формул (5) дает

$$\alpha_4 = \frac{1}{4!}\{\varphi_1^{(4)}(0) - \varphi_2^{(4)}(0)\} = \frac{\mu}{5}\,\frac{(1+4\mu^2)}{(1-4\mu^2)^2} > 0$$

Отсюда следует, что при смене устойчивости особой точки системы (8) не может появиться более одного предельного цикла. При возрастании параметра μ от бифуркационного значения, определяемого условием $\lambda = 3\mu$, из сложного сшитого фокуса появляется один неустойчивый предельный цикл.

Сравнение результатов исследования бифуркаций в окрестности особой точки при использовании аппроксимаций (система (8)) и исходной системы (7) (см. [3]), показывает, что при этом характер возможных бифуркаций в окрестности особой точки типа фокус не изменяется. Для других бифуркаций в уравнении (7), связанных с появлением или исчезновением предельных циклов (из сгущения траекторий, из петли сепаратрисы) использование аппроксимаций открывает возможность получить аналитические условия, выраженные через параметры системы, которые для исходной аналитической системы получить невозможно.

Автор благодарит Н. Н. Баутина за ряд ценных замечаний.

Поступила 26 XI 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Андронов А. А. Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости. М., «Наука», 1967.
2. Fuchs R., Hopf L., Seewald. Fr., Aerodynamik, Berlin, Springer, 1934.
3. Баутин Н. Н. Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости. М.— Л., Гостехиздат, 1949.

К ТЕОРИИ ДВУСТОРОННИХ ТРАНСПОРТНЫХ ПОТОКОВ

Г. П. Солдатов

(Саратов)

Изучаются распространение ударной волны, процесс затухания волны и движение типа простой волны в двустороннем однородном симметричном транспортном потоке на основе гидродинамической модели, предложенной Д. Биком и Г. Ньювеллем [1]. Получено выражение, связывающее параметры потока за фронтом ударной волны. В окрестности головной части волны при помощи разложения параметров в ряд по степеням некоторой малой величины исследуется затухание волны. Вычислены члены разложения, характеризующие затухание скорости изменения профиля волны и его кривизны у фронта волны.

1. К постановке задачи. В гидродинамической теории двустороннего однородного симметричного транспортного потока используются два уравнения неразрывности

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial (pu)}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial (qv)}{\partial x} = 0 \tag{1.1}$$

для установления вида зависимостей от независимых переменных средних скоростей u, v и плотностей p, q двух однородных транспортных потоков, движущихся в противоположных направлениях. Система уравнений (1.1) замыкается двумя эмпирическими соотношениями

$$u = v_0 - \alpha p - \beta q, \qquad v = u_0 + \beta p + \alpha q \tag{1.2}$$

представляющими средние скорости в виде функций от плотностей обоих потоков.

Область физически приемлемых решений системы (1.1), (1.2) будет ограниченной; ее можно представить в виде объединения областей гиперболичности и эллиптичности системы уравнений [1,2]. Законы движения и роста начального малого возмущения параметров потока и значение промежутка времени, необходимого для превращения слабого разрыва в ударную волну, получены в работе [3].

Если начальное невозмущенное состояние обозначить нуликом, то на возникшей ударной волне выполняются условия [1]

$$p_0 [u (p_0, q_0) - w] = p [u (p, q) - w] \qquad (1.3)$$
$$q_0 [v (p_0, q_0) - w] = q [v (p, q) - w]$$

Здесь w означает скорость ударной волны. Исключив w из условий (1.3), получим уравнение ударной поляры

$$\frac{pu (p, q) - p_0u (p_0, q_0)}{p - p_0} = \frac{qv (p, q) - q_0v (p_0, q_0)}{q - q_0} \qquad (1.4)$$

2. Движение ударной волны. В уравнения (1.1), (1.2) введем безразмерные величины по формулам [1]

$$p' = \frac{\alpha p}{u_0}, \qquad q' = \frac{\alpha q}{u_0}, \qquad u' = \frac{u}{u_0}, \qquad v' = \frac{v}{u_0}$$
$$w' = \frac{w}{u_0}, \qquad \beta' = \frac{\beta}{\alpha}, \qquad t' = u_0 t$$

и получим следующую систему уравнений, которую удобно записать в матричной форме [3], а штрихи опустить

$$\mathrm{U}_t + \mathrm{AU}_x = 0, \qquad \mathrm{U} = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}, \qquad \mathrm{A} = \begin{bmatrix} (pu)_p & pu_q \\ qv_p & (qv)_q \end{bmatrix} \qquad (2.1)$$

$$u = 1 - p - \beta q, \qquad v = -1 + \beta p + q \qquad (2.2)$$

Уравнение ударной поляры не изменится при выполнении перехода к новым переменным. Систему (2.1) перепишем в виде

$$L^{1,2} [\mathrm{U}_t + \lambda^{1,2}\mathrm{U}_x] = 0 \qquad (2.3)$$

Здесь

$$\lambda^{1,2} = [(\beta - 2) (p - q) \pm R]/2$$
$$(R = ([2 - (\beta + 2) (p + q)]^2 - 4\beta^2 pq)^{1/2})$$
$$L^{1,2} = [2 - (\beta + 2) (p + q) \pm R - 2\beta p]$$

соответственно собственные значения и левые собственные векторы матрицы A. В плоскости годографа вдоль характеристик $c^{1,2}$, уравнение которых имеет вид

$$\beta p (dq)^2 - [2 - (\beta + 2) (p + q)] dpdq + \beta q (dp)^2 = 0 \qquad (2.4$$

система уравнений (2.3) записывается так:

$$L^{1,2}d\mathrm{U} = 0, \qquad d\mathrm{U} = \begin{bmatrix} dp \\ dq \end{bmatrix} \qquad (2.5)$$

В уравнение (1.4) ударной поляры подставим выражения (2.2) для средних скоростей и результат продифференцируем по p. Таким образом получим

$$P \left\{(1 + \beta) Q^2 P - \frac{\beta p_0}{q_0} P^2 + \beta Q^2 \right\} dq + Q \left\{(1 + \beta) QP^2 - \frac{\beta q_0}{p_0} Q^2 + \beta P^2 \right\} dp = 0 \quad (2.6)$$

Здесь

$$P = (p - p_0) / p_0, \qquad Q = (q - q_0) / q_0$$

означают интенсивности ударных волн для каждого из односторонних потоков, формирующих двусторонний поток. Выражение (2.6) совместно с уравнением (2.5)

$$[2-(\beta+2)(p+q)+R]\,dp-2\beta p dq=0$$

вдоль C^1-характеристики показывает поведение параметров потока за фронтом ударной волны при ее движении в двустороннем потоке.

3. Затухание волны. В уравнениях (2.1), (2.2) перейдем к переменным t', τ по формулам

$$t'=t,\qquad \tau=t-\frac{x}{\lambda},\qquad \lambda=\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t'}+\frac{\partial}{\partial \tau},\qquad \frac{\partial}{\partial x}=-\frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial \tau}$$

и неизвестные плотности p, q потока в окрестности фронта $\tau=0$ волны представим рядами по степеням τ

$$p=\sum_{k=0}^{\infty}p_k(t)\,\tau^k,\qquad q=\sum_{k=0}^{\infty}q_k(t)\,\tau^k \tag{3.1}$$

Подставив (3.1) в преобразованные уравнения и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях τ, получим уравнение нулевого приближения

$$[1-2p_0-\beta q_0-\lambda]\,p_1=\beta p_0 q_1 \tag{3.2}$$

уравнения первого приближения

$$[1-2p_0-\beta q_0-\lambda]\,p_2=\beta p_0 q_2+{}^1/_2\,[\lambda p_1^{\cdot}+2p_1(p_1+\beta q_1)] \tag{3.3}$$

$$\frac{1-2p_0-\beta q_0-\lambda}{\beta q_0}=\frac{\lambda p_1^{\cdot}+2p_1(p_1+\beta q_1)}{\lambda q_1^{\cdot}-2q_1(\beta p_1+q_1)} \tag{3,4}$$

уравнения второго приближения

$$[1-2p_0-\beta q_0-\lambda]\,p_3=\beta p_0 q_3+{}^1/_3\,[\lambda p_2^{\cdot}+3(2p_1+\beta q_1)\,p_2+3\beta p_1 q_2]$$

$$\frac{1-2p_0-\beta q_0-\lambda}{\beta q_0}=\frac{\lambda p_2^{\cdot}+3(2p_1+\beta q_1)\,p_2+3\beta p_1 q_2}{\lambda q_2^{\cdot}-3\beta q_1 p_2-3(\beta p_1+2q_1)\,q_2} \tag{3.5}$$

В этих уравнениях точкой в позиции штриха обозначена производная по времени. Начальные условия

$$t=0,\qquad p_1=p_{10},\qquad q_1=q_{10}$$

Решение уравнений (3.2), (3.4)

$$q_1=\frac{q_0}{p_0}\mu p_1$$

$$p_1=\lambda p_{10}\left[1-\frac{q_0}{p_0}\mu^2\right]\left[B+\lambda\left(1-\frac{q_0}{p_0}\mu^2\right)\right]^{-1}$$

$$\mu=[1-2p_0-\beta q_0-\lambda]\,/\,\beta q_0$$

$$B=2p_{10}\left\{(1+\beta)\left(1+\frac{q_0}{p_0}\mu\right)-\left(\beta+\frac{q_0}{p_0}\mu\right)\left(1-\frac{q_0}{p_0}\mu^2\right)\right\}t$$

выражает закон затухания скорости изменения фронта волны.

Решение уравнений (3.3), (3.5)

$$q_2 = \frac{q_0}{p_0}\mu p_2 + D\beta p_0\left(1 - \frac{q_0}{p_0}\mu^2\right)p_1^2$$

$$p_2 = \left(\frac{p_1}{p_{10}}\right)^3 (cp_{10}^3 t + p_{20})$$

$$c = -D\,[2\mu E + 3\,(1 - q_0\mu^2/p_0)(\beta + \mu\beta + 2q_0\mu^2/p_0)]$$

$$D = (1 + \beta)\,(1 + q_0\mu/p_0)\,q_0\mu^2/\beta\,(p_0 - q_0\mu^2)^2$$

$$E = 2\,[(1 + \beta)\,(1 + q_0\mu/p_0) - (\beta + q_0\mu/p_0)\,(1 - q_0\mu^2/p_0)]$$

характеризует затухание кривизны фронта волны.

4. **Особое решение.** Будем искать решение уравнений (2.1), (2.2) в виде простой волны, т. е. предположим, что $p = p\,(q)$. Система (2.1), (2.2) сведется тогда к одному уравнению

$$q_t + [\beta q p' - 1 + \beta p + 2q]\, q_x = 0 \tag{4.1}$$

и условию совместности (2.4) рассматриваемых уравнений. Решение уравнения (4.1)

$$x - [\beta q p' - 1 + \beta p + 2q]\, t = f\,(q)$$

содержит произвольную функцию $f\,(q)$, вид которой определяется из формы начального распределения плотности в одном из односторонних потоков.

Решение уравнения совместности (2.4), записанное в параметрическом виде [1]

$$p = r\frac{ds\,(r)}{dr} - s\,(r), \qquad q = \frac{ds\,(r)}{dr}, \qquad \alpha = \frac{\beta}{2\,(1 + \beta)}$$

$$s\,(r) = \frac{r^\alpha\,(1 + r)^{1-2\alpha}}{1 + \beta}\left[\int \frac{dr}{r^\alpha\,(1 + r)^{2-2\alpha}} + c\right]$$

совместно с особым решением $p + q = 1$ представляют искомую зависимость.

Автор благодарит С. В. Фальковича за обсуждение результатов этой работы.

Поступила 28 I 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Bick J. H., Newell G. F. A continuum model for two-directional traffic flow. Quart. Appl. Math., 1960, vol. 18, No. 2, p. 191—204.
2. Fortet R. La circulation des voitures sur une route ou dans les arteres d'une ville, a partir des lois de l'hydraulique. Houille Blanche, 1963, vol. 18, No. 8, p. 909—914.
3. Солдатов Г. П. Момент образования ударной волны в двустороннем транспортном потоке. ПММ, 1970, т. 34, вып. 1.