 1/\rho$$

Первые частные производные

$$Q=e_1=\left(\frac{\partial e}{\partial q}\right)_{V,s}, \qquad -p=e_2=\left(\frac{\partial e}{\partial V}\right)_{q,s}, \qquad T=e_3=\left(\frac{\partial e}{\partial s}\right)_{q,V}$$

выраженные через q, V и s представляют собой уравнения состояния среды. Они служат тремя недостающими соотношениями между термодинамическими величинами.

Как известно [1], в состоянии равновесия $Q = q^{\cdot} = 0$. Выберем q, V и Q в качестве независимых термодинамических переменных. Если допустить аналитическую зависимость $q^\cdot$ от Q, то вблизи равновесного состояния

$$q^\cdot = -H_1(q, V)Q + H_2(q, V)Q^2 + \ldots \tag{1.2}$$

Из второго закона термодинамики для необратимых процессов следует, что коэффициент $H_1 > 0$.

Преобразуем третье уравнение системы (1.1), следующее из закона сохранения энергии, к двум альтернативным формам. В первом случае запишем приращение удельной энтропии через приращения полноты химической реакции, плотности и давления

$$ds = \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_{q,\rho}\left[dp - \left(\frac{\partial p}{\partial q}\right)_{\rho,s} dq - a_f^2\, d\rho\right], \quad a_f = (\partial p / \partial \rho)_{q,s}^{1/2} \tag{1.3}$$

Здесь a_f — замороженная скорость звука. Из (1.3) следует (1.4)

$$\frac{\partial p}{\partial t} + v\frac{\partial p}{\partial r} - a_f^2\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + v\frac{\partial \rho}{\partial r}\right) = \left[\left(\frac{\partial p}{\partial q}\right)_{\rho,s} - \frac{Q}{T}\left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_{q,\rho}\right]\left(\frac{\partial q}{\partial t} + v\frac{\partial q}{\partial r}\right) = L_f$$

Комбинирование полученного соотношения с уравнениями неразрывности и сохранения импульса дает

$$\frac{\partial p}{\partial t} + (v + a_f)\frac{\partial p}{\partial r} + \rho a_f\left[\frac{\partial v}{\partial t} + (v + a_f)\frac{\partial v}{\partial r} + (\nu - 1)\frac{a_f v}{r}\right] = L_f \tag{1.5}$$

Для вывода второй альтернативной формы, которая следует из закона сохранения энергии, возьмем за независимые термодинамические переменные сродство химической реакции, плотность и давление.

Аналогично предыдущему получим

$$\frac{\partial p}{\partial t} + (v + a_e)\frac{\partial p}{\partial r} + \rho a_e\left[\frac{\partial v}{\partial t} + (v + a_e)\frac{\partial v}{\partial r} + (\nu - 1)\frac{a_e v}{r}\right] = \tag{1.6}$$

$$= \left(\frac{\partial p}{\partial Q}\right)_{\rho,s}\left(\frac{\partial Q}{\partial t} + v\frac{\partial Q}{\partial r}\right) - \frac{Q}{T}\left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_{Q,\rho}\left(\frac{\partial q}{\partial t} + v\frac{\partial q}{\partial r}\right) = L_e$$

$$a_e = (\partial p / \partial \rho)_{Q,s}^{1/2}$$

Уравнения (1.5) и (1.6) являются двумя различными точными видами записи, выражающими следствия из закона сохранения энергии. Они аналогичны соотношению, используемому в теории течений инертных газов [2], и переходят в него при $Q = (\partial p / \partial q)_{\rho,s} = (\partial p / \partial Q)_{\rho,s} = 0$. В этом случае операторы L_f и L_e тождественно обращаются в нуль, и обе скорости звука a_f и a_e совпадают со скоростью распространения малых возмущений.

Продифференцируем по ρ тождество

$$p(Q, \rho, s) = p[q(Q, \rho, s), \rho, s]$$

Принимая во внимание определения замороженной и равновесной скоростей звука, имеем

$$a_f^2 - a_e^2 = -(\partial p / \partial q)_{\rho,s}(\partial q / \partial \rho)_{Q,s} \tag{1.7}$$

$$\left(\frac{\partial q}{\partial \rho}\right)_{Q,s} = \frac{1}{\rho^2}\frac{(\partial Q / \partial V)_{q,s}}{(\partial Q / \partial q)_{V,s}}$$

В соответствии с соотношением Гиббса

$$\left(\frac{\partial p}{\partial q}\right)_{\rho, s} = -\left(\frac{\partial^2 e}{\partial q \partial V}\right)_s = -e_{12}, \quad \left(\frac{\partial Q}{\partial V}\right)_{q, s} = \left(\frac{\partial^2 e}{\partial V \partial q}\right)_s = e_{12}$$

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial q}\right)_{V, s} = \left(\frac{\partial^2 e}{\partial q^2}\right)_{V, s} = e_{11}$$

Подставляя эти величины в формулу (1.7), находим

$$a_f^2 - a_e^2 = \frac{1}{\rho^2} \frac{e_{12}^2}{e_{11}} \geqslant 0 \tag{1.8}$$

Знак неравенства (1.8) определяется требованием термодинамической устойчивости системы. Равновесная скорость звука может достичь значения замороженной лишь при условии $e_{12} = 0$.

2. Асимптотические разложения. Перейдем к изучению предельных режимов распространения возмущений, используя разложения искомых функций в ряды по нескольким независимым малым параметрам.

Как известно [1,2], в релаксирующих смесях передача сигналов сопровождается дисперсией, причем скорость этой передачи в предельных случаях совпадает либо с замороженной, либо с равновесной скоростью звука. Первый из них реализуется, когда макроскопическое время много меньше времени протекания химической реакции, второй соответствует процессу, в котором макроскопическое время значительно превышает время релаксации. Кроме того, специальному рассмотрению должны подлежать среды с близкими значениями обеих скоростей звука.

Предположим, что значения всех характеристик газовой смеси в любой момент времени и в каждой точке пространства мало отклоняются от соответствующих значений в состоянии покоя, представляющего собой состояние полного термодинамического равновесия. Невозмущенные величины отметим нулевым индексом.

Введем систему координат, движущуюся либо с замороженной, либо с равновесной скоростью звука в покоящейся среде, и обозначим через L характерную длину в этой системе. Будем считать, что рассматриваемое течение релаксирующей смеси представляет собой короткую волну, т. е. ширина области, где сосредоточены возмущения, мала по сравнению с расстояниями, на которые распространяется волна. Тогда независимые переменные

$$t = \frac{L}{\Delta a_0} t', \qquad r = a_0 t + L r' \tag{2.1}$$

Здесь Δ — малый параметр.

Относительно возмущений полноты реакции, плотности, давления и прочих термодинамических величин предположим, что они имеют тот же порядок, что и массовая скорость частиц, пропорциональная второму малому параметру ε. Переходя к безразмерным искомым функциям, имеем

$$v = \varepsilon a_0 v', \quad q = q_0(1 + \varepsilon q'), \quad \rho = \rho_0(1 + \varepsilon \rho'), \quad p = p_0(1 + \varepsilon p')$$

$$s = s_0(1 + \varepsilon s'), \qquad T = T_0(1 + \varepsilon T'), \quad Q = \varepsilon \frac{p_0}{q_0 \rho_0} Q' \tag{2.2}$$

$$a_f = a_{f_0}(1 + \varepsilon a_f'), \qquad a_e = a_{e_0}(1 + \varepsilon a_e')$$

Что касается скорости химической реакции, то

$$q^{\cdot} = \varepsilon \frac{q_*}{\tau} q^{\cdot\prime} \tag{2.3}$$

Здесь τ — характерное время превращения компонентов смеси.

Напомним, что скорость a_0 движения волны по покоящейся среде совпадает либо с замороженной скоростью a_{f0}, либо с равновесной скоростью a_{e0} распространения звуковых сигналов.

При подстановке формул (2.1) и разложений (2.2) в исходную систему уравнений (1.1) с учетом соотношений (1.2) и (2.3) возникает дополнительный числовой параметр

$$N_r = L \,/\, \tau a_0$$

При выводе асимптотических уравнений во всех случаях будем удерживать лишь главные члены.

3. Квазизамороженный процесс. Будем считать, что замороженная и равновесная скорости звука в покоящейся среде отличаются на конечную величину. Рассматриваемая короткая волна с узкой возмущенной зоной движется, по определению, со скоростью $a_0 = a_{f0}$. Штрихи над безразмерными переменными в дальнейшем опускаем.

После линеаризации интегрирование первых двух уравнений системы (1.1) приводит к формулам

$$\rho = \frac{p_0}{\rho_0 a_0^2} p = v \tag{3.1}$$

Первая из них выражает тот факт, что в изучаемом приближении сжатие газа происходит обратимо и при постоянном составе реагирующей смеси, согласно второй соотношение Римана, характеризующее плоский бегущий звуковой импульс в инертном газе [2], имеет место для всего течения.

В силу малости сродства химической реакции из третьего уравнения системы (1.1) получаем

$$s = 0 \tag{3.2}$$

что подтверждает заключение об обратимом характере сжатия газа.

Напишем общее выражение для отклонения давления от равновесного значения в покоящейся среде, принимая в качестве независимых термодинамических параметров полноту химической реакции, плотность и энтропию

$$p_0 p = (\partial p / \partial q_0)_{\rho,\, s}\, q_0 q + \rho_0 a_{f0}^2 \rho + (\partial p / \partial s_0)_{q,\rho}\, s_0 s \tag{3.3}$$

Последний член в правой части здесь исчезает в силу (3.2). Чтобы приведенное соотношение совпало с первым равенством (3.1), необходимо удовлетворить требованию $q = 0$, которое было сформулировано выше. Это приводит к условию $N_r \ll 1$. Действительно, удержав в четвертом уравнении системы (1.1) только главные члены, находим

$$\partial q \,/\, \partial r = -N_r\, q^{\cdot} \tag{3.4}$$

При $N_r \ll 1$ отсюда следует $q = 0$.

Вывод соотношений (3.1) был основан на введении малого параметра Δ в определение безразмерного времени. Как следует из проведенного анализа, для квазизамороженного режима распространения возмущений такое введение оправдано лишь при условии, что макроскопическое время L / a_{f0} много меньше времени τ протекания химической реакции.

Наличие релаксационного процесса отчетливо проявляется при выводе последнего асимптотического уравнения, которое позволяет установить зависимость скорости от времени и координаты. С этой целью обратимся к уравнению (1.5). В рассматриваемом приближении

$$a_f = \left(\frac{\partial a_f}{\partial \rho_0}\right)_{q,s} \frac{\rho_0}{a_{f_0}} \rho = (m_{f_0} - 1)\rho, \qquad m_{f_0} = \frac{1}{2\rho_0^3 a_{f_0}^2}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial V_0^2}\right)_{q,s}$$

$$Q = \left(\frac{\partial Q}{\partial \rho_0}\right)_{q,s} \frac{q_0 \rho_0^2}{p_0} \rho$$

Сравним определения (1.2) и (2.3) для скорости химической реакции. Ясно, что

$$H_1 = \frac{q_0^2 \rho_0}{\tau p_0} H_1'$$

Здесь H_1' — безразмерная функция порядка единицы. Вспоминая равенство (1.4) для оператора L_f, находим

$$2\varepsilon m_{f_0} v \frac{\partial v}{\partial r} + \Delta\left[2\frac{\partial v}{\partial t} + (\nu - 1)\frac{v}{t}\right] = -N_r \frac{q_0^2 \rho_0 H_{10}}{p_0 a_{f_0}^2}\left(\frac{\partial p}{\partial q_0}\right)_{\rho,s}\left(\frac{\partial Q}{\partial \rho_0}\right)_{q,s} v \tag{3.5}$$

В зависимости от относительной величины малых параметров ε, Δ и N_r можно выделить различные случаи, которые встречаются при изучении квазизамороженного режима распространения возмущений. Не останавливаясь на них подробно, отметим, что при $N_r \ll \varepsilon \sim \Delta$ членом в правой части (3.5) можно пренебречь; получающееся в результате уравнение определяет течения инертного газа.

Если все члены в уравнении (3.5) одного порядка, то, полагая

$$2\varepsilon m_{f_0} = 2\Delta = N_r \frac{q_0^2 \rho_0 H_{10}}{p_0 a_{f_0}^2}\left(\frac{\partial p}{\partial q_0}\right)_{\rho,s}\left(\frac{\partial Q}{\partial \rho_0}\right)_{q,s}$$

можно привести его к виду

$$v\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial t} + \left(1 + \frac{\nu - 1}{2}\frac{1}{t}\right)v = 0 \tag{3.6}$$

Общее решение уравнения (3.6) записывается в виде

$$r - \tau u = f(u), \qquad \tau = \int t^{-(\nu-1)/2} e^{-t}\, dt, \qquad u = t^{(\nu-1)/2} e^{t} v$$

где f — произвольная функция. Полученное решение позволяет сформулировать основные выводы качественного порядка относительно квазизамороженного режима распространения возмущений.

В непрерывных течениях вдоль любой характеристики

$$r - v t^{(\nu-1)/2} e^{t} \int t^{-(\nu-1)/2} e^{-t}\, dt = \text{const} \tag{3.7}$$

скорость v затухает по закону

$$v \sim t^{-(\nu-1)/2} e^{-t}$$

предсказываемому геометрической акустикой [3,4], в рамках которой все нелинейные эффекты игнорируются. При $t \to \infty$ из соотношения (3.7) следует, что $r \to \text{const}$. Иными словами, все характеристические линии стремятся к прямым, параллельным оси времени.

Рассмотрим в качестве примера плоскую центрированную волну, которая образуется в момент времени $t = 0$ в точке с координатой $r = 0$

$$v|_{t=0} = \begin{cases} 0 & \text{для } r > 1 \\ -2\sigma & \text{для } r < 0 \end{cases} \tag{3.8}$$

В этом случае $\nu = 1$ и $\tau = -e^{-t}$. Удовлетворяя начальному условию, находим, что при $-2\sigma(1 - e^{-t}) \leqslant r \leqslant 0$ функция $f = u$. Отсюда

$$v = r(e^t - 1)^{-1} \tag{3.9}$$

При $r > 0$ решение тривиально: $v = 0$. При $r < -2\sigma(1 - e^{-t})$ имеем $v = -2\sigma e^{-t}$.

При малых значениях t равенство (3.9) дает в первом приближении $v = r / t$. Эта формула описывает, как известно [2], центрированную волну Римана, распространяющуюся в инертном газе.

Пусть теперь в течении имеется разрыв. В исходных размерных переменных скорость N распространения слабой ударной волны дается соотношением

$$N = a_{f_0} + \frac{1}{2}\frac{m_{f_0}}{\rho_0 a_{f_0}}(p - p_0)$$

Обозначая координату разрыва через r_s, а значение функции u непосредственно за ним через u_s, на основании формул (2.1), (2.2) и (3.1) выводим

$$dr_s / d\tau = {}^1/_2 u_s \tag{3.10}$$

Чтобы получить нужное решение уравнения (3.6), положим опять $\nu = 1$ и заменим в начальном условии (3.8) величину -2σ на $+2\sigma$. Тогда перед ударным фронтом $u = 0$, а за ним $u = 2\sigma$.

Положение разрыва определяется решением уравнения (3.10). В результате

$$r_s = \sigma(1 - e^{-t}) \tag{3.11}$$

Таким образом, ударная волна при $t \to \infty$ вырождается в невозмущенную характеристику. Даже в том случае, когда в начальный момент времени за разрывом имеется бесконечная область с постоянным избыточным давлением, его амплитуда быстро обращается в нуль.

Рассмотрим общую задачу ($\nu = 1,2,3$) о затухании ударной волны, за фронтом которой избыточное давление понижается до нуля. Изменение параметров смеси в течении разрежения зависит от вида функции f. Величина u_s для разных моментов времени находится из решения обыкновенного дифференциального уравнения, вытекающего из (3.10)

$$\left(\frac{df}{du} + \tau\right)\frac{du_s}{d\tau} = -\frac{1}{2}u_s \tag{3.12}$$

В асимптотической теории затухания ударных волн в инертном газе устанавливается [5,6], что распределение скорости за поверхностью разрыва меняется линейно по координате, т. е. $df / du = \tau_0$. Сохраним этот закон и для релаксирующей смеси, хотя в рассматриваемом случае асимптотическое поведение параметров течения разрежения будет в сильной степени зависеть от начальных данных. При $df / du = \tau_0$ имеем из уравнения (3.12)

$$u_s = c(\tau + \tau_0)^{-1/2}, \qquad r_s = c(\tau + \tau_0)^{1/2} \quad c = \mathrm{const} \tag{3.13}$$

Пусть, например, в начальный момент $t = 0$ времени имеется плоская волна со значением $v_s = 2\sigma$ скорости на ударном фронте и шириной λ_0 возмущенной области. Тогда постоянные $\tau_0 = 1 + \lambda_0 (2\sigma)^{-1}$ и $c = \sqrt{2\lambda_0\sigma}$. Используя второе равенство (3.13), находим, что в пределе при $t \to \infty$ ширина возмущенной области $\lambda_\infty = \lambda_0 \sqrt{1 + 2\sigma/\lambda_0}$ увеличивается по сравнению с начальной лишь в несколько раз. При малых значениях отношения $2\sigma / \lambda_0$ конечная координата ударного фронта будет $r_s = \sigma$. Разумеется, это значение получается также из формулы (3.11).

4. **Квазиравновесный процесс.** Положим скорость движения рассматриваемой короткой волны по покоящейся смеси равной равновесной скорости звука. После линеаризации уравнений неразрывности и Эйлера снова получаются формулы (3.1) с той лишь разницей, что величину a_{f0} следует заменить на a_{e0}. Иными словами, в рассматриваемом процессе сжатие газа совершается обратимо и при постоянном значении сродства химической реакции.

Выберем в качестве независимых термодинамических переменных химическое сродство, плотность и удельную энтропию. Отклонение давления от равновесного значения

$$p_0 p = \left(\frac{\partial p}{\partial Q_0}\right)_{\rho, s} \frac{p_0}{q_0 \rho_0} Q + \rho_0 a_{e0}^2 \rho + \left(\frac{\partial p}{\partial s_0}\right)_{\rho, Q} s_0 s \tag{4.1}$$

Последний член в правой части написанного соотношения исчезает в силу (3.2). Чтобы изменение давления происходило при постоянной величине сродства химической реакции, нужно теперь обратить в нуль еще и первый член. Это требование приводит к условию $N_r \gg 1$. Действительно, из (3.4) видно, что при $N_r \gg 1$ необходимо положить $q^* = 0$, а как показывает формула (1.2), вместе с q^* и химическое сродство $Q = 0$. Полученные результаты можно суммировать следующим образом: при исследовании квазиравновесного режима распространения возмущений в релаксирующей смеси введение малого параметра Δ в определение безразмерного времени допустимо при условии, что макроскопическое время L / a_{e0} значительно превышает время τ протекания химической реакции.

Обратимся к уравнению (1.6) и выведем недостающее соотношение, которому удовлетворяет скорость частиц газа. Приращение равновесной скорости звука

$$a_e = \left(\frac{\partial a_e}{\partial \rho_0}\right)_{Q, s} \frac{\rho_0}{a_{e0}} \rho = (m_{e0} - 1)\rho, \qquad m_{e0} = \frac{1}{2\rho_0^3 a_{e0}^2} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial V_0^2}\right)_{Q, s}$$

Поэтому упрощение левой части уравнения (1.6) производится совершенно аналогично проведенному в п.3.

При $Q = s = 0$ имеем

$$q = \left(\frac{\partial q}{\partial \rho_0}\right)_{Q,s} \frac{\rho_0}{q_0} \rho$$

Используя последнее соотношение, выводим

$$2\varepsilon m_{e0} v \frac{\partial v}{\partial r} + \Delta \left[2\frac{\partial v}{\partial t} + (\nu - 1)\frac{v}{t}\right] = \tag{4.2}$$
$$= -\frac{1}{N_r}\frac{p_0}{q_0^2 \rho_0 a_{e0}^2 H_{10}} \left(\frac{\partial p}{\partial Q_0}\right)_{\rho,s} \left(\frac{\partial q}{\partial \rho_0}\right)_{Q,s} \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}$$

Как было показано выше, для квазизамороженного режима наличие релаксационного процесса дает в асимптотическое уравнение вклад, пропорциональный функции v; изменение состава реагирующей смеси в квазиравновесном режиме учитывается при помощи ее второй производной $\partial^2 v / \partial r^2$. Отмеченное различие имеет простую математическую природу: в первом случае малый параметр N_r в исходных уравнениях Эйлера стоит при неизвестных функциях, во втором — роль малого параметра играет величина N_r^{-1}, причем на нее умножается комбинация производных функции q.

В задачах нелинейной акустики уравнение (4.2) встречалось при анализе потока инертного газа, обладающего вязкостью и теплопроводностью. На основании этого уравнения получены обширные результаты, относящиеся к затуханию плоских ударных волн в диссипативных средах [7]. Роль этого уравнения отмечена также в обзорной статье [8]. Цилиндрически и сферически симметричные ударные волны рассматривались в работе [9].

Введем в рассмотрение числа Рейнольдса и Пекле

$$N_{Re1} = \frac{\rho_0 a_0 L}{\lambda_{10}}, \qquad N_{Re2} = \frac{\rho_0 a_0 L}{\lambda_{20}}, \qquad N_{Pe} = \frac{\rho_0 a_0 c_{p0} L}{k_0}$$

и безразмерный термодинамический коэффициент

$$m_0 = {}^1/_2 \rho_0^{-3} a_0^{-2} (\partial^2 p / \partial V_0^2)_s$$

играющий в разложении для скорости звука в инертном газе ту же роль, что m_{f_0} и m_{e0}.

Здесь λ_1 и λ_2 — первый и второй коэффициенты вязкости, k — коэффициент теплопроводности, c_p — удельная теплоемкость при постоянном давлении, $\varkappa$ — показатель адиабаты Пуассона.

Уравнение, изучавшееся в работах [7-9], полностью совпадает с (4.2), если в последнем сделать замену коэффициентов по следующему правилу:

$$m_{e0} \to m_0, \qquad \frac{1}{N_r}\frac{p_0}{q_0^2 \rho_0 a_{e0}^2 H_{10}} \left(\frac{\partial p}{\partial Q_0}\right)_{\rho,s} \left(\frac{\partial q}{\partial \rho_0}\right)_{Q,s} \to -\frac{1}{N_{Re}}\left(1 + \frac{\varkappa_0 - 1}{N_{Pr}}\right) \tag{4.3}$$

Здесь суммарное число Рейнольдса $N_{Re} = ({}^4/_3 N_{Re_1}^{-1} + N_{Re_2}^{-1})^{-1}$ связано с так называемой «продольной вязкостью», а число Прандтля N_{Pr} равно отношению числа Пекле N_{Pe} к числу Рейнольдса N_{Re}. Отсюда следует точная математическая аналогия между рассматриваемыми процессами, согласно которой влияние химических превращений на квазиравновесное распространение звуковых импульсов эквивалентно воздействию на их структуру продольной вязкости и теплопроводности.

Широко известна и другая формулировка аналогии между вязкими и релаксирующими течениями. Как указали еще М. А. Леонтович и Л. И. Мандельштам [10,11], в явлениях распространения звука процесс химических превращений формально играет ту же роль, какую выполняет вторая вязкость, определяемая коэффициентом λ_2. Они обратили внимание на эквивалентность соответствующих выражений для отклонения давления от своего равновесного значения, которые в обоих случаях пропорциональны дивергенции скорости. При исследовании нелинейного движения коротких волн предпочтительнее формулировать аналогию в терминах продольной вязкости и теплопроводности. Как было установлено недавно [12], на замене типа (4.3) основано также сопоставление стационарных равновесных трансзвуковых течений и потоков инертного газа в околозвуковом диапазоне скоростей.

Если все члены в уравнении (4.2) одного порядка, то, полагая

$$2\varepsilon m_{e0} = 2\Delta = -\frac{1}{N_r}\frac{p_0}{q_0^2\rho_0 a_{e0}^2 H_{10}}\left(\frac{\partial p}{\partial Q_0}\right)_{\rho,s}\left(\frac{\partial q}{\partial \rho_0}\right)_{Q,s}$$

можно привести его к виду

$$v\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\nu - 1}{2}\frac{v}{t} = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} \tag{4.4}$$

Рассмотрим распространение плоских волн с $\nu = 1$. В этом случае преобразование [7,8]

$$v = -\frac{2}{\Psi}\frac{\partial\Psi}{\partial r}$$

приводит (4.4) к уравнению теплопроводности.

Пусть для уравнения (4.4) поставлена задача Коши (3.8). Тогда в качестве начальных данных для функции Ψ получим

$$\Psi|_{t=0} = \begin{cases} 1 & \text{для} \quad r > 0 \\ e^{\sigma r} & \text{для} \quad r < 0 \end{cases} \tag{4.5}$$

Используя интеграл Пуассона, решение уравнения теплопроводности можно записать в виде

$$\Psi = \frac{1}{2}\left\{1 + \operatorname{erf}\left(\frac{r}{2\sqrt{t}}\right) + e^{\sigma(r+\sigma t)}\left[1 - \operatorname{erf}\left(\sigma\sqrt{t} + \frac{r}{2\sqrt{t}}\right)\right]\right\} \tag{4.6}$$

Наибольший интерес заключается в выяснении асимптотических свойств решения при $t \to \infty$.

Видно, что для любого луча с положительным наклоном в плоскости rt начальное значение $\Psi = 1$ в первом приближении не меняется, отсюда $v = 0$. На лучах с наклоном меньше -2σ скорость v принимает свое начальное значение (3.8), хотя функция Ψ отлична от (4.5). Если

$$r = -2\alpha t, \qquad 0 < \alpha < \sigma \tag{4.7}$$

то оценка главной части фигурирующих в формуле (4.6) интегралов дает

$$\Psi = \frac{\sigma}{2\sqrt{\pi t}\,\alpha(\sigma - \alpha)}e^{-\alpha^2 t}$$

Отсюда следует, что при $\alpha \to 0$ и $\alpha \to \sigma$ в решении имеется особенность. Возвращаясь к исходным переменным, получим $v = -2\alpha$. Последнее равенство определяет волну Римана в теории одномерных течений инертного газа [2]. Действительно, оно показывает, что вдоль каждой из прямых (4.7) скорость сохраняет постоянное значение, отвечающее наклону этой прямой.

Таким образом, при больших временах релаксационный процесс не оказывает существенного влияния на основную часть течения. Свойства возмущенного поля скоростей будут в большой степени зависеть от наличия химической реакции лишь в окрестности фронта и хвоста волны, ширина которой увеличивается со временем как $\sqrt{t}$.

Вблизи фронта волны положим

$$r = 2\beta\sqrt{t} \tag{4.8}$$

Как показывает простая оценка, вторым слагаемым в квадратных скобках в правой части соотношения (4.6) можно пренебречь, в результате скорость

$$v = -\frac{2}{\sqrt{\pi t}\,[1 + \operatorname{erf}(\beta)]}\, e^{-\beta^2} \tag{4.9}$$

Согласно формуле (4.9) затухание возмущений перед фронтом волны происходит по экспоненциальному закону. За фронтом волны при $\beta \to -\infty$ имеем $v = 2\beta / \sqrt{t}$, т. е. рассматриваемое решение дает распределение параметров газа в волне Римана с постоянным значением скорости на лучах в плоскости rt.

Аналогично устанавливается характер поведения возмущений в окрестности хвоста волны, где

$$r = -2\sigma t + 2\beta\sqrt{t}$$

В этой области в первом приближении

$$v = -2\sigma + \frac{2}{\sqrt{\pi t}\,[1 - \operatorname{erf}(\beta)]}\, e^{-\beta^2} \tag{4.10}$$

Как показывает соотношение (4.10), за фронтом волны имеет место экспоненциальное стремление скорости к своему предельному значению -2σ. В области, расположенной перед ним, при $\beta \to +\infty$ находим $v = -2\sigma + 2\beta / \sqrt{t}$, т. е. изменение скорости следует законам простых волн.

Сравним построенное решение уравнения (4.4) с решением, которое получается в рамках акустики [13].

Основное различие здесь в том, что в линейной теории отсутствует веер прямых с постоянным значением скорости вдоль каждой из них. В то же время, влияние релаксационного процесса, выражающееся в размывании границ возмущенной области, согласно формулам (4.9) и (4.10), учитывается этой теорией правильно. Отсюда ясно, что акустика предсказывает рост ширины возмущенной зоны как $\sqrt{t}$.

Пусть теперь в данных Коши (3.8) величина -2σ заменена на $+2\sigma$. Чтобы воспользоваться предыдущими результатами, достаточно ввести знак минус перед постоянной σ в формулах (4.5) и (4.6). Выясним предельные свойства решения при $t \to \infty$. Вдоль любого луча в плоскости rt, наклон которого больше 2σ, начальное значение $\Psi = 1$ в первом приближении сохраняется, т. е. $v = 0$. На всех лучах с отрицательным наклоном скорость v равна своему начальному значению (3.8) несмотря на отличие в начальных и текущих значениях функции Ψ. Если положить $r = 2\alpha t$ $(0 < \alpha < \sigma)$, то, удержав в формуле (4.6) лишь главные члены, имеем $\Psi = 1 + e^{-\sigma(r-\sigma t)}$ при любых α. Отсюда следует

$$v = \sigma - \sigma \operatorname{th} \frac{\sigma(r - \sigma t)}{2} \tag{4.11}$$

Это решение описывает структуру слабой ударной волны, движущейся со скоростью σ. Оно было впервые указано Тейлором [14] при изучении течений вязкого и теплопроводящего газа.

Рассмотрим область, в которой

$$r = 2\sigma t + 2\beta \sqrt{t} \tag{4.12}$$

Здесь в первом приближении

$$v = \sigma\,[1 - \operatorname{erf}(\beta)]\, e^{-\sigma^2 t - 2\sigma\beta\sqrt{t}}$$

При больших положительных значениях β получим

$$v = \frac{\sigma}{\beta\sqrt{\pi}}\, e^{-(\sigma\sqrt{t}+\beta)^2} \tag{4.13}$$

Пусть теперь координата r задана равенством (4.8). Тогда

$$v = 2\sigma - \sigma\,[1 + \operatorname{erf}(\beta)]\, e^{-\sigma^2 t + 2\sigma\beta\sqrt{t}}$$

При больших отрицательных значениях β выводим

$$v = 2\sigma + \frac{\sigma}{\beta\sqrt{\pi}}\, e^{-(\sigma\sqrt{t}-\beta)^2} \tag{4.14}$$

Как показывают формулы (4.13) и (4.14), предельные значения скорости впереди и позади ударной волны достигаются чрезвычайно быстро, так как показатель экспоненты наряду с β содержит также время t. Нетрудно проверить, что решения для областей, где координата r задана равенствами (4.8) или (4.12), переходят в решение Тейлора (4.11). В первом случае нужно устремить параметр β к $-\infty$, во втором к $+\infty$.

5. **Среды с близкими скоростями звука.** Вспомним формулу (1.10), определяющую разность квадратов замороженной и равновесной скоростей звука. Если их значения в покоящейся среде близки, то термодинамическая производная

$$e_{120} = \varepsilon_a \frac{p_0}{q_0} e'_{120}$$

где ε_a — новый малый параметр, e'_{120} — безразмерная величина порядка единицы. Необходимость исследования сред такого типа впервые отмечена в работе [15].

Из последнего уравнения системы (1.1), задающего скорость протекания релаксационного процесса, видно, что возмущенная полнота реакции пропорциональна произведению $\varepsilon\varepsilon_a$, ему же должны быть пропорциональны функции Q и $q^{\cdot}$. Таким образом, при переходе к безразмерным переменным и последующем упрощении уравнений движения смеси необходимо в соотношениях (2.2) и (2.3) сделать замену

$$q' \to \varepsilon_a q', \qquad Q' \to \varepsilon_a Q', \qquad q'' \to \varepsilon_a q''$$

В результате имеем

$$Q = \frac{q_0^2 \rho_0 e_{110}}{p_0} q - e_{120}\rho \tag{5.1}$$

Как и над всеми безразмерными величинами, штрих над e_{120} здесь опущен. Обе скорости звука a_{f0} и a_{e0} имеют близкие значения, поэтому можно отказаться от предположения, что скорость a_0 движения волны непременно совпадает с одной из них. Положим, согласно соотношению (1.10)

$$a_0 - a_{f_0} = \varepsilon_a^2 a_0 \sigma_{f_0}, \qquad a_0 - a_{e0} = \varepsilon_a^2 a_0 \sigma_{e0} \tag{5.2}$$

Постоянные σ_{f0} и σ_{e0} будут, очевидно, порядка единицы.

Первые два уравнения исходной системы (1.1) не содержат функций q и Q, их линеаризация приводит вновь к формулам (3.1) с заменой a_{f0} на a_0. Видно, что равенство (3.2) для возрастания энтропии имеет место и в рассматриваемом случае специальных сред. Более точная оценка показывает, что $s \sim \varepsilon\varepsilon_a^2$.

Обратимся к разложениям (3.3) и (4.1), которые задают отклонение давления от равновесного значения в покоящейся среде. Термодинамическая производная

$$\left(\frac{\partial p}{\partial Q}\right)_{\rho, s} = \frac{(\partial p / \partial q)_{V, s}}{(\partial Q / \partial q)_{V, s}}$$

поэтому с точностью до величин порядка ε_a^2 оба эти разложения совпадают с первой из формул (3.1), причем безразмерный параметр N_r остается произвольным.

Уравнение (3.4) для скорости химической реакции представим в виде

$$\frac{\partial q}{\partial r} = N_r H_{10}\left(\frac{q_0^2 \rho_0 e_{110}}{p_0} q - e_{120} v\right) \tag{5.3}$$

Для вывода недостающего соотношения воспользуемся снова альтернативными формами (1.5) и (1.8), которые следуют из закона сохранения энергии. Если учесть разность между скоростью a_0 движения волны и замороженной скоростью звука a_{f_0}, то первая из них дает

$$2(\varepsilon m_{f_0} v - \varepsilon_a^2 \sigma_{f_0}) \frac{\partial v}{\partial r} + \Delta\left[2\frac{\partial v}{\partial t} + (\nu - 1)\frac{v}{t}\right] = \varepsilon_a^2 \frac{p_0 e_{120}}{\rho_e a_0^2} \frac{\partial q}{\partial r} \tag{5.4}$$

Совершенно аналогично, принимая во внимание разность между a_0 и a_{e0}, выводим из второй альтернативной формы

$$2\left(\varepsilon m_{e0} v - \varepsilon_a^2 \sigma_{e0}\right) \frac{\partial v}{\partial r} + \Delta \left[\frac{\partial v}{\partial t} + (\nu - 1)\frac{v}{t}\right] = \varepsilon_a^2 \frac{p_0^2 e_{120}}{q_0^2 \rho_0^2 e_{110} a_0^2} \frac{\partial Q}{\partial r} \quad (5.5)$$

Уравнения (5.4) и (5.5) должны совпадать друг с другом.

Чтобы убедиться в этом, отметим, прежде всего, равенство $m_{f0} = m_{e0} = m_0$, которое выполняется с точностью до ε_a^2. Вспоминая далее определения (5.2) постоянных σ_{f0} и σ_{e0}, находим

$$2\left(\sigma_{f_0} - \sigma_{e0}\right) = -\frac{p_0^2 e_{120}^2}{q_0^2 \rho_0^2 e_{110} a_0^2}$$

Подставив теперь выражение (5.1) для Q в правую часть уравнения (5.5), приводим его к виду (5.4).

Исключив из уравнений (5.3) и (5.4) термодинамическую функцию q, приходим к уравнению второго порядка, которое содержит только возмущенную скорость частиц смеси

$$2\left(\varepsilon m_0 v - \varepsilon_a^2 \sigma_{e0}\right) \frac{\partial v}{\partial r} + \Delta \left[2\frac{\partial v}{\partial t} + (\nu - 1)\frac{v}{t}\right] - \varepsilon_a^2 \frac{1}{N_r} \frac{p_0^3 e_{120}^2}{q_0^4 \rho_0^3 e_{110}^2 H_{10} a_0^2} \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} =$$
$$= \frac{1}{N_r} \frac{p_0}{q_0^2 \rho_0 e_{110} H_{10}} \frac{\partial}{\partial r}\left\{2\left(\varepsilon m_0 v - \varepsilon_a^2 \sigma_{e0}\right)\frac{\partial v}{\partial r} + \Delta\left[2\frac{\partial v}{\partial t} + (\nu - 1)\frac{v}{t}\right]\right\} \quad (5.6)$$

В предельных случаях уравнение (5.6) переходит в уравнения (3.5) или (4.2).

Пусть $a_0 = a_{f0}$, $N_r \to 0$, $\varepsilon_a^2 N_r \sim \varepsilon$. Отбрасывая в уравнении (5.6) младшие члены и интегрируя полученное соотношение, получим уравнение (3.5) при $a_{f0} \to a_{e0}$.

Рассмотрим другую возможность, когда $a_0 = a_{e0}$, $N_r^{-1} \to 0$, $\varepsilon_a^2 N_r^{-1} \sim \varepsilon$. В этом случае получим уравнение (4.2), в правой части которого удержан лишь главный член при условии $a_{f0} \to a_{e0}$.

Подчиним малые параметры следующим связям:

$$\varepsilon m_0 = \Delta = \varepsilon_a^2 \frac{p_0^2 e_{120}^2}{q_0^2 \rho_0^2 e_{110} a_0^2}$$

и обозначим посредством

$$\sigma = \frac{\varepsilon_a^2}{\varepsilon} \frac{\sigma_{e0}}{m_0}, \qquad l = \frac{1}{N_r} \frac{p_0}{q_0^2 \rho_0 e_{110} H_{10}}$$

Переходя к новой искомой функции $v - \sigma = u$, запишем уравнение (5.6) как

$$u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\nu - 1}{2} \frac{u + \sigma}{t} = l \frac{\partial}{\partial r}\left(u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\nu - 1}{2} \frac{u + \sigma}{t}\right) + \frac{l}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}$$

Применим полученное уравнение для описания внутренней структуры ударных волн. С этой целью при $\nu = 1$ рассмотрим его решения, не зависящие от времени t. Для полностью диспергированных волн, в которых отсутствуют разрывы, имеем после однократного интегрирования

$$lu \frac{du}{dr} + \frac{1}{2} l \frac{du}{dr} - \frac{1}{2} u^2 = -\frac{1}{2} \sigma^2 \quad (5.7)$$

Произвольная постоянная здесь определена из условия, что $u \to -\sigma$ при $r \to \infty$. Если волна не обладает полной дисперсией, то область возмущений ограничена фронтом, при переходе через который полнота реакции сохраняется, а скорость испытывает скачок. Тем не менее, соотношение (5.7) сохраняет силу и для разрывных движений релаксирующей смеси.

Чтобы убедиться в этом, напишем в исходных переменных равенство

$$j^2 = -(p - p_0) / (V - V_0) \tag{5.8}$$

задающее поток j массы в системе координат, перемещающейся вместе с фронтом волны. Равенство (5.8) хорошо известно в теории ударных волн [2], но его можно применять и при исследовании непрерывных течений. Разложим давление в ряд, в котором в качестве независимых переменных выберем полноту химической реакции, удельный объем и энтропию, и удержим члены не только первого, но и второго порядка малости. После перехода к безразмерным величинам находим

$$p_0 p = -\varepsilon_a{}^2 p_0 e_{120} q - \rho_0 a_{f_0}{}^2 V + \frac{1}{2} \varepsilon \frac{1}{\rho_0{}^2} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial V_0{}^2}\right)_{q,s} V^2$$

Если учесть, что поток $j = -\rho_0 a_0$, то подстановка разложения (5.9) в правую часть формулы (5.8) дает следующую связь между функциями q и v в любой точке возмущенной области:

$$\varepsilon_a{}^2 \sigma_{f_0} = \frac{1}{2} \varepsilon m_0 \left(v - \frac{q_0{}^2 \rho_0 e_{110}}{p_0 e_{120}} \frac{q}{v}\right)$$

Существенно отметить, что наличие этой связи не зависит от того, являются ли обе рассматриваемые функции непрерывными или содержат разрывы, отвечающие ударному фронту с координатой $r = r_s$.

Заменив v на u, имеем

$$\frac{q_0{}^2 \rho_0 e_{110}}{p_0 e_{120}} q = u^2 + u - \sigma^2 + \sigma \tag{5.9}$$

В результате подстановки этого выражения в правую часть уравнения (5.3) получается соотношение (5.7), т. е. сформулированное выше утверждение доказано. Это означает, что выражение (5.9) является точным интегралом уравнения (5.3).

На ударном фронте полнота реакции не изменяется. Отсюда следует

$$u_s = \sigma - 1 \tag{5.10}$$

Можно получить последнее равенство иным путем. Из формулы, задающей скорость N распространения слабой ударной волны, выводим

$$dr_s / dt = {}^1/_2 (u_s + 1 - \sigma)$$

Рассматриваемое решение не зависит от времени, т. е. $dr_s / dt = 0$, что приводит к (5.10).

Интегрирование уравнения (5.7) дает соотношение

$$\frac{r - r_s}{l} = \ln (\sigma + u)^{1-1/2\sigma} (\sigma - u)^{1+1/2\sigma}$$

применимое для описания как полностью диспергированных ударных волн, так и волн с неполной дисперсией.

Несколько иначе вопрос о структуре ударных волн разобран в [13].

Многие из изложенных в данной работе результатов независимо получил В. В. Лунев, которому автор выражает искреннюю признательность за продолжительные дискуссии.

Поступила 16 VI 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Де Гроот С., Мазур П. Неравновесная термодинамика. М., «Мир», 1964.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1954.
3. Wegener P. P., Boa-Teh Chu, Klikoff W. A. Weak waves in relaxing flows. J. Fluid Mech., 1965, vol. 23, pt. 4.
4. Крайко А. Н. Исследование слабо возмущенных сверхзвуковых течений при произвольном числе неравновесных процессов. ПММ, 1966, т. 30, вып. 4.
5. Crussard L. Sur la propagation et l'altèration des ondes de chock. Compt. Rend. 1913, t. 156, N 8.
6. Ландау Л. Д. Об ударных волнах на далеких расстояниях от места их возникновения. ПММ, 1945, т. 9, вып. 4.
7. Lighthill M. J. Viscosity effects in sound waves of finite amplitude. Surveys in Mechanics, G. I. Taylor 70-th Anniversary volume. Cambridge, University Press, 1956.
8. Хейз У. Д. Основы теории газодинамических разрывов. Основы газовой динамики. М., Изд. иностр. лит., 1963.
9. Рыжов О. С. О влиянии вязкости и теплопроводности на распространение звуковых импульсов. ПММ, 1966, т. 30, вып. 2.
10. Леонтович М. А. Замечания к теории поглощения звука в газах. ЖЭТФ, 1936, т. 6, вып. 6.
11. Мандельштам Л. И., Леонтович М. А. К теории поглощения звука в жидкостях. ЖЭТФ, 1937, т. 7, вып. 3.
12. Наполитано Л. Дж., Рыжов О. С. Об аналогии между неравновесными и вязкими инертными течениями при околозвуковых скоростях. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1971, т. 11, № 5.
13. Кларк Дж., Макчесни М. Динамика реальных газов. М., «Мир», 1967.
14. Taylor G. I. The Conditions Necessary for Discontinuous Motion in Gases. Proc. Roy. Soc., Ser. A., 1910, vol. 84, No. 571.
15. Napolitano L. G. Small perturbation theories for singly reacting mixtures. I. A. Report, 1966, No. 135.