

О ВОЗНИКНОВЕНИИ КОНВЕКЦИИ В САМОГРАВИТИРУЮЩЕМ ЖИДКОМ ШАРЕ, НАГРЕВАЕМОМ ИЗНУТРИ

В. Г. Бабский, И. Л. Скловская

(Харьков)

Доказывается, что при потере устойчивости состояния равновесия самогравитирующей жидкости, заполняющей твердую сферу с равномерно распределенными внутри источниками тепла, возникает стационарное осесимметричное (с точностью до произвольного вращения) течение, устойчивое вблизи точки потери устойчивости. Это течение строится чл.ленно в виде отрезка ряда Ляпунова — Шмидта.

Задача о тепловой неустойчивости самогравитирующего жидкого шара связана с разными теориями и гипотезами в гео- и астрофизике, а также с изучением поведения жидкости в условиях, близких к невесомости. Ранее исследования были направлены, главным образом, на формулировку и решение линеаризованной задачи и нахождение границы устойчивости [1]. Эти результаты нашли развитие в более поздних работах ([2,3] и др.). В работе [4] к соответствующей нелинейной задаче применен энергетический метод, предложенный Чандрасекхаром [1].

Ниже для изучения возникновения конвекции в самогравитирующем жидком шаре используется теория ветвления решений уравнений стационарной конвекции [5,6].

1. Постановка задачи. Твердая сфера S радиуса a заполнена вязкой несжимаемой жидкостью, на которую воздействует сферически симметричное радиальное гравитационное поле $\frac{4}{3}\pi\rho Gr \equiv gr$ (G — гравитационная постоянная, ρ — плотность жидкости). В жидкости распределены источники тепла постоянной интенсивности τ , температура стенки поддерживается постоянной ($T|_S = \text{const}$), температура и давление в жидкости зависят только от радиуса, жидкость неподвижна (выполнено условие механического равновесия [7]).

При потере устойчивости равновесного состояния жидкости может возникнуть свободная конвекция. В рассматриваемой задаче выполняется «принцип изменения устойчивости» [1], поэтому границей устойчивости служит наименьшее собственное значение R линеаризованной задачи для возмущений скорости, давления и температуры

$$\Delta u = \nabla p - R\theta r, \quad \nabla u = 0, \quad \Delta\theta = -ru_r, \quad u|_S = 0, \quad \theta|_S = 0 \quad (1.1)$$

Возникающее конвективное движение описывается решением уравнений стационарной свободной конвекции [1,7]

$$\begin{aligned} \Delta u &= (u\nabla)u + \nabla p - R\theta r, \quad \nabla u = 0, \quad u|_S = 0 \\ \Delta\theta &= Pu\nabla\theta - ru_r, \quad \theta|_S = 0 \quad \left(R = \frac{g\beta\tau a^6}{3\chi^2\nu}, \quad P = \frac{\nu}{\chi} \right) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь R — число Рэлея, P — число Прандтля, ν , χ , β — коэффициенты кинематической вязкости, температуропроводности и линейного расширения жидкости.

2. **Операторные уравнения.** Пусть H — пространство пар $z = (u, \theta)$ ($u \in H_1, \theta \in H_2$) с нормой

$$\|z\|_H = (\|u\|_{H_1}^2 + \|\theta\|_{H_2}^2)^{1/2} \quad (2.1)$$

где H_1, H_2 — гильбертовы пространства, введенные в работе [8].

Лемма 2.1. Задача (1.2) эквивалентна операторному уравнению

$$z = B(R, z) \quad (z \in H) \quad (2.2)$$

с вполне непрерывным оператором B , а задача (1.1) — операторному уравнению

$$z = A(R)z \quad (2.3)$$

причем оператор A вполне непрерывен и представляет собой дифференциал Фреше оператора $B(R, z)$ в точке $z = 0$.

Доказательство. Задачи (1.1), (1.2) сводятся к операторным уравнениям (см. [8])

$$u = -K_1(u\nabla)u + RK_1(\theta r), \quad \theta = -PL_1(u\nabla\theta) + L_1(ru_r) \quad (2.4)$$

$$u = RK_1(\theta r), \quad \theta = L_1(ru_r) \quad (u \in H_1, \theta \in H_2) \quad (2.5)$$

Операторы K_1, L_1 определены в [8], там же показано, что K_1, K_2 ($K_2 u = -K_1(u\nabla)u$) вполне непрерывны в H_1 , а L_1 — в H_2 . Покажем, что оператор L_2 ($L_2 z = -PL_1(u\nabla\theta)$), действующий из H в H_2 , вполне непрерывен. Для этого достаточно доказать, что всякую слабо сходящуюся в H последовательность $\{z^m\}$ он преобразует в последовательность $\{L_2 z^m\}$, сильно сходящуюся в H_2 . Используя интегральное тождество

$$\int_{\Omega} \nabla \theta u \varphi \, dx = - \int_{\Omega} \theta u \nabla \varphi \, dx \quad (\theta, \varphi \in H_2, u \in H_1) \quad (2.6)$$

неравенство Гельдера и теоремы вложения, имеем

$$(L_2 z^m - L_2 z^n, \varphi)_{H_2} \leq C_1 (\|u^m - u^n\|_{L_4} \|\theta^n\|_{H_2} + \|\theta^m - \theta^n\|_{L_4} \|u^n\|_{H_1}) \|\varphi\|_{H_2} \quad (2.7)$$

Так как последовательности $\{u^m\}, \{\theta^m\}$ сильно сходятся в L_4 , из неравенства (2.7) следует сильная сходимость $\{L_2 z^m\}$ в H_2 , если положить в нем $\varphi = L_2 z^m - L_2 z^n$.

Введем теперь обозначения

$$\begin{aligned} A(R)z &= (RK_1(\theta r), L_1(ru_r)) \quad (z = (u, \theta), u \in H_1, \theta \in H_2) \\ D(z, z) &= (-K_1(u\nabla)u, -PL_1(u\nabla\theta)) \\ B(R, z) &= A(R)z + D(z, z) \end{aligned} \quad (2.8)$$

Операторы A, B, D вполне непрерывны в H . Последнее утверждение леммы следует из оценок

$$\|K_2 u\|_{H_1} \leq C_2 \|z\|_H^2, \quad \|L_2 z\|_{H_2} \leq C_3 \|z\|_H^2 \quad (z \in H) \quad (2.9)$$

первая из которых доказана в [9], а вторая вытекает из неравенства, аналогичного (2.7). Лемма доказана.

Пусть R_0 — собственное значение задачи (1.1), а $\zeta = (u, \theta)$ — соответствующий ему собственный вектор. Тогда отвечающий R_0 собственный вектор сопряженной задачи

$$\Delta w = \nabla q - \tau r, \quad \nabla w = 0, \quad \Delta \tau = -R_0 r w_r, \quad w|_S = 0, \quad \tau|_S = 0 \quad (2.10)$$

имеет вид

$$\eta = (w, \tau), \quad w = R_0^{-1}u, \quad \tau = \theta \quad (2.12)$$

Из (2.10) следует также, что

$$A^*(R)z = (K_1(\tau r), RL_2(rw_r)) \quad (z = (w, \tau), \quad w \in H_1, \quad \tau \in H_2) \quad (2.12)$$

3. Спектральная задача. Линеаризованная система уравнений (1.1) допускает разделение переменных, если искать решение в виде рядов по обобщенным сферическим функциям $T_{mn}^l(1/2\pi - \varphi, \vartheta, 0)$ [10]. В результате приходим к задаче на собственные значения относительно параметра R для системы обыкновенных дифференциальных уравнений [11]

$$D_l v_l = \frac{2}{r^2} u_l - \frac{1}{r} p_l \quad \left(D_l = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right), \quad v_l(1) = 0$$

$$D_l u_l = \frac{2}{r^2} u_l + \frac{2l(l+1)}{r^2} v_l + \frac{dp_l}{dr} - Rr\theta_l, \quad u_l(1) = 0 \quad (3.1)$$

$$\frac{du_l}{dr} + \frac{2}{r} u_l + \frac{l(l+1)}{r} v_l = 0, \quad D_l \theta_l = -ru_l, \quad \theta_l(1) = 0 \quad (l = 1, 2, 3, \dots)$$

с условиями ограниченности в нуле. Исключим из системы (3.1) p_l и v_l

$$D_l^2 \omega_l = Rl(l+1)\theta_l \quad (\omega_l = ru_l), \quad \omega_l(0) = \omega_l(1) = \omega_l'(1) = 0, \quad \omega_l'(0) < \infty$$

$$D_l \theta_l = -\omega_l, \quad \theta_l(1) = 0, \quad \theta_l(0) < \infty \quad (3.2)$$

Функция Грина $G_{1l}(r, s)$ оператора $-r^2 D_l$ с граничными условиями $u(1) = 0$, $u(0) < \infty$ и функция Грина $G_{2l}(x, s)$ оператора $r^2 D_l^2$ с граничными условиями $u(1) = u'(1) = u(0) = 0$, $u'(0) < \infty$ симметричны и имеют вид

$$G_{1l}(r, s) = \frac{r^l (s^{-l-1} - s^l)}{2l+1}, \quad r \leq s, \quad G_{2l}(x, s) = \frac{\eta_1(x)\psi_1(s) + \eta_2(x)\psi_2(s)}{4(2l-1)(2l+1)(2l+3)}, \quad x \leq s \quad (3.3)$$

$$\eta_1(x) = (l+2)x^l - lx^{l+2}, \quad \eta_2(x) = x^l - x^{l+2}$$

$$\psi_1(s) = (2l-1)s^{l+2} - (2l+3)s^l + (2l+3)s^{-l+1} - (2l-1)s^{-l-1}$$

$$\psi_2(s) = (l+2)(2l-1)s^{l+2} - (l-1)(2l+3)s^l -$$

$$-l(2l+3)s^{-l+1} + (l+2)(2l-1)s^{-l-1} \quad (3.4)$$

Определим интегральные операторы G_{1l} и G_{2l} формулами

$$G_{kl}\psi = \int_0^1 G_{kl}(x, y)\psi(y)y^2 dy \quad (k = 1, 2; \quad l = 1, 2, \dots) \quad (3.5)$$

При помощи этих операторов задача (3.2) сводится к интегральному уравнению

$$\theta_l = \lambda_l G_l \theta_l \quad (\lambda_l = Rl(l+1), \quad G_l = G_{1l}G_{2l}) \quad (3.6)$$

Лемма 3.1. Оператор G_l — осцилляционный.

Для $G_{1l}(r, s)$ выполняются условия осцилляционности однопарных ядер [12]. Осцилляционность $G_{2l}(x, s)$ следует из возможности представления оператора $r^2 D_l^2$ в виде

$$r^2 D_l^2 u = r^{-l} \frac{d}{dr} r^{2l+2} \frac{d}{dr} r^{-2l} \frac{d}{dr} r^{2l+2} \frac{d}{dr} r^{-l} u \quad (3.7)$$

и результатов работы [12] (см. [13], лемма 3.2). Тогда ядро оператора G_l осцилляционно как композиция осцилляционных ядер [14].

Из леммы 3.1 вытекает, что оператор G_l при каждом l ($l = 1, 2, \dots$) имеет последовательность простых, положительных характеристических значений $0 < \lambda_{1l} < \lambda_{2l} < \dots$, откуда следует

$$0 < R_{1l} < R_{2l} < \dots \quad (3.8)$$

Интересующее нас наименьшее характеристическое значение оператора $A(R)$ равно $\min_l R_{1l}$ ($l = 1, 2, \dots$).

Пусть K — конус неотрицательных функций из $C[0, 1]$ [15]. Обозначим $u_0 = r^l(1-r)$. Выделим в пространстве $C[0, 1]$ подпространство E_{u_0} функций с конечной u_0 -нормой. По определению [15]

$$u \in E_{u_0}: -\alpha_1 u_0 \leq u \leq \alpha_2 u_0; \quad \alpha_1, \alpha_2 > 0; \quad \|u\|_{u_0} = \max\{\inf \alpha_1, \inf \alpha_2\} \quad (3.9)$$

Здесь \inf берется по всем α_1, α_2 , для которых выполняются эти неравенства. Введем вспомогательный конус $K_{u_0} = E_{u_0} \cap K$. Конус K_{u_0} нормален и телесен в E_{u_0} [15].

Лемма 3.2. Оператор G_l сильно положителен относительно конуса K_{u_0} .

Доказательство. Утверждение леммы означает [15], что для любой функции $u \in K_{u_0}$ функция $G_l u$ является внутренним элементом конуса K_{u_0} . Заметим, что из осцилляционности ядра $G_{2l}(x, s)$ (лемма 3.1) следует, что оператор G_{2l} оставляет инвариантным конус K . Поэтому достаточно доказать, что оператор G_{1l} преобразует конус K во внутреннюю часть конуса K_{u_0} .

Функция Грина $G_{1l}(r, s)$ удовлетворяет условию $G_{1l}(r, s) > 0$ ($0 < r, s < 1$), а также следующим непосредственно проверяемым условиям:

$$\left. \frac{\partial^k G_{1l}(r, s)}{\partial r^k} \right|_{r=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial^l G_{1l}(r, s)}{\partial r^l} \right|_{r=0} > 0, \quad G_{1l}(1, s) = 0, \quad \left. \frac{\partial G_{1l}(r, s)}{\partial r} \right|_{r=1} < 0$$

$$(k = 1, 2, \dots, l-1)$$

Таким образом, оператор G_{1l} преобразует всякую функцию $u \in K$ в функцию вида

$$r^l(1-r)f(r), \quad f(r) > 0 \quad (0 \leq r \leq 1) \quad (3.10)$$

Из (3.10) следуют неравенства

$$\alpha u_0 \leq G_{1l} u \leq \beta u_0, \quad \alpha = \min f(r), \quad \beta = \max f(r) \quad (0 \leq r \leq 1) \quad (3.11)$$

Известно, что u_0 — внутренний элемент конуса K_{u_0} [15], тогда из неравенств (3.11) следует, что $G_{1l} u$ — также внутренний элемент K_{u_0} . Лемма доказана.

Следствие. Собственная функция $\theta_{1l}(r)$, соответствующая характеристическому значению R_{1l} , является внутренним элементом конуса K_{u_0} , т. е. имеет вид (3.10).

Лемма 3.3. Оператор $l(l+1)G_l$ монотонен относительно параметра l : $lG_l > (l+2)G_{l+1}$.

Доказательство. Докажем монотонность оператора G_{1l}

$$G_{1l} > G_{1, l+1} \quad (3.12)$$

Действительно, для $r \leq s$

$$G_{1, l+1}(r, s) - G_{1l}(r, s) = z^l s^{-1} f(z, s) \quad (z = rs^{-1} \leq 1)$$

$$f(z, s) = -\frac{1}{2l+3} z s^{2l+3} + \frac{1}{2l+1} s^{2l+1} - \left(\frac{1}{2l+1} - \frac{1}{2l+3} z \right)$$

Так как $f(z, 1) = 0$ и $\partial f / \partial s > 0$ ($0 < s < 1$), функция $f(z, s) < 0$ при $0 < r \leq s < 1$. В силу симметрии функции Грина $G_{1l}(r, s)$ неравенство $G_{1, l+1}(r, s) < G_{1l}(r, s)$ имеет место и при $1 > r \geq s > 0$.

Докажем теперь, что

$$lG_{2l} > (l+2)G_{2, l+1} \quad (3.13)$$

Действительно, при $x \leq s$

$$(l+2)G_{2, l+1}(x, s) - lG_{2l}(x, s) = \frac{x^l s^{-l-2}}{4(2l+1)(2l+3)} P(x, s)$$

$$P(x, s) = -a_1(s)x^3 + a_2(s)x^2 + a_3(s)x - a_4(s)$$

$$(a_i(s) > 0 \text{ при } 0 < s < 1)$$

Функция $P(x, s) < 0$ ($0 < x \leq s < 1$). Из симметрии функции Грина $G_{2l}(x, s)$ получаем, что $(l+2)G_{2, l+1}(x, s) < lG_{2l}(x, s)$ и для $1 > x \geq s > 0$. Так как $G_l = G_{1l}G_{2l}$ из (3.12), (3.13) следует утверждение леммы.

В силу положительности оператора $l(l+1)G_l$ (лемма 3.2) из его монотонности вытекает монотонность его наименьшего характеристического значения $R_{1l} < R_{1, l+1}$. Тогда из неравенства (3.8) следует, что наименьшее характеристическое значение оператора $A(R)$ равно R_{11} . Соответствующая ему размерность собственного подпространства равна трем, причем присоединенные векторы отсутствуют. Это легко показать, например, симметризуя оператор A , но проще воспользоваться леммой 1.5 работы [9]. Покажем, что величина $(\zeta, \eta)_H$ отлична от нуля, где $\zeta = (u, \theta)$ — собственный вектор оператора $A(R_{11})$, а $\eta = (w, \tau)$ — собственный вектор оператора $A^*(R_{11})$ (см. (2.11))

$$(\zeta, \eta)_H = (u, w)_{H_1} + (\theta, \tau)_{H_2} = R_{11}^{-1} \|u\|_{H_1}^2 + \|\theta\|_{H_2}^2 > 0$$

4. Точка бифуркации и ветвление. Как показано в п. 3, оператор $A(R)$ имеет нечетнократное наименьшее характеристическое значение R_{11} (будем обозначать его R_*). Этот факт и лемма 2.1 позволяют применить к уравнению (2.2) теорему М. А. Красносельского о точках бифуркации в модификации И. А. Бахтина [16].

Теорема 4.1. Точка $R_* = R_{11}$ является точкой бифуркации для уравнения (2.2).

Итак, при числе Рэля, равном R_* , происходит ветвление решений уравнений (1.3). Исследуем ветвление в этой точке методом Ляпунова — Шмидта.

В собственном подпространстве Z_0 оператора $A(R_*)$ выберем следующий базис:

$$\zeta_k = (u(r) T_{0k}^1(1/2\pi - \varphi, \vartheta, 0), v(r) T_{1k}^1(1/2\pi - \varphi, \vartheta, 0), v(r) T_{-1k}^1(1/2\pi - \varphi, \vartheta, 0), \theta(r) T_{0k}^1(1/2\pi - \varphi, \vartheta, 0)) \quad (k = -1, 0, 1) \quad (4.1)$$

Пусть $R = R_* + \mu$. Решение уравнения

$$z' = B(R, z') \quad (4.2)$$

будем искать в виде

$$z' = z + \sum_{k=-1}^1 \alpha_k \zeta_k, \quad (z, \eta_k)_H = 0 \quad (k = -1, 0, 1) \quad (4.3)$$

Подставляя (4.3) в (4.2), получим

$$z - A(R_*)z = \mu \sum_{k=-1}^1 \alpha_k A_0 \zeta_k + A(\mu)z + D\left(z + \sum_{k=-1}^1 \alpha_k \zeta_k, z + \sum_{k=-1}^1 \alpha_k \zeta_k\right) \equiv Qz \quad (4.4)$$

$$A_0(z) = (K_1(Tr), 0), \quad z = (v, T) \in H \quad (4.5)$$

Введем проекционный оператор

$$P\varphi = \varphi - \sum_{k=-1}^1 \alpha_k \zeta_k, \quad \varphi \in H \quad (4.6)$$

и, используя условия разрешимости уравнения Фредгольма, запишем (4.4) в эквивалентной форме

$$z - A(R_*)z = PQz, \quad (Qz, \eta_k)_H = 0 \quad (k = -1, 0, 1) \quad (4.7)$$

Прежде чем перейти к отысканию малых решений уравнения (4.7), упростим задачу с помощью теоремы В. И. Юдовича о ветвлении решений нелинейных уравнений, инвариантных относительно преобразований какой-либо компактной группы G [5]. В рассматриваемой задаче естественно выбрать в качестве такой группы преобразований группу вращений трехмерного пространства.

Пусть L_g — представление группы вращений. Уравнение (4.4) инвариантно относительно преобразований L_g

$$L_g A(R)z = A(R)L_g z, \quad L_g Qz = QL_g z \quad (z \in H, g \in G) \quad (4.8)$$

Действительно, оператор Лапласа инвариантен относительно преобразований L_g [10]. Пусть $g \in G$ — произвольное вращение, переводящее прямоугольную систему координат x_i с началом в центре сферы в систему y_l ($i, l = 1, 2, 3$). Тогда очевидны равенства

$$u_i \frac{\partial u_k}{\partial x_i} = u_i \frac{\partial u_k}{\partial y_l} \frac{\partial y_l}{\partial x_i} = u_l \frac{\partial u_k}{\partial y_l}, \quad u_i \frac{\partial T}{\partial x_i} = u_i \frac{\partial T}{\partial y_l} \frac{\partial y_l}{\partial x_i} = u_l \frac{\partial T}{\partial y_l}$$

откуда следует

$$L_g(u\nabla)u = (u_g\nabla)u_g, \quad L_g u\nabla T = u_g\nabla T_g \quad (u_g = L_g u, T_g = L_g T)$$

Заметим, что собственное подпространство Z_0 оператора $A(R_*)$ инвариантно относительно L_g .

В работе [5] представление L_g называется полным в Z_0 , если по любой паре $\zeta', \zeta'' \in Z_0$ можно указать $g \in G$ так, что

$$L_g \zeta' = \alpha \zeta'' \quad (\alpha > 0) \quad (4.9)$$

Лемма 4.1. Представление группы вращений трехмерного пространства при $l = 1$ полно в собственном подпространстве Z_0 оператора A (R_*).

Доказательство. Пусть $\zeta' = \sum_{k=-1}^1 \alpha_k \zeta_k$. Функции от r не изменяются при произвольном вращении, поэтому для исследования $L_g \zeta'$ достаточно рассмотреть величину (см. (4.1))

$$L_g \sum_{k=-1}^1 \alpha_k T_{mk}^1 (1/2\pi - \varphi, \vartheta, 0)$$

Функции T_{mn}^l являются одновременно матричными элементами представления L_g [10]. Из свойств функций $T_{mn}^l (1/2\pi - \varphi, \vartheta, 0)$ следует

$$\begin{aligned} L_g \sum_{k=-1}^1 \alpha_k T_{mk}^1 (g_1) &= \sum_{k=-1}^1 \alpha_k T_{mk}^1 (g_1 g) = \sum_{k=-1}^1 \alpha_k \sum_{n=-1}^1 T_{mn}^1 (g_1) T_{nk}^1 (g) = \\ &= \sum_{n=-1}^1 \beta_n T_{mn}^1 (g_1), \quad \sum_{k=-1}^1 \alpha_k T_{nk}^1 (g) = \beta_n \quad (n = -1, 0, 1) \end{aligned} \quad (4.10)$$

При $l = 1$ матрица T_{mn}^l эквивалентна матрице вращения $g(\varphi_1, \varphi_2, \vartheta)$ [10], где $\varphi_1, \varphi_2, \vartheta$ — углы Эйлера, задающие вращение. Тогда из (4.9), (4.10) следует, что представление L_g будет полным при $l = 1$, если при любых заданных вещественных α_k, β_n ($k, n = -1, 0, 1$) найдутся такие $\varphi_1, \varphi_2, \vartheta$, что будут выполняться равенства

$$\sum_{k=-1}^1 \alpha_k g_{kn} = \alpha \beta_n \quad (n = -1, 0, 1; \alpha > 0)$$

Простые выкладки показывают, что если φ_2 определить из уравнения $\beta_{-1} \cos \varphi_2 - \beta_0 \sin \varphi_2 = 0$ (в случае $\beta_{-1} = \beta_0 = 0$ угол φ_2 произволен), то углы φ_1 и ϑ определяются из уравнений

$$\alpha_{-1} \cos \varphi_1 + \alpha_0 \sin \varphi_1 = 0 \quad (4.11)$$

$$\alpha_1 - \alpha [\beta_1 \cos \vartheta + (\beta_0 \cos \varphi_2 + \beta_{-1} \sin \varphi_2) \sin \vartheta] = 0$$

Здесь $\alpha > 0$ можно подобрать так, чтобы уравнение (4.11) было разрешимым. Лемма доказана.

При $l = 1$ существует подпространство $H^\circ \subset H$, содержащее ζ_0 , состоящее из осесимметричных векторов, ортогональных к ζ_{-1}, ζ_1 , инвариантное относительно операторов A и Q .

Тогда, как следует из результатов работы [5], малые решения, рождающиеся в точке бифуркации R_* , можно искать в инвариантном подпространстве H° . Все остальные малые решения, ответвляющиеся в этой точке, получаются из найденных при помощи преобразования L_g .

Малые решения уравнения (4.7) в H° можно искать в виде ряда по степеням параметров α, μ (нулевой индекс при α, ζ, η в дальнейшем опускается)

$$z = \sum_{p,q=0}^{\infty} z_{pq} \alpha^p \mu^q, \quad z_{00} = 0 \quad (z_{pq}, \eta_k)_{H^\circ} = 0 \quad (k = -1, 0, 1) \quad (4.12)$$

Для коэффициентов в (4.12) получаем уравнения

$$z_{10} = z_{01} = z_{02} = z_{12} = z_{03} = 0, z_{20} - A(R_*) z_{20} = PD(\zeta, \zeta) \quad (4.13)$$

и т. д. Подставляя (4.12) с уже известными коэффициентами в уравнение $(Qz, \eta)_H = 0$ (где положено $\alpha_{-1} = \alpha_1 = 0$), получаем уравнение разветвления

$$\mu\alpha (A_0\zeta, \eta)_H + \alpha^2 (D(\zeta, \zeta), \eta)_H + \alpha^3 (D^\circ(z_{20}, \zeta), \eta)_H + \dots = 0 \quad (4.14)$$

$$D^\circ(z_1, z_2) = D(z_1, z_2) + D(z_2, z_1)$$

Теорема 4.2. Рождение новых решений уравнения (4.2) происходит при переходе числа Рэля через значение R_* , причем каждому $R > R_*$, близкому к R_* , отвечает, с точностью до произвольного вращения, одно ненулевое осесимметричное решение

$$z' = \gamma^{1/2} \mu^{1/2} \zeta + \gamma \mu z_{20} + O(\mu^{3/2}), \quad \gamma = - \frac{(A_0\zeta, \eta)_H}{(D^\circ(z_{20}, \zeta), \eta)_H} \quad (4.15)$$

Доказательство. Коэффициент при α^2 в уравнении (4.15) обращается в нуль в силу известных тождеств

$$\begin{aligned} (D(\zeta, \zeta), \eta)_H &= -R_*^{-1} (K_1(u\nabla)u, u)_{H_1} - P(L_1(u\nabla)\theta, \theta)_{H_2} = \\ &= -R_*^{-1} \int_{\Omega} (u\nabla)uu \, dx - P \int_{\Omega} \theta u \nabla \theta \, dx = 0 \end{aligned}$$

Коэффициент при $\mu\alpha$ в уравнении разветвления имеет вид

$$(A_0\zeta, \eta)_H = \frac{1}{R_*^2} \|u\|_{H_1}^2 \quad (4.16)$$

Коэффициент при α^3 приводится к виду

$$I \equiv (D^\circ(z_{20}, \zeta), \eta)_H = -R_*^{-1} \|v_{20}\|_{H_1}^2 - \|T_{20}\|_{H_2}^2 + 2 \int_{\Omega} r v_{20, r} T_{20} \, dx \quad (4.17)$$

Нетрудно показать, что эта величина отрицательна. Для этого достаточно заметить, что оператор M , определенный равенством $Mu = K_1(rL_1(ru_r))$, самосопряженный и положительный в H_1 [8]. Тогда отрицательность I в (4.17) следует из вариационного принципа для оператора M . Таким образом, $\gamma > 0$ и, как показывает диаграмма Ньютона [17], решение уравнения (4.2) можно искать в виде ряда по степеням $\varepsilon = \mu^{1/2}$.

$$z' = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k z_k$$

Здесь z_k удовлетворяют уравнениям

$$z_k - A(R_*) z_k = A_0 z_{k-2} + \sum_{m+n=k} D^\circ(z_m, z_n) \equiv \Psi_k \quad (4.18)$$

Будем искать z_k в виде

$$z_k = \delta_k \zeta + \delta_1^k \varphi_k, \quad (\varphi_k, \eta)_H = 0$$

При $k = 1$ имеем

$$z_1 = \delta_1 \zeta, \quad \varphi_1 = 0$$

Из условий разрешимости уравнений (4.18) $(\psi_k, \eta)_H = 0$ при $k = 2, 3, \dots$ имеем

$$\delta_1^2 = - \frac{(A_0 \zeta, \eta)_H}{(D^\circ(\varphi_2, \zeta), \eta)_H}, \quad \delta_2 = 0$$

Легко видеть, что $\delta_1^2 = \gamma$, $\varphi_2 = z_{20}$. Теорема доказана.

5. Расчет конвекции. Применим к интегральному уравнению (3.6) при $l = 1$ итерационный метод, предложенный в [12] для неотрицательных матриц. Этот метод, который нетрудно перенести на уравнения с сильно положительными операторами, заключается в получении последовательных двусторонних оценок (3.9)

$$\min_{0 \leq r \leq 1} \frac{\theta^{(n)}(r)}{\theta^{(n-1)}(r)} \leq \lambda_1 \leq \max_{0 \leq r \leq 1} \frac{\theta^{(n)}(r)}{\theta^{(n-1)}(r)} = \|\theta^{(n-1)}\|_{\theta^{(n)}}, \quad \theta^{(n)} = G_1 \theta^{(n-1)} \quad (5.1)$$

которые сходятся к первому характеристическому значению λ_1 оператора G_1 , а последовательность функций $\theta^{(n)}$ сходится к собственной функции θ_1 . В качестве начального приближения из конуса K_{u_0} возьмем $u_0|_{l=1} = r(1-r)$, а условие нормировки — в виде

$$\int_0^1 \theta_1(r) r^2 dr = 1$$

Вычисления проводили на ЭЦВМ М-20, и на пятой итерации была получена оценка

$$8042.1 \leq R_* \leq 8042.3 \quad (5.2)$$

В [1] методом Ритца при трех опорных функциях получено $R_* = 8041.7$. Зная R_* и θ_1 , находим $u_1(r)$ и $v_1(r)$ из уравнений (3.1) с применением оператора G_{21}

$$ru_1 = R_* 2G_{21}\theta_1, \quad v_1 = -R_* \int_0^1 \left[\frac{\partial G_{21}(r,s)}{\partial r} + \frac{2}{r} G_{21}(r,s) \right] \theta_1(s) s^2 ds \quad (5.3)$$

Подставляя в выражения для $\theta(r, \vartheta)$, $u(r, \vartheta)$ соответствующие обобщенные сферические функции, находим явный вид собственного вектора $\zeta = (u, \theta)$, отвечающего R_*

$$u_r = u_1(r) \cos \vartheta, \quad u_\varphi = 0, \quad u_\vartheta = v_1(r) \sin \vartheta, \quad \theta = \theta_1(r) \cos \vartheta \quad (5.4)$$

Вектор $z_{20} = (v, T)$ служит решением последнего уравнения (4.13) или следующей краевой задачи:

$$\begin{aligned} \Delta v &= \nabla p + (u \nabla) u - R_* r T, \quad \nabla v = 0 \\ \Delta T &= P u \nabla \theta - r v_r, \quad v|_S = T|_S = 0, \quad (v, u)_{H_1} = 0, \quad (T, \theta)_{H_2} = 0 \end{aligned} \quad (5.5)$$

которая разрешима в силу тождеств

$$\int_{\Omega} (u \nabla) u u dx = 0, \quad \int_{\Omega} \theta u \nabla \theta dx = 0$$

Решение задачи (5.5) имеет вид (5.6)

$$v_r = 1/2 (3 \cos^3 \vartheta - 1) w_{20}(r), \quad v_\vartheta = 3 \sin \vartheta \cos \vartheta w_{21}(r)$$

$$p = p_0(r) + 1/2 (3 \cos^2 \vartheta - 1) p_2(r), \quad T = P\tau_0(r) + 1/2 (3 \cos^2 \vartheta - 1) \tau_2(r)$$

Для p_0 и τ_0 имеем

$$p_0(r) = \int_0^r [R_* s \tau_0(s) - \Phi_1(s)] ds + \text{const}, \quad \tau_0(r) = \int_1^r \rho^{-2} \int_0^\rho \Phi_4(s) s^2 ds d\rho \quad (5.7)$$

Здесь и ниже

$$\Phi_1(r) = 1/3 \left(u_1 \frac{du_1}{dr} - \frac{2}{r} u_1 v_1 - \frac{2}{r} v_1^2 \right)$$

$$\Phi_2(r) = \frac{2}{3} \left(u_1 \frac{du_1}{dr} + \frac{1}{r} u_1 v_1 + \frac{1}{r} v_1^2 \right), \quad \Phi_3(r) = \frac{1}{3} \left(u_1 \frac{dv_1}{dr} + \frac{1}{r} u_1 v_1 + \frac{1}{r} v_1^2 \right)$$

$$\Phi_4(r) = \frac{1}{3} \left(u_1 \frac{d\theta_1}{dr} - \frac{2}{r} v_1 \theta_1 \right), \quad \Phi_5(r) = \frac{2}{3} \left(u_1 \frac{d\theta_1}{dr} + \frac{1}{r} v_1 \theta_1 \right)$$

Функции $w_{20}(r)$ и $\tau_2(r)$ определяются при решении краевой задачи

$$D_2^2 \omega_{20} = 6R_* \tau_2 + \Phi_2 + \frac{d}{dr} (\Phi_3), \quad \omega_{20}'(0) < \infty, \quad (r\omega_{20} = \omega_{20}) \quad (5.8)$$

$$-D_2 \tau_2 = \omega_{20} - \Phi_5, \quad \omega_{20}(0) = \omega_{20}(1) = \omega_{20}'(1) = \tau_2(1) = 0, \quad \tau_2(0) < \infty$$

Задача (5.8) сводится к интегральному уравнению с оператором G_2 из (3.6)

$$\tau_2 = 6R_* G_2 \tau_2 + \Phi, \quad \Phi = G_2 \left(\Phi_2 + \frac{d}{dr} r \Phi_3 \right) - G_{12} \Phi_5 \quad (5.9)$$

Это уравнение решалось методом последовательных приближений, который сходится, поскольку наименьшее характеристическое значение R_{12} оператора $6G_2$, как следует из п. 3, больше R_* . Это характеристическое значение было найдено итерационным методом и оказалось, что $R_* / R_{12} \approx 0.8$. Если взять в качестве нулевого приближения $\Phi(r)$, удовлетворительная точность достигается на 20–22 итерации.

Зная $\tau_2(r)$, находим $w_{20}(r)$ и $w_{21}(r)$

$$r w_{20} = 6R_* G_{22} \tau_2 + G_{22} \Psi \quad \left(\Psi = \Phi_2 + \frac{d}{dr} r \Phi_3 \right)$$

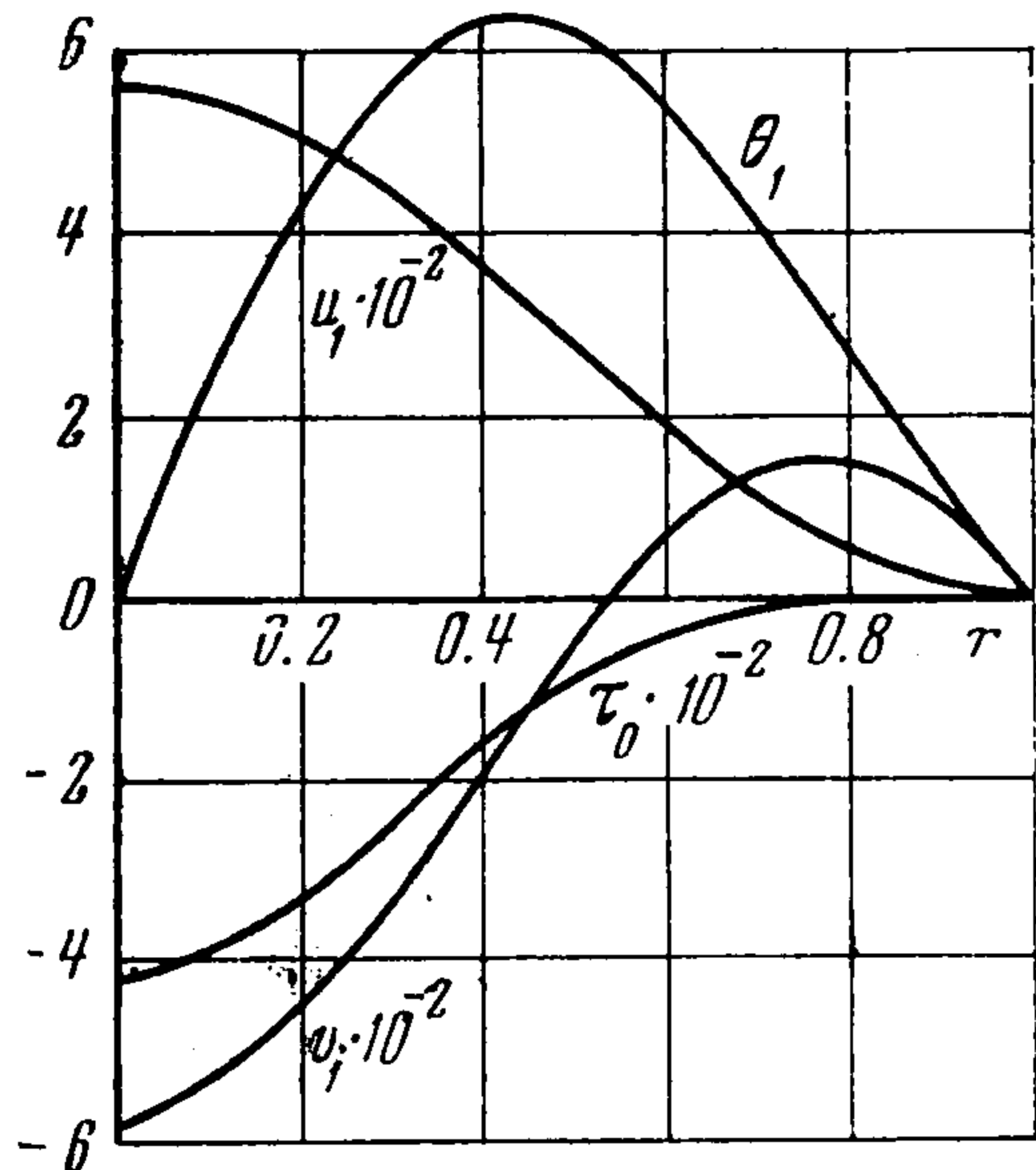
$$w_{21}(r) = -\frac{1}{6} \int_0^1 \left[\frac{\partial G_{22}(r, s)}{\partial r} + \frac{2}{r} G_{22}(r, s) \right] (6R_* \tau_2(s) + \Psi(s)) s^2 ds \quad (5.10)$$

Постоянная γ определяется из выражения (4.5) — (4.7)

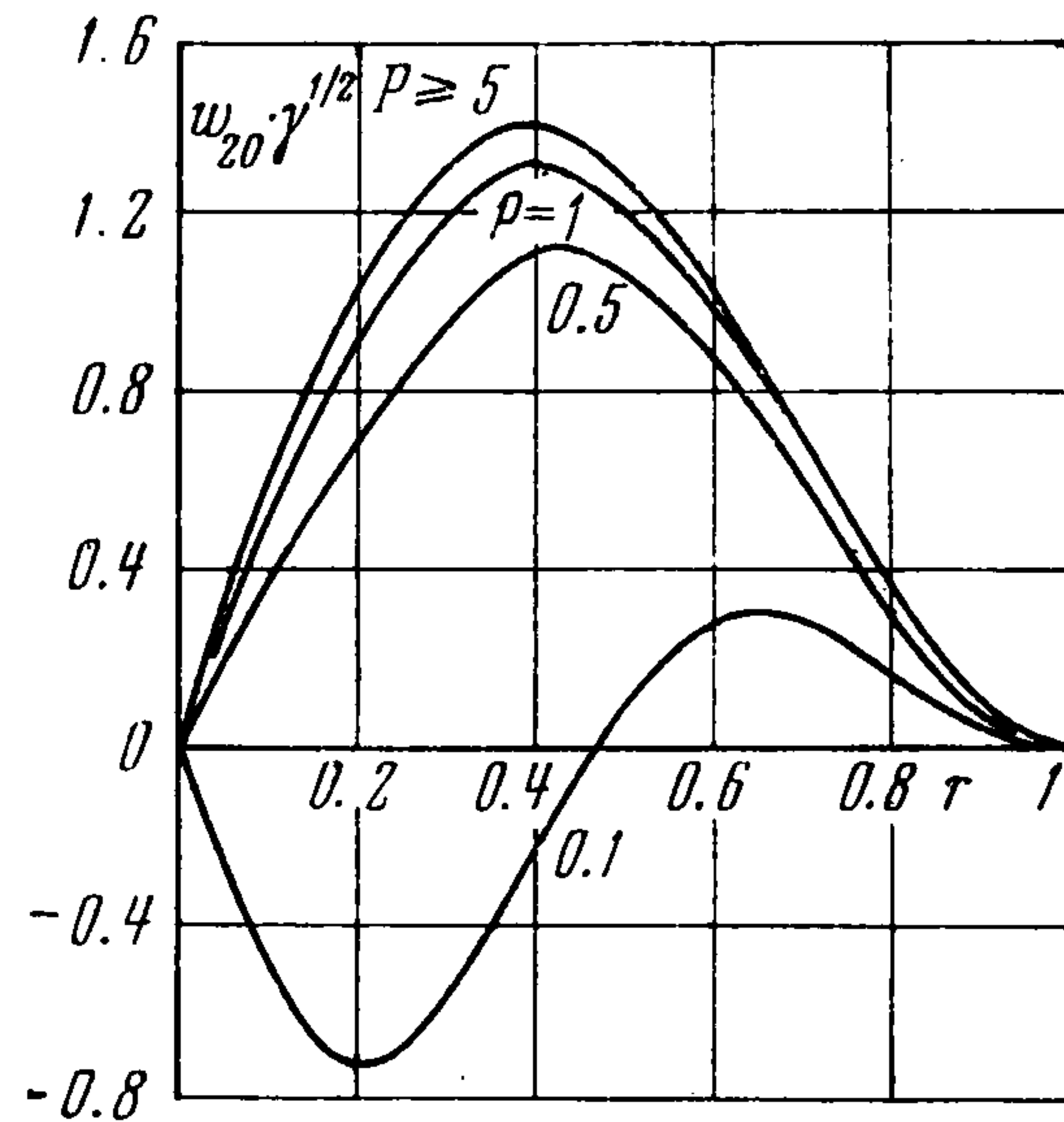
$$\gamma = - \|u\|_{H_1}^2 / R_*^2 \quad (5.11)$$

Вычисления проводили на ЭЦВМ М-20. Зависимость $\gamma(P)$ достаточно хорошо описывается формулой $\gamma = 10^{-7} P^{-2}$ (соответствующий пересчет показывает совпадение с приближенными результатами работы [4]). Остальные результаты представлены на фиг. 1–4. На фиг. 5 показана картина возникающего конвекционного течения непосредственно после

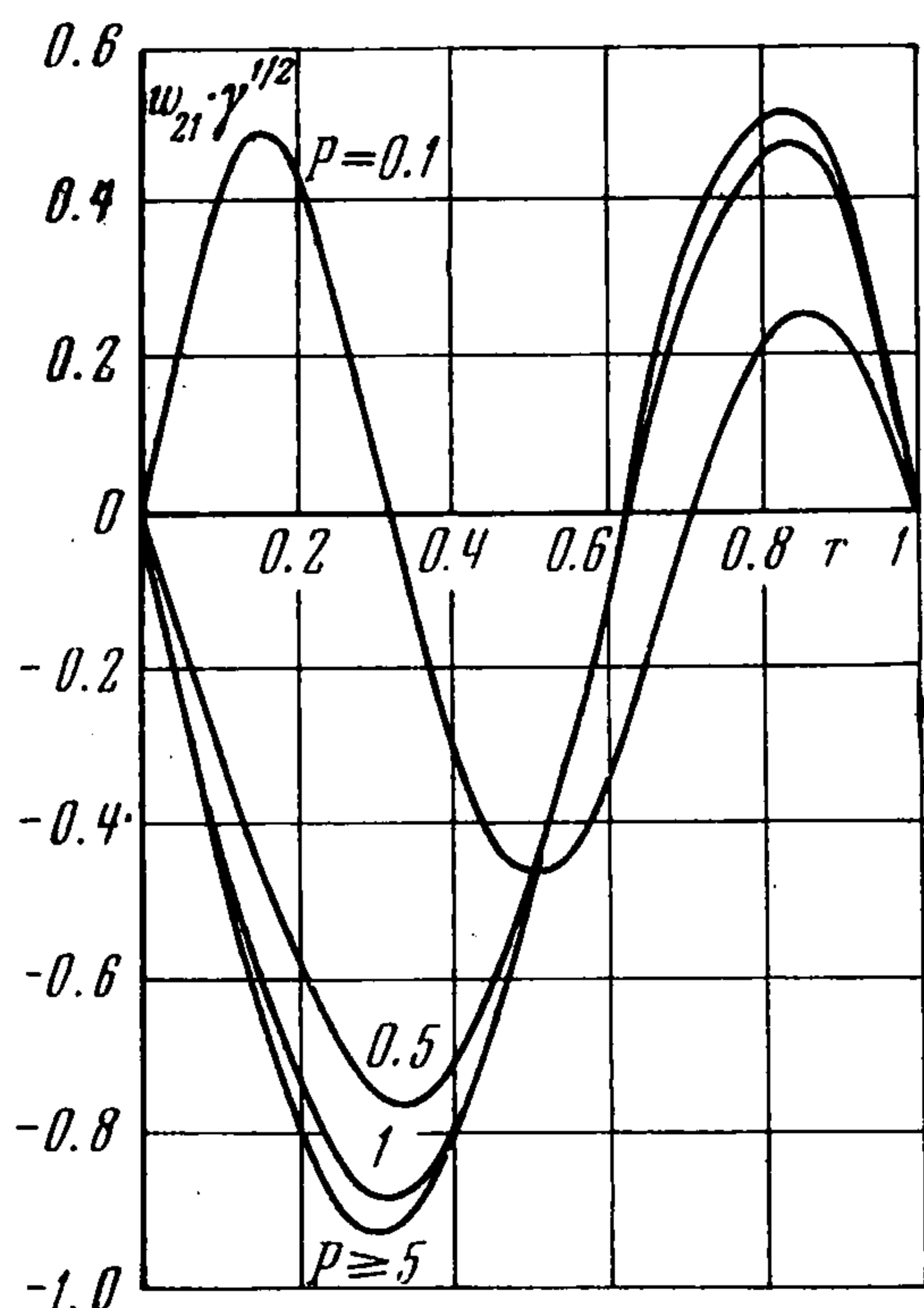
потери устойчивости при $R = 8042.5$, $P = 1$. С ростом числа Рэлея эта картина изменяется незначительно, но возрастает интенсивность движения. Так, при $R = 8942$, $P = 1$ число Рейнольдса, вычисленное по максимальной скорости течения, близко к пяти.



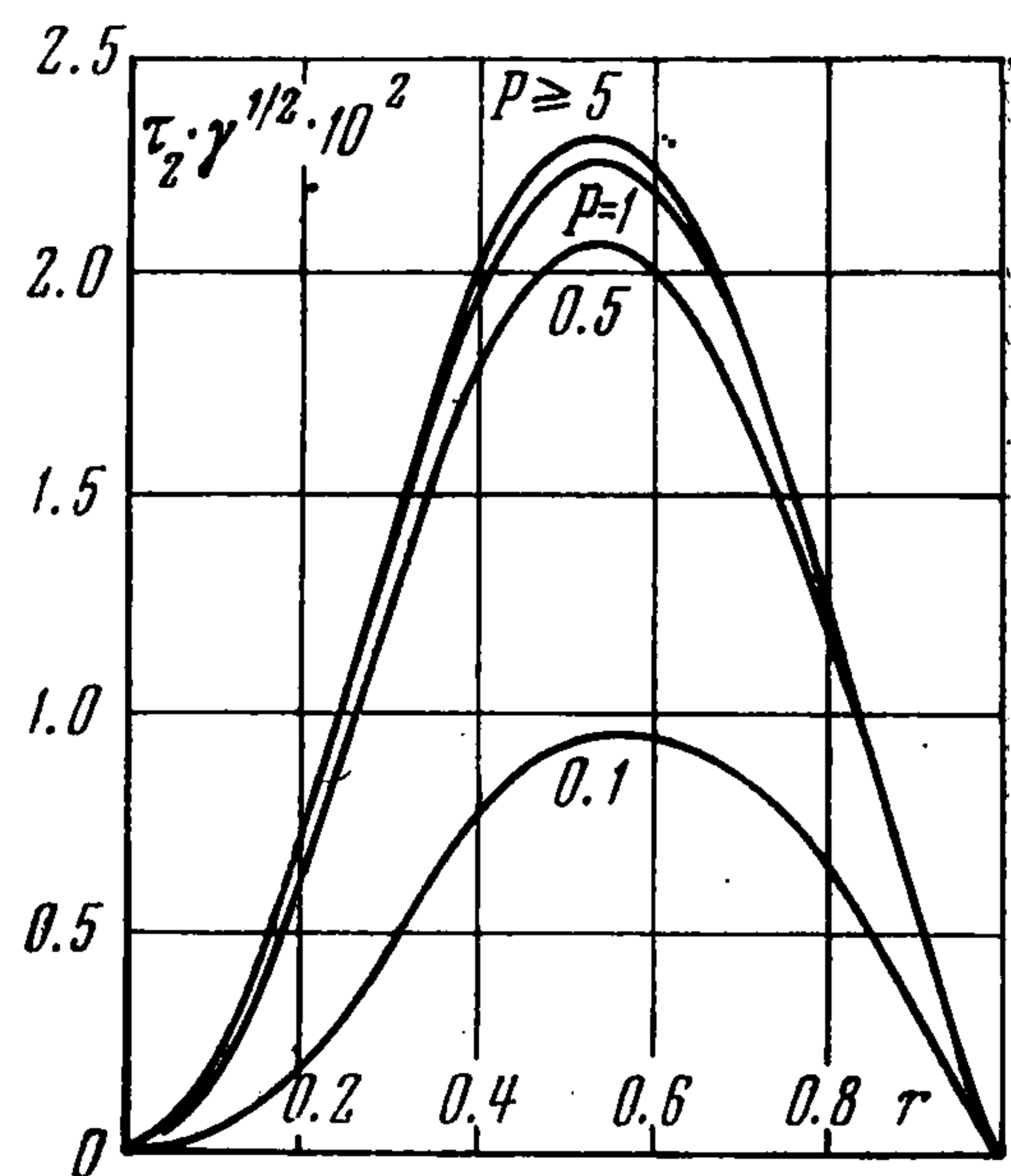
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

6. Устойчивость конвективного движения. В работах [6,18] методами теории возмущений исследована устойчивость некоторых вторичных стационарных течений. Применим этот метод для доказательства устойчивости конвективного движения жидкости в сфере при малых ε

$$v_0 = \gamma^{1/2} \varepsilon u + \gamma \varepsilon^2 v + O(\varepsilon^3), \quad T_0 = T_{00} + \gamma^{1/2} \varepsilon \theta + \gamma \varepsilon^2 T + O(\varepsilon^3) \quad (6.1)$$

Исследование устойчивости сводится к спектральной задаче относительно параметра σ

$$\begin{aligned} -\sigma v' + \Delta v' &= \nabla p' + (v_0 \nabla) v' + (v' \nabla) v_0 - (R_* + \varepsilon^2) r T', & \nabla v' &= 0 \\ -\sigma P T' + \Delta T' &= P v_0 \nabla T' + P v' \nabla T_0, & v' |_s &= T' |_s = 0 \end{aligned} \quad (6.2)$$

эквивалентной операторному уравнению в пространстве H

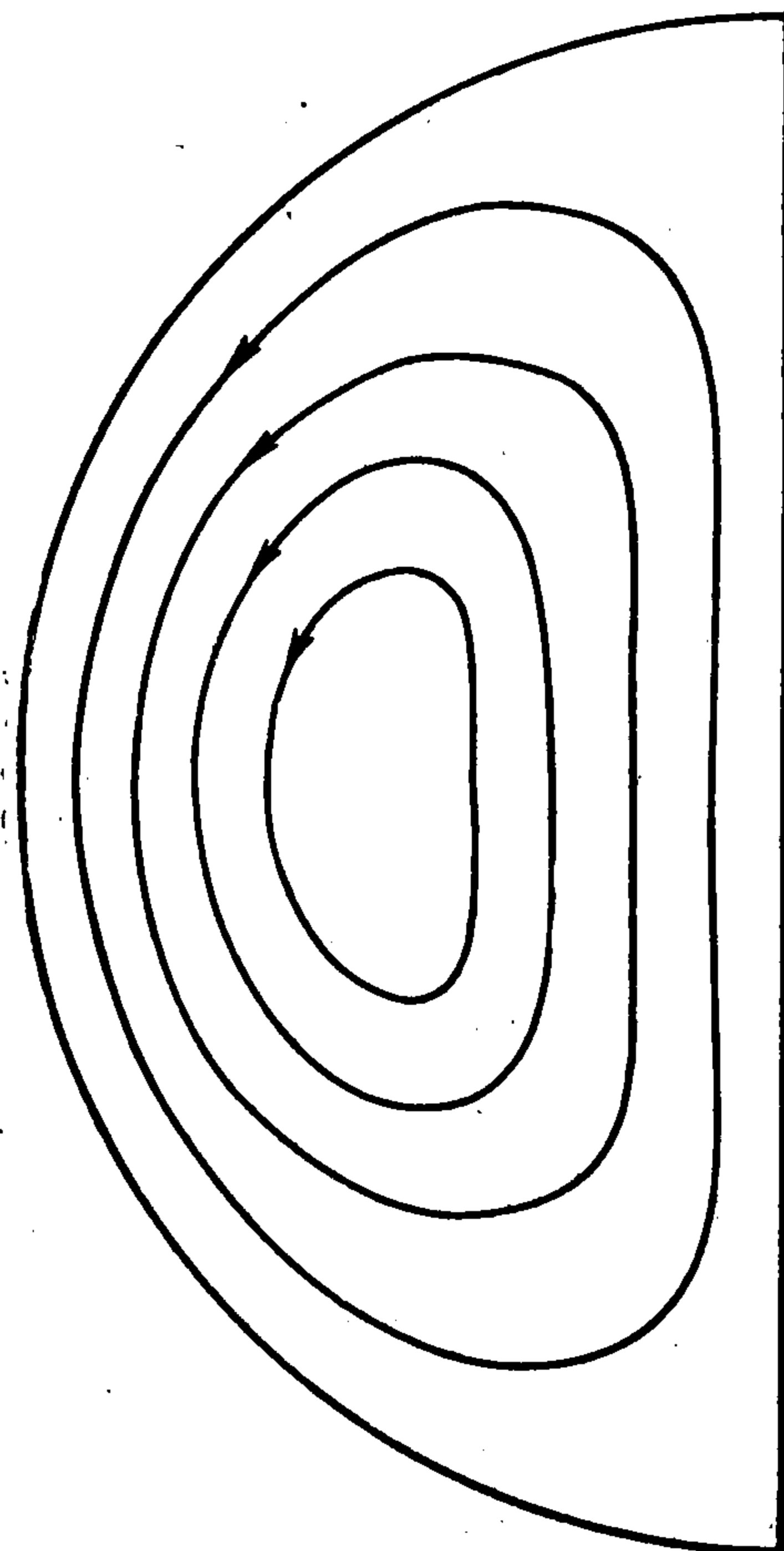
$$z' - A(R_*)z' = D^\circ(z_0, z') + \varepsilon^2 A_0 z' - \sigma C z' \quad (6.3)$$

Здесь $z' = (v', T')$, $z_0 = (v_0, T_0)$, $C = (K_1, PL_1)$. Базис в собственном подпространстве Z_0 оператора $A(R_*)$ можно выбрать следующим:

$$\zeta: u_r = u_1(r) \cos \vartheta, \quad u_\vartheta = v_1(r) \sin \vartheta, \quad u_\varphi = 0 \\ \theta = \theta_1(r) \cos \vartheta$$

$$\zeta_1: u_r^{(1)} = u_1(r) \cos \vartheta \cos \varphi \\ u_\vartheta^{(1)} = v_1(r) \sin \vartheta \cos \varphi \\ u_\varphi^{(1)} = v_1(r) \cos \vartheta \sin \varphi \\ \theta^{(1)} = \theta_1(r) \cos \vartheta \cos \varphi \quad (6.4)$$

$$\zeta_{-1}: u_r^{(-1)} = u_1(r) \cos \vartheta \sin \varphi \\ u_\vartheta^{(-1)} = v_1(r) \sin \vartheta \sin \varphi \\ u_\varphi^{(-1)} = v_1(r) \cos \vartheta \cos \varphi \\ \theta^{(-1)} = \theta_1(r) \cos \vartheta \sin \varphi$$



Фиг. 5

Решение уравнения (6.3) будем искать в виде

$$z' = \sum_{k=-1}^1 \delta_k \zeta_k + x, \quad (x, \eta_k)_H = 0 \\ (k = -1, 0, 1) \quad (6.5)$$

Подставляя (6.5) в (6.3), получаем

$$x - A(R_*)x = \sum_{k=-1}^1 \delta_k D^\circ(z_0, \zeta_k) + D^\circ(z_0, x) + \\ + \varepsilon^2 \sum_{k=-1}^1 \delta_k A_0 \zeta_k + \varepsilon^2 A_0 x - \sigma \sum_{k=-1}^1 \delta_k C \zeta_k - \sigma C x \equiv Q_1 x \quad (6.6)$$

или в эквивалентной форме

$$x - A(R_*)x = \Pi Q_1 x \quad (6.7)$$

где Π — оператор проектирования (4.6).

Следует отметить, что собственные значения σ уравнения (6.6) с положительной действительной частью ограничены равномерно по ε ; $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ [6, 18, 19]. Поэтому, согласно теории возмущений спектра, при малых ε в правой полуплоскости могло бы оказаться лишь то собственное число σ_ε уравнения (6.6), которое возникает из $\sigma_0 = 0$.

Решение x уравнения (6.7) можно искать в виде ряда по степеням ε , σ

$$x = \sum_{p, q=0}^{\infty} \varepsilon^p \sigma^q x_{pq}, \quad x_{00} = 0 \quad (6.8)$$

Векторы x_{pq} определяются из уравнений

$$x_{10} - A(R_*)x_{10} = \Pi \sum_{k=-1}^1 \delta_k \gamma^{1/2} D^\circ(\zeta, \zeta_k) \quad (6.9)$$

$$x_{01} - A(R_*)x_{01} = -\Pi \sum_{k=-1}^1 \delta_k C \zeta_k$$

и т. д. Подставляя ряд (6.8) в правую часть уравнения (6.6), запишем условия разрешимости этого уравнения

$$\left(Q_1 \sum_{p,q=0}^{\infty} \varepsilon^p \sigma^q x_{pq}, \eta_k \right)_H = 0 \quad (k = -1, 0, 1) \quad (6.10)$$

Это дает три алгебраических уравнения для ε , σ и δ_k . Естественно выбрать следующее условие нормировки:

$$\sum_{k=-1}^1 \delta_k^2 = 1$$

Число уравнений в (6.10) можно уменьшить до двух, применяя некоторую модификацию теоремы 1 [5].

Пусть G' — группа вращений окружности ($g \in G'$ является поворотом на угол g). Для $g \in G'$ и $u \in H_1$, $T \in H_2$ положим

$$L_g' u(r, \vartheta, \varphi) = u(r, \vartheta, \varphi + g), \quad L_g' T(r, \vartheta, \varphi) = T(r, \vartheta, \varphi + g)$$

Нетрудно проверить, что уравнение (6.3) и собственное подпространство Z_0 оператора $A(R_*)$ инвариантны относительно операторов L_g' .

Представление L_g' обладает в Z_0 следующим свойством: для любых $\zeta' \in Z_0$ и $\zeta'' \in Z_0'$, где $Z_0' \subset Z_0$ натянуто на ζ и ζ_1 , можно при помощи (6.4) указать g так, что $L_g' \zeta' = \zeta'' = \beta \zeta + \beta_1 \zeta_1$.

Существует подпространство $H' \subset H$, инвариантное относительно операторов A , D и C , содержащее Z_0' и состоящее из векторов $z = (v, T)$, ортогональных к ζ_{-1} и удовлетворяющих следующим условиям четности:

$$v_r(r, \vartheta, \varphi) = v_r(r, \vartheta, -\varphi), \quad v_\vartheta(r, \vartheta, \varphi) = v_\vartheta(r, \vartheta, -\varphi) \\ v_\varphi(r, \vartheta, \varphi) = -v_\varphi(r, \vartheta, -\varphi), \quad T(r, \vartheta, \varphi) = T(r, \vartheta, -\varphi)$$

Это утверждение проверяется непосредственно на системе уравнений (6.2), эквивалентной уравнению (6.3).

Так же, как в [5], легко показать, что малые решения уравнения (6.7) можно искать в подпространстве H' . Если такие решения существуют, то все остальные малые решения в H получаются из них при помощи преобразования L_g' .

Рассмотрим уравнения (6.10) при $k = 0$ и $k = 1$. Предварительно заметим, что из (6.4), (4.15) вытекают равенства

$$(D^\circ(\zeta, \zeta_k), \eta_k)_H = 0 \quad (k = 0, 1) \\ \gamma(D^\circ(z_{20}, \zeta_k), \eta_k)_H + (A_0 \zeta_k, \eta_k)_H = 0 \quad (k = 0, 1)$$

Из уравнений (6.9) следует, что

$$x_{pq} = \sum_{k=-1}^1 \delta_k x_{pq}^{(k)}$$

где x_{pq}^k уже от δ_k не зависят. Тогда система уравнений (6.10) при $k = 0, 1$ принимает вид

$$\delta_k \{ -\sigma (C\zeta_k, \eta_k)_H + \varepsilon^2 \gamma^{1/2} (D^\circ(\zeta, x_{10}^{(k)}), \eta_k)_H + \\ + \varepsilon \sigma [\gamma^{1/2} (D^\circ(\zeta, x_{01}^{(k)}), \eta_k)_H - (Cx_{10}^{(k)}, \eta_k)_H] + \dots \} = 0 \quad (6.11)$$

или

$$\delta_k F_k(\varepsilon, \sigma) = 0, \quad \delta^2 + \delta_1^2 = 1 \quad (k = 0, 1) \quad (6.12)$$

Лемма 6.1. Функции $F(\varepsilon, \sigma)$ и $F_1(\varepsilon, \sigma)$ линейно независимы.

Доказательство. Сравнивая первое уравнение (6.9) и второе уравнение (4.13), получаем

$$x_{10} = 2\gamma^{1/2} z_{20}, \quad z_{20} = (v_r, v_\varphi, 0; T) \quad (6.13)$$

$$x_{10}^{(1)} = 2\gamma^{1/2} z_{20}^{(1)}, \quad z_{20}^{(1)} = (v_r \cos \vartheta, v_\varphi \sin \vartheta, v_\varphi^{(1)}; T \cos \vartheta) \quad (6.14)$$

Тогда при $k = 0$ имеем (см. (4.15))

$$\gamma^{1/2} (D^\circ(\zeta, x_{10}), \eta)_H = -2 (A_0 \zeta, \eta)_H \quad (6.15)$$

$$(C\zeta, \eta)_H = \frac{2\pi}{R_*} \int_0^1 \int_0^1 (u_r^2 + u_\varphi^2 + PR_* \theta^2) \sin \vartheta d\vartheta r^2 dr \quad (6.16)$$

Учитывая (6.4) и (6.14), получаем при $k = 1$

$$\gamma^{1/2} (D^\circ(\zeta, x_{10}^{(1)}), \eta_1)_H = - (A_0 \zeta, \eta)_H \quad (6.17)$$

$$(C\zeta_1, \eta_1)_H = \frac{\pi}{R_*} \int_0^1 \int_0^1 (u_r^2 + u_\varphi^2 + u_\varphi^2 \operatorname{ctg}^2 \vartheta + PR_* \theta^2) \sin \vartheta d\vartheta r^2 dr \quad (6.18)$$

Итак, сравнивая в уравнениях (6.11) для $k = 0$ и $k = 1$ коэффициенты при σ и ε^2 , получаем из (6.15) — (6.18)

$$\frac{(D^\circ(\zeta, x_{10}), \eta)_H}{(D^\circ(\zeta, x_{10}^{(1)}), \eta_1)_H} = 2, \quad \frac{(C\zeta, \eta)_H}{(C\zeta_1, \eta_1)_H} < 2$$

Лемма доказана.

Из леммы 6.1 следует, что система (6.12) распадается на два независимых уравнения

$$\delta_1 = 0, \delta = 1, F(\varepsilon, \sigma) = 0; \quad \delta = 0, \delta_1 = 1, F_1(\varepsilon, \sigma) = 0 \quad (6.19)$$

Здесь $F_k(\varepsilon, \sigma)$ — аналитические функции ε, σ . Как вытекает из равенств (6.16), (6.18)

$$\partial F_k / \partial \sigma|_{\varepsilon=\sigma=0} = - (C\zeta_k, \eta_k)_H \neq 0 \quad (k = 0, 1)$$

Тогда по теореме о неявной функции каждое из уравнений (6.19) имеет единственное решение σ , аналитическое по ε

$$\sigma_1 = -\varepsilon^2 \frac{2(A_0 \zeta, \eta)_H}{(C\zeta, \eta)_H} + o(\varepsilon^2), \quad \sigma_2 = -\varepsilon^2 \frac{(A_0 \zeta, \eta)_H}{(C\zeta_1, \eta_1)_H} + o(\varepsilon^2) \quad (6.20)$$

Из (4.16), (6.16) и (6.18) следует, что при малых ε

$$\sigma_1 < 0, \quad \sigma_2 < 0$$

Таким образом, конвективное течение (6.1) асимптотически устойчиво по первому приближению, а в силу результатов работы [19] имеет место и нелинейная устойчивость. Заметим, что состояние равновесия $T_{00} = C - 1/2 r^2$ теряет устойчивость при переходе R через значение R_{*0} . Для доказательства достаточно в (6.11) положить $\gamma = 0$, откуда следует

$$\sigma = \varepsilon^2 \frac{(A_0 \zeta_k, \eta_k)_H}{(C \zeta_k, \eta_k)_H} + o(\varepsilon^2) > 0 \quad (k = 0, 1)$$

Авторы благодарны В. И. Юдовичу за полезное обсуждение работы.

Поступила 9 VII 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Chandrasekhar S. Hydrodynamic and hydromagnetic stability. Clarendon Press, Oxford, 1961.
2. Roberts P. H. Convection in a self-gravitating fluid sphere. J. Math., 1965, vol. 12, p. 128—137.
3. Sherman M. Toroidal and poloidal field representation for convective flow within a sphere. Phys. Fluids, 1968, vol. 11, No 9.
4. Baldwin P. Finite amplitude convection in a self-gravitating fluid sphere containing heat sources. Proc. Camb. Phil. Soc., 1967, vol. 63, No 3, p. 855—870.
5. Юдович В. И. Свободная конвекция и ветвление. ПММ, 1967, т. 31, вып. 1.
6. Юдович В. И. Устойчивость конвекционных потоков, ПММ, 1967, т. 31, вып. 2.
7. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. Изд. 2-е. Гостехтеориздат, 1954.
8. Уховский М. Р., Юдович В. И. Об уравнениях стационарной конвекции, ПММ, 1963, т. 27, вып. 2.
9. Юдович В. И. Пример рождения вторичного стационарного или периодического течения при потере устойчивости ламинарного течения вязкой несжимаемой жидкости. ПММ, 1965, т. 29, вып. 3.
10. Гельфанд И. М. Минлос Р. А., Шапиро З. Я. Представления группы вращений и группы Лоренца и их применения, М., Физматгиз, 1958.
11. Бабский В. Г., Скловская И. Л. Гидродинамика в слабых силовых полях. Возникновение стационарной термокапиллярной конвекции в шаровом слое жидкости в условиях невесомости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 3.
12. Гантмахер Ф. Р., Крейн М. Г. Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем. М., Гостехтеориздат, 1950.
13. Овчинникова С. Н. Устойчивость течения Куэтта в случае широкого зазора между вращающимися цилиндрами, ПММ, 1970, т. 34, вып. 2.
14. Гантмахер Ф. Р. О несимметричных ядрах Келлога, Докл. АН СССР, 1936, т. 1 (X), № 1,
15. Красносельский М. А. Положительные решения операторных уравнений. М., Физматгиз, 1962.
16. Бахтин И. А. О топологических методах исследования решений одного класса нелинейных уравнений. Успехи матем. наук, 1965, т. 20, вып. 3.
17. Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М., «Наука», 1969.
18. Юдович В. И. Пример потери устойчивости и рождения вторичного течения жидкости в замкнутом сосуде. Матем. сб., 1967, т. 74 (116), № 4.
19. Юдович В. И. Об устойчивости стационарных течений вязкой несжимаемой жидкости. Докл. АН СССР, 1965, т. 161, № 5.